Thay vào (2) ta được: $\left(t-\frac{5}{2}\right)f\left(2\right)=t\left(2t-5\right)f\left(4t\right)$

Do đó với mọi $t>1, t\neq\frac{5}{2}\Rightarrow f\left(4t\right)=\frac{f\left(2\right)}{2t}$

Từ (1) ta có: $f\left(t\right)=f\left(4\right)+\left(4-t\right)f\left(4t\right)=\frac{2f\left(2\right)}{t}$ vơi $t>1, t\neq\frac{5}{2}$.

Với $t=\frac{5}{2}$, từ (1) thay $x=\frac{5}{2}, y=2$ ta có:

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=f\left(2\right)-\frac{1}{2}f\left(5\right)=\frac{4f\left(2\right)}{5}=\frac{2f\left(2\right)}{\frac{5}{2}}\Rightarrow f\left(t\right)=\frac{2f\left(2\right)}{t}\text{ với mọi } t>1.$$

Đặt $c=2f\left(2\right)\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{c}{x}$ với $x>1$.

Thử lại thỏa mãn điều kiện (1).

Vậy hàm số cần tìm là: $f\left(x\right)=\frac{c}{x}$.

Bài 28. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x+xy+f(y))=\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)\left(f(y)+\frac{1}{2}\right),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Hướng dẫn giải

Dễ thấy hàm f hằng không thỏa mãn. Ta xét f không hằng.

Trong (1) cho y=-1 ta được: $f(f(-1))=\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)\left(f(-1)+\frac{1}{2}\right),\forall x\in\mathbb{R}$

Rõ ràng nếu $f(-1)+\frac{1}{2}\neq 0$ thì f là hàm hằng. Do đó: $f(-1)+\frac{1}{2}=0\Rightarrow f(-1)=-\frac{1}{2}$

Ta sẽ chứng minh: $f(x)+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow x=-1$.

Thật vậy, giả sử tồn tại $a\neq -1$ sao cho $f(a)=\frac{-1}{2}$.

Trong (1) chọn $y=a$ ta có: $f(ax+x-\frac{1}{2})=0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Mâu thuẫn vì f không là hàm hằng. Do đó ta có: $a=-1$.

Chú ý là $f(-1)=-\frac{1}{2}$ nên từ (1) ta có : $f\left(\frac{-1}{2}\right)=0$.

Trong (1) chọn $x=\frac{-\frac{1}{2}-f\left(y\right)}{1+y}$ ta được :

$$f\left(\frac{-\frac{1}{2}-f\left(y\right)}{1+y}+\frac{-\frac{1}{2}-f\left(y\right)}{1+y}y+f\left(y\right)\right)=\left(f\left(\frac{-\frac{1}{2}-f\left(y\right)}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)\left(f\left(y\right)+\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(f\left(\frac{-\frac{1}{2}-f(y)}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)\left(f(y)+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{-1}{2}\right),\forall y\neq -1$$

$$f\left(\frac{\frac{-1}{2}-f(y)}{1+y}\right)=\frac{-1}{2},\forall y\neq -1\Leftrightarrow \frac{\frac{-1}{2}-f(y)}{1+y}=-1,\forall y\neq -1\Rightarrow f(y)=y+\frac{1}{2},y\neq -1$$

Do $f(-1)=-\frac{1}{2}$ nên $f(x)=x+\frac{1}{2},\forall x\in\mathbb{R}$.

Thử lại ta có hàm số cần tìm là $f(x)=x+\frac{1}{2},\forall x\in\mathbb{R}$.

Bài 29. Tìm tất cả các số nguyên không âm n sao cho tồn tại một hàm $f:\mathbb{Z}\to[0;+\infty)$ khác hằng thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện sau

i. $f(xy)=f(x)f(y);\ \forall x,y\in\mathbb{Z}$

ii. $\left\{2f(x^2+y^2)-f(x)-f(y)|\ x,y\in\mathbb{Z}\right\}=\{0;1;2;...;n\}$.

Hướng dẫn giải

Với $a\in\mathbf{Z}$ bất kì, bằng cách thay $x=y=a^k;\ k\in\mathbb{N}^*$ vào i) được

$$2f(a)^k\left[f(2)f(a)^k-1\right]\in\{0;1;2;...;n\} \qquad (1)$$

+ Nếu $f(2)=0,$ thì $-2f(a)^k\in\{0;1;2;...;n\}\Rightarrow f(a)=0.$

+ Nếu $f(2)>0,$ thì ta thấy $f(a)=0$ hoặc $f(a)=1.$ Thật vậy, nếu $f(a)>1,$ thì bằng cách cho $k\to+\infty$, ta thấy $2f(a)^k\left[f(2)f(a)^k-1\right]\to+\infty$ nên (1) không thể xảy ra, còn nếu $0<f(a)<1,$ thì với k đủ lớn, $2f(a)^k\left[f(2)f(a)^k-1\right]<0$ nên (1) cũng không thể xảy ra. Thành thử, ta đã chứng minh được với mọi $a,$ thì $f(a)=0$ hoặc $f(a)=1.$

Từ đó suy ra $2f(x^2+y^2)-f(x)-f(y)\in\{0;1;2\};\forall x,y\in\mathbf{Z}$. (2)

Do đó, $n\le 2.$

*)Nếu $n=0,$ thì $2f(x^2+y^2)=f(x)+f(y);\forall \text{x,y}\in\mathbb{Z}$.

Vì f khác hằng nên tồn tại $x_0\in\mathbb{Z}$ sao cho $f(x_0)\neq 0$. Khi đó,

$$f(x_0)=f(x_0)f(1)\Rightarrow f(1)=1.$$

Do f khác hằng nên tồn tại $x_1\in\mathbb{Z}$ sao cho $f(x_1)\neq 1$. Từ i), ta có

$$f(0)=f(x_1).f(0)\Rightarrow \text{f(0)=0}.$$

Bây giờ, sử dụng (2), ta được

$$2=2f(1^2+0^2)=f(1)+f(0)=1.$$

Điều vô lí này chứng tỏ $n=0$ không thỏa mãn.

*)Nếu $n=1,$ thì hàm số

$$f(x)=\begin{cases}0 & nêu \quad x=0\\ 1 & nêu \quad x\neq 0\end{cases}$$

thỏa mãn đề bài. Do đó, $n=1$ thỏa mãn đề bài.

*)Nếu $n=2,$ thì ta thấy không thể tồn tại 2 số $p,q\in\mathbf{Z};(p,q)=1$ sao cho $f(p^2+q^2)=0$. Thật vậy, nếu trái lại, thì $\forall x,y\in\mathbf{Z},$ ta có

$$0=f(p^2+q^2)f(x^2+y^2)=f\left((p^2+q^2)(x^2+y^2)\right)$$
$$=f\left((xp+yq)^2+(xq-yp)^2\right)$$

Kết hợp với (2) suy ra $f(xp+yq)=f(xq-yp)=0.$ Thế nhưng, do $(p,q)=1$ nên tồn tại $x,y\in\mathbf{Z}$ để $xp+yq=1.$ Do đó, $1=f(xp+yq)=0.$ Điều vô lí này chứng tỏ

$$f(x^2+y^2)=1;\ \forall x,y\in\mathbf{Z};\ (x,y)=1.$$

Bây giờ, ta xét hàm số

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{nếu } \left[\begin{array}{l}p\mid x\\ q\mid x\end{array}\right.\\ 1 & \text{nếu } \begin{cases}p\nmid x\\ q\nmid x\end{cases}\end{cases}$$

trong đó p,q là 2 số nguyên tố phân biệt có dạng $4k+3.$

Ta sẽ chứng minh hàm $f(x)$ xây dựng như trên thỏa mãn

i) $f(xy)=f(x)f(y);\ \forall x,y\in\mathbf{Z}.$

ii) $\{2f(x^2+y^2)-f(x)-f(y)\mid x,y\in\mathbf{Z}\}=\{0;1;2\}.$

- Kiểm tra điều kiện i)

Nếu $\left[\begin{array}{l}p\mid xy\\ q\mid xy\end{array}\right.$ thì hiển nhiên $f(xy)=0=f(x)f(y)$.

Nếu $\begin{cases}pq\nmid x\\ pq\nmid y\end{cases}$ thì $f(xy)=1=f(x)f(y)$

- Kiểm tra điều kiện ii)

Vì $f(x)\in\{0;1\}$ nên $\{2f(x^2+y^2)-f(x)-f(y)\mid x,y\in\mathbf{Z}\}\subseteq\{0;1;2\}$

Dễ thấy $\begin{cases}2f(1+p^2)-f(1)-f(p)=1\\ 2f(p^2+q^2)-f(p)-f(q)=2\\ 2f(0)-f(0)-f(0)=0\end{cases}$ nên

$$\{2f(x^2+y^2)-f(x)-f(y)\mid x,y\in\mathbf{Z}\}=\{0;1;2\}$$

Vậy $n=1, n=2$ là tất cả các giá trị thỏa mãn đề bài.

Bài 30. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn

$$f\left(x^2+y^2\right)=xf\left(x\right)+yf\left(y\right),\forall x,y\in\mathbb{R}\quad (1).$$

Hướng dẫn giải

Cho $x=0$, từ (1) suy ra $f\left(y^2\right)=yf\left(y\right),\forall y\in\mathbb{R}$

Cho $y=0$, từ (1) suy ra $f\left(x^2\right)=xf\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó (1) trở thành:

$f\left(x^2+y^2\right)=f\left(x^2\right)+f\left(y^2\right),\forall x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right),\forall x,y\geq 0\quad (*)$

thay y bởi $-y$ từ (1) ta được :

$$f\left(x^2+y^2\right)=xf\left(x\right)-yf\left(-y\right)$$

$\Rightarrow -yf\left(-y\right)=yf\left(y\right),\forall y\in\mathbb{R} \Rightarrow f\left(-x\right)=-f\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}$

$-yf\left(-y\right)=yf\left(y\right),\forall y\in\mathbb{R} \Rightarrow f\left(-x\right)=-f\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}$, chứng tỏ f là hàm số lẻ. Do đó với mọi $x\ge 0, y\le 0$ ta có

$f\left(x-y\right)=f\left(x+\left(-y\right)\right)=f\left(x\right)+f\left(-y\right)=f\left(x\right)-f\left(y\right)$

$\Rightarrow f\left(x\right)=f\left(x-y\right)+f\left(y\right)$

$\Rightarrow f\left(\left(x-y\right)+y\right)=f\left(x-y\right)+f\left(y\right)$

$\Rightarrow f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right),\forall x\ge 0,\forall y\le 0 \quad (**)$

Với mọi $x\le 0, y\le 0$ ta có

$f\left(x+y\right)=-f\left(-x-y\right)=-\left(f\left(-x\right)+f\left(-y\right)\right)=-\left(-f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right) \quad (***)$

Kết hợp $(*),(**),(***)$ và ta được $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right),\forall x,y\in\mathbb{R}$.

tính $f\left(\left(x+1\right)^2\right)$ theo hai cách. Ta có

$$\begin{aligned}
&f\left(\left(x+1\right)^2\right)=f\left(x^2+2x+1\right)\\
&\Leftrightarrow \left(x+1\right)f\left(x+1\right)=f\left(x^2\right)+f\left(2x\right)+f\left(1\right)\\
&\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(f\left(x\right)+f\left(1\right)\right)=xf\left(x\right)+2f\left(x\right)+f\left(1\right)\\
&\Leftrightarrow f\left(x\right)=xf\left(1\right),\forall x\in\mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow f\left(x\right)=ax,\forall x\in\mathbb{R}, a\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Bài 31. Cho hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

a) $f\left(ab\right)=f\left(\left[a,b\right]\right)f\left(\left(a,b\right)\right)$ với mọi $a,b\in\mathbb{N}^*, a\ne b$; trong đó $\left[a,b\right],\left(a,b\right)$ lần lượt là bội chung nhỏ nhất, ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương a,b;

b) $f\left(p+q+r\right)=f\left(p\right)+f\left(q\right)+f\left(r\right)$ với mọi số nguyên tố p,q,r.

Tính giá trị của $f\left(2013\right)$? Kí hiệu $\mathbb{N}^*$ là tập hợp tất cả các số nguyên dương.

Hướng dẫn giải

Đặt $f\left(2\right)=a,\ f\left(3\right)=b$. Khi đó ta có các đẳng thức sau:

$f\left(7\right)=f\left(2+2+3\right)=2f\left(2\right)+f\left(3\right)=2a+b$

$f\left(8\right)=f\left(2+3+3\right)=f\left(2\right)+2f\left(3\right)=a+2b$

$f\left(16\right)=f\left(7+7+2\right)=2f\left(7\right)+f\left(2\right)=2\left(2a+b\right)+a=5a+2b$

$f\left(16\right)=f\left(2\right)f\left(8\right)=a\left(a+2b\right)$.

Do đó ta có $5a+2b=a^2+2ab$ $\left(1\right)$.

Mặt khác ta có các đẳng thức sau:

$f\left(12\right)=f\left(2+3+7\right)=f\left(2\right)+f\left(3\right)+f\left(7\right)=3a+2b$

$f\left(12\right)=f\left(2\right)f\left(6\right)=a\left(f\left(2+2+2\right)\right)=3a^2$

Suy ra $3a+2b=3a^2$ $\left(2\right)$.

Từ (1) và (2) ta có

$$\begin{cases}5a+2b=a^2=2ab\\3a+2b=3a^2\end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}\Rightarrow f(7)=7, f(8)=8$$

Ta có 2003 là số nguyên tố nên

$f(2013)=f(2003+3+7)=f(2003)+f(3)+f(7)=f(2003)+10$ (3)

$f(2025)=f(2003+5+17)=f(2003)+f(5)+f(17)$ (4)

$f(9)=3f(3)=9=f(5+2+2)=f(5)+2f(2)\Rightarrow f(5)=5$

$f(17)=f(7+7+3)=2f(7)+f(3)=17$, kết hợp với (4) ta được :

$f(2003)=f(2025)-22$ (5)

Mặt khác $f(2025)=f(9.9.25)=f(9)f(9.25)=9.f(5.5.9)=9f(5)f(45)$

$=9f(5)f(3.15)=45f(3)f(15)=45f(3)\left(f(7+5+3)\right)$

$=45.3\left(f(7)+f(5)+f(3)\right)=2025$

Do đó $f(2025)=2025$, kết hợp với (5) ta được $f(2003)=2003$. Do đó từ đẳng thức (3) ta được $f(2013)=2013$.

Bài 32. Tìm tất cả các hàm số $f:R\to R$ sao cho: $\forall x,y\in R$,

$$f(x^{2015}+2014y)=f(2x+y)+f(3x+2013y)+x^{2015}-5x-2015.$$

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x)-x=g(x)\ \forall x\in R$ .Thay vào giả thiết ta có

$g(x^{2015}+2014y)=g(2x+y)+g(3x+2013y)+2015\ \forall x,y\in R$ (1).

Thay $y=3x-x^{2015}$ vào (1) ta có $g(4x-x^{2015}),\forall x\in R$ (2).

Xét hàm số $h(x)=3x-x^{2015}\ \forall x\in R$ ta có $h(x)$ liên tục trên R và $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=+\infty$, suy ra tập giá trị của h(x) là R. Từ (2) suy ra $g(x)=-2015\ \forall x\in R$.

Do đó $f(x)=x-2015\ \forall x\in R$.

Thay vào thử lại ta thấy $f(x)=x-2015\ \forall x\in R$ thỏa mãn.

Vậy $f(x)=x-2015\ \forall x\in R$.

Bài 33. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}\setminus\{0\}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn: $f\left(n+f(n)\right)=f(n),\forall n\in\mathbb{N}$, với mọi $x,y\in\mathbb{N}$, và tồn tại $n_o\in\mathbb{N}$ sao cho $f(n_0)=1$.

Hướng dẫn giải

Gọi n_1 là số tự nhiên bé nhất sao cho $f(n_1)=1$, suy ra

$$f(n_1+1)=f\left(n_1+f(n_1)\right)=f(n_1)=1$$

hay $f(n)=1,\forall n\in\mathbb{N},n\ge n_1$.

Giả sử $n_1>1$ suy ra $f\left(n_1-1+f(n_1-1)\right)=f(n_1-1)$

Nếu $n_1-1+f(n_1-1)\ge n_1$ thì $f(n_1-1)=1$ (trái với giả thiết n_1 là số tự nhiên bé nhất sao cho $f(n_1)=1$).

Nếu $n_1-1+f(n_1-1)<n_1$ thì $f(n_1-1)<1$ (vô lý)

Vậy $n_1=1$, do đó $f(n)\equiv1,\forall n\in\mathbb{N}$

Bài 34. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$f\left(y+f(x)\right)=f^4(x)+4y^3f(x)+6y^2f^2(x)+4yf^3(x)+f(-y),\forall x,y\in\mathbb{R}$ (1).

Hướng dẫn giải

Giả sử $\exists$ hàm số f thỏa mãn (1).

TH1: $f(x)=0$. Thử lại ta thấy $f(x)=0$ thỏa mãn (1).

TH2: $f(x)\neq 0 \Rightarrow \exists x_0\in\mathbb{R}, f(x_0)\neq 0$.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow f\left(y+f(x)\right)-f(-y)=\left[y+f(x)\right]^4-y^4,\forall x,y\in\mathbb{R}$ (*)

Thay $x=x_0$ vào (*), ta được

$$\left(y+f(x_0)\right)-f(-y)=\left[y+f(x_0)\right]^4-y^4,\forall x,y\in\mathbb{R}\ (2)$$

Ta thấy vế phải của (2) là một hàm số bậc 3 nên có tập giá trị là $\mathbb{R}$. Do đó hàm số f có tập giá trị là $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \forall y\in\mathbb{R}$ đều $\exists u,v\in\mathbb{R}$ sao cho $f(u)-f(v)=y$.

Thay $y=0$ vào (*), ta được $f\left(f(x)\right)=\left[f(x)\right]^4+a,\forall x\in\mathbb{R}\ \left(a=f(0)\right)$ (3).

Thay $y=-f(y)$ vào (*), ta được

$f\left(f(x)-f(y)\right)-f\left(f(y)\right)=\left[f(x)-f(y)\right]^4-\left[f(y)\right]^4,\forall x,y\in\mathbb{R}$ (4).

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ $f\left(f(x)-f(y)\right)=\left[f(x)-f(y)\right]^4+a,\forall x,y\in\mathbb{R}$ hay

$f\left(f(u)-f(v)\right)=\left[f(u)-f(v)\right]^4+a,\forall u,v\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow f(y)=y^4+a,\forall y\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow f(x)=x^4+a,\forall x\in\mathbb{R}$

Thử lại ta thấy $f(x)=x^4+a$ thỏa mãn điều kiện (1).

Vậy $f(x)=0$ và $f(x)=x^4+a$ (a là hằng số) là các hàm số cần tìm.

Bài 35. Xác định hàm số $\mathrm{f}:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ thỏa mãn đồng thời 3 điều kiện:

1. $f(-x)=-f(x)$;
2. $f(x+1)=1+f(x),\forall x\in\mathbb{R}$
3. $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{f(x)}{x^2},\forall x\neq 0$.

Hướng dẫn giải

$\forall x\neq 0$ ta có: $f\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=f\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1+\dfrac{f(x)}{x^2}$ (1)

Mặt khác, với mọi x khác $0;-1$ ta có:

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right)=f\left(\frac{1}{\frac{x}{x+1}}\right)=\frac{f\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}=f\left(\frac{x}{x+1}\right).\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2f\left(1-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2.\left[1-\frac{f(x+1)}{(x+1)^2}\right]=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2.\frac{(x+1)^2-f(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left[(x+1)^2-1-f(x)\right]=\frac{1}{x^2}\left[x^2+2x-f(x)\right]\qquad(2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $1+\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}\left[x^2+2x-f(x)\right]$

$\Rightarrow f(x)=x$ với mọi x khác $0;-1$

Từ 1. có $f(0) = -f(0)$ suy ra $f(0) = 0$

Ta có $f(-1) = -f(1) = -[1 + f(0)] = -1$. Vậy $f(x) = x, \forall x \in R$.

Bài 36. Cho hàm $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ thỏa mãn $f(2) = f(3) = 0;\ f(4) > 0,\ f(8888) = 2222$ và với mọi số tự nhiên m, n thì $f(m+n) - f(m) - f(n)$ bằng 0 hoặc 1. Hãy tính $f(2016)$ và $f(2017)$.

Hướng dẫn giải

Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán.

Từ $(*)$ $\Rightarrow f(m+n) = f(m) + f(n) + a$ với $a \in \{0;1\}$

Chọn $m = n = 1$, ta có $f(2) = 2f(1) + a \Rightarrow 2f(1) \le f(2) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$

Khi đó $f(4) = f(2) + f(2) + a = a$ mà $f(4) > 0$ nên suy ra $f(4) = 1$.

Ta đi chứng minh bằng quy nạp: $f(4n) \ge n\ (\forall n \in N^*)$ (1)

Ta thấy (1) đúng với $n = 1$. Giả sử (1) đúng với $n = k$; ta đi chứng minh (1) đúng với $n = k+1$. Ta có:

$$f(4(k+1)) = f(4k+4) = f(4k) + f(4) + a = f(4k) + 1 + a \ge k + 1$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$. Do đó $f(4n) \ge n\ (\forall n \in N^*)$

Lại có $f(8888) = 2222$, ta sẽ chỉ ra $f(4.2221) = 2221$. Thật vậy, nếu

$f(4.2221) > 2221 \Rightarrow f(4.2221) \ge 2222 = f(8888) \Rightarrow f(8888) \le f(8884)$

Trong khi đó $f(8888) = f(8884) + f(4) + a \ge f(8884) + 1 > f(8884)$ (mâu thuẫn) Vậy $f(4.2221) = 2221$.

Lập luận tương tự ta được $f(4n) = n\ (\forall n \le 2222)$.

Khi đó $f(2016) = f(4.504) = 504$.

Ta lại có: $f(4n) = f(2n) + f(2n) + a = 2(f(n) + f(n) + a) + a = 4f(n) + 3a$

$$\text{Suy ra: } 4f(n) \le f(4n) \le 4f(n) + 3 \Rightarrow f(n) \le \frac{f(4n)}{4} \le f(n) + \frac{3}{4}$$

$$\text{Do đó: } f(n) = \left[\frac{f(4n)}{4}\right] = \left[\frac{n}{4}\right] \text{ với } \forall n \le 2222$$

Vậy $f(2017) = 504$.

Bài 37. Tìm tất cả các số nguyên không âm n sao cho tồn tại một hàm $f: \mathbb{Z} \to [0;+\infty)$ khác hằng thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện sau

i) $f(xy) = f(x)f(y);\ \forall x, y \in \mathbb{Z}$

ii) $\{2f(x^2+y^2) - f(x) - f(y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\} = \{0;1;2;...;n\}$.

Hướng dẫn giải

Với $a \in \mathbf{Z}$ bất kì, bằng cách thay $x = y = a^k;\ k \in \mathbb{N}^*$ vào i) được

$$2f(a)^k\left[f(2)f(a)^k - 1\right] \in \{0;1;2;...;n\} \quad (1)$$

+ Nếu $f(2) = 0$, thì $-2f(a)^k \in \{0;1;2;...;n\} \Rightarrow f(a) = 0$.