$$x, y, z, t \ge 0;\quad x+t \le m;\quad x+t \ge z;\quad z \le y+t \le m;$$
$$x+y+t \le m+z; y = \min\{x, y, z\}$$

Các điều kiện trên có thể rút gọn lại thành

$$0 \le y = \min\{x, y, z\}; x+t \le m; z \le y+t \quad (*)$$

Khi đó $0 \le y \le 2y+t-z \le x+y+t-z \le x+t \le m$.

Ta thấy rằng bộ bốn số không âm $(y; 2y+t-z; x+y+t-z; x+t)$ sắp theo thứ tự tăng dần xác định duy nhất bộ các số x, y, z, t thỏa mãn $(*)$ và tương ứng với một cách lập bảng “$m-$ hoàn thiện”. Do vậy, số cách lập được là $\binom{m+4}{4}$.

Áp dụng với $m = 2015$ được kết quả là $\binom{2019}{4}$.

Câu 32. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho cả hai số $9n+16$ và $16n+9$ đều là số chính phương.

Hướng dẫn giải

n=0 thỏa mãn bài toán.

Xét n>0, nếu cả hai số $9n+16$ và $16n+9$ đều là số chính phương thì số $A_n = (9n+16)(16n+9) = (12n)^2 + (9^2+16^2)n + 12^2$ cũng là số chính phương. Mặt khác ta lại có

$$(12n+12)^2 < (12n)^2 + (9^2+16^2)n + 12^2 < (12n+15)^2$$

Thế nên ta phải có $A_n = (12n+13)^2$ hoặc $A_n = (12n+14)^2$, từ đó thay vào giải ra hai trường hợp ta được $n = 1; 52$. Vậy có ba giá trị của n thỏa mãn là 0;1;52.

Câu 33. Chứng minh rằng trong bảy số chính phương tuỳ ý luôn có hai số khác nhau mà hiệu của chúng chia hết cho 20.

Hướng dẫn giải

Dễ thấy, với mọi số chính phương khi chia cho 20 chỉ có thể dư 1; 2; 4; 8; 16.

Nếu ta có 7 số chính phương thì theo nguyên lý Đirichlê, sẽ tồn tại ít nhất hai số chính phương khác nhau trong 7 số chính phương đó, có cùng số dư khi chia cho 20.

Câu 34. Cho *a, b, c* là các số thực thỏa mãn. Chứng minh rằng đa thức có một nghiệm trong đoạn.

Hướng dẫn giải

Đặt. Khi đó là hàm liên tục trên R và ta có

. Do vậy

$$0 = 9a+11b+29c = f(0)+f(2)+a+9b+27c = f(0)+f(2)+27f\left(\frac{1}{3}\right).$$

Nếu một trong các số $f(0), f(2), f\left(\frac{1}{3}\right)$ bằng 0 thì hiển nhiên phương trình có một nghiệm trong đoạn

Nếu các số này đều khác 0 thì hai trong chúng phải khác dấu và do là hàm liên tục nên phương trình có một nghiệm thuộc một trong các đoạn $\left[0;\frac{1}{3}\right],\left[\frac{1}{3};2\right];[0;2]$. Do đó nó có có một nghiệm thuộc đoạn $[0;2]$

Câu 35. Tìm đa thức P(x) thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases} P(1)=2013 \\ (x-y)P(x+y)-(x+y)P(x-y)=4xy(x^2-y^2);\forall x,y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết: $(x-y)P(x+y)-(x+y)P(x-y)=4xy(x^2-y^2);\forall x,y\in\mathbb{R}$, thay y = x ta được P(0) = 0. Đặt P(x) = xQ(x) thì $(x-y)P(x+y)-(x+y)P(x-y)=4xy(x^2-y^2)$

$\Leftrightarrow (x^2-y^2)Q(x+y)-(x^2-y^2)Q(x-y)=4xy;\forall x,y\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow Q(x+y)-Q(x-y)=4xy;\forall x,y\in\mathbb{R},x\neq\pm y\ \Rightarrow Q(x+y)-Q(x-y)=4xy;\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Thay y = x ta được $Q(2x)-Q(0)=4x^2\Rightarrow Q(x)=x^2+Q(0);\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $Q(1)=1Q(1)=P(1)=2013\Rightarrow Q(0)=2012$

Vậy $Q(x)=x^2+2012\Rightarrow P(x)=x^3+2012x$

Thử lại ta được $P(x)=x^3+2012x$ thoả mãn bài toán.

Câu 36. Tìm tất cả các số nguyên a sao cho tồn tại đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên thỏa mãn

$$P(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a})=2\sqrt[3]{a^2}+3\sqrt[3]{a}.$$

Hướng dẫn giải

Dễ thấy nếu a là lập phương của một số nguyên thì a thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.Bây giờ ta xét trường hợp a không phải là lập phương của một số nguyên. Ta cần ba bổ đề sau

Bổ đề 1.Nếu x, y, z là các số nguyên thỏa mãn $x+y\sqrt[3]{a}+z\sqrt[3]{a^2}=0$ thì $x=y=z=0$.

Bổ đề 2. Nếu $f(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên thì tồn tại duy nhất bộ ba (x,y,z) các số nguyên sao cho $f(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a})=x+y\sqrt[3]{a}+z\sqrt[3]{a^2}$.

Bổ đề 3. Nếu $f(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên và

$f(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a})=x+y\sqrt[3]{a}+z\sqrt[3]{a^2}$ $(x,y,z\in\mathbb{Z})$ thì $y\equiv z\pmod{a-1}$.

Quay trở lại bài toán, giả sử a thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. Ta có

$P(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a})=2\sqrt[3]{a^2}+3\sqrt[3]{a}$

với P là một đa thức với hệ số nguyên. Áp dụng bổ đề 3 cho P ta có $3\equiv 2\pmod{a-1}$, suy ra $a=2$ (ta đang xét a không phải là lập phương của một số nguyên.) Ngược lại, với $a=2$ ta có thể chọn $P(x)=x^2+x-4$ đểcó (*).

Vậy các giá trị a phải tìm là $a=2$ hoặc a là lập phương của một số nguyên.

Câu 37. Cho p và q là các số nguyên dương khác 1. Tìm số nguyên dương m bé nhất sao cho trong mỗi m số nguyên phân biệt thuộc đoạn $[-q;p]$, tồn tại 3 số khác nhau có tổng bằng 0.

Hướng dẫn giải

Ta sẽ chứng minh giá trị nhỏ nhất của m là $\max(p,q)+\alpha$, ở đây $\alpha=3$ nếu p,q là số chẵn và $p=q$, $c=2$ trong các trường hợp còn lại.

Rõ ràng giá trị nhỏ nhất của m là tồn tại, ký hiệu nó bởi m_0. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $p\le q$.

Đoạn $[-p;q]$ chứa $q+1$ số không âm và không có ba số nào có tổng bằng 0, suy ra trong mỗi trường hợp $m_0\ge q+2$. Khi p,q là số chẵn và $p=q$ thì tập $\{-q;-q-1;\cdots;-q/2;q/2;\cdots;q\}$ gồm $q+2$ số và không có ba số nào có tổng bằng 0. Do đó $m_0\ge q+\alpha$. Bây giờ ta đi chứng minh $m_0\le q+\alpha$. Xét ba trường hợp

Trường hợp 1: p và q là hai số lẻ bằng nhau.

Bằng quy nạp theo q ta chứng minh được

Bổ đề. Nếu $X\subset[-q;q]$, $\{0\}$ và X không chứa ba phần tử có tổng bằng 0 thì $|X|\le q+1$.

Thật vậy, khẳng định hiển nhiên đúng với $q=1$. Giả sử nó đúng với các số lẻ bé hơn q. Xét tập $X\subset[-q;q]$, $\{0\}$ sao cho X không chứa ba phần tử có tổng bằng 0.

Đặt $Y=X\cap\{-q;-(q-1);q-1;q\}$. Nếu $|Y|\le 2$ thì $|X|\le(q-1)+2=q+1$ theo giả thiết quy nạp. Bây giờ ta xem là $|Y|\ge 3$. Chắc chắn Y chứa hai phần tử cùng dấu, giả sử hai phần tử đó âm, do đó $-q\in Y\cap X$. Suy ra với mỗi $i=1,2,\cdots,\dfrac{q-1}{2}$, nhiều nhất một phần tử trong $\{i,q-i\}$ sẽ thuộc X, suy ra X chứa nhiều nhất $\dfrac{q+1}{2}$ phần tử dương, dấu bằng có thể xảy ra chỉ khi $q\in X$.

Nếu $q\in X$ thì bởi tính đối xứng, X chứa nhiều nhất $\dfrac{q+1}{2}$ phần tử âm, do đó $|X|\le q+1$.

Nếu $q\notin X$ thì $q-1\in X$ do $|Y|\ge 3$. Ta có X không thể chứa cả hai $-i$ và $-q+1+i$ với $i=1,2,\cdots,\dfrac{q-3}{2}$. Mà X chứa $-q$ và $-q+1$, X chứa nhiều nhất $\dfrac{q-1}{2}$ phần tử dương, và X có thể chứa $-\dfrac{q-1}{2}$. Suy ra $|X|\le\dfrac{q-3}{2}+2+\dfrac{q-1}{2}+1=q+1$.

Vậy bổ đề được chứng minh.

Bây giờ gọi Z là một tập con bất kỳ của $[-p;q]$ sao cho $|Z|=q+2$. Ta sẽ chứng minh rằng Z có ba phần tử có tổng bằng 0, và do định nghĩa của m_0 ta có luôn $m_0\le q+2=q+\alpha$. Cố định Z, và giả sử ngược lại rằng trong Z không có ba phần tử nào có tổng bằng 0. Ta có $0\notin Z$, vì nếu trái lại trong Z sẽ chứa ba số có tổng bằng 0 dạng $0,x,-x$. Áp dụng bổ đề cho tập Z ta có $|Z|\le q+1$, vô lý.

Trường hợp 2: p và q là hai số chẵn bằng nhau.

Gọi Z là một tập con bất kỳ của $[-p;q]$ sao cho $|Z|=q+3$. Ta sẽ chứng minh rằng Z có ba phần tử có tổng bằng 0, và do định nghĩa của m_0 ta có luôn $m_0\le q+3=q+\alpha$. Cố định Z, và giả sử ngược lại rằng trong Z không có ba phần tử nào có tổng bằng 0. Ta có $0\notin Z$, vì nếu trái lại trong Z sẽ chứa ba số có tổng bằng 0 dạng $0,x,-x$. Áp dụng bổ đề cho tập $Z\cap[-q+1;q-1]$ ta có $|Z|\le q+2$, vô lý.

Trường hợp 3: $p<q$.

Gọi Z là một tập con bất kỳ của $[-p;q]$ sao cho $|Z|=q+2$. Ta sẽ chứng minh rằng Z có ba phần tử có tổng bằng 0, và do định nghĩa của m_0 ta có luôn $m_0\le q+2=q+\alpha$. Cố định Z, và giả sử ngược lại rằng trong Z không có ba phần tử nào có tổng bằng 0. Ta có $0\notin Z$, vì nếu trái lại trong Z sẽ chứa ba số có tổng bằng 0 dạng $0,x,-x$.

Nếu q chẵn thì $X\setminus\{q\}\subset[-q+1;q-1]$, theo trường hợp 1 ta có $|X\setminus\{q\}|\le q$, suy ra $|X|\le q+1$, vô lý.

Nếu q lẻ thì $X\subset[-q;q]$, theo trường hợp 1 ta có $|X\setminus\{q\}|\le q$, suy ra $|X|\le q+1$, vô lý.

Bài toán được giải hoàn toàn.

Câu 38. Cho tập hợp $X=\{1;2;3;...;2016\}$. Tìm số k nguyên dương nhỏ nhất sao cho với mọi tập con gồm k phần tử của tập hợp X đều chứa ít nhất 5 số nguyên liên tiếp.

Hướng dẫn giải

Xét tập hợp $A=X/\{5k,1\le k\le 403\}\Rightarrow|A|=2016-403=1613$

Với k không lớn hơn 1613, thì chọn bất kỳ tập hợp B là tập con gồm k phần tử của A, cũng là tập con của X và B không thể chứa 5 số nguyên liên tiếp. (1,5 điểm)

Nếu k = 1614. Xét C là một tập con của X gồm 1614 phần tử

$A_i=\{5i-4;5i-3;5i-2;5i-1;5i\},\mathrm{i}=\overline{1;403},A_{404}=\{2016\}$ (1.5 điểm)

Nếu mỗi tập hợp trên chứa tối đa 4 phần tử thuộc C thì số phần tử của C không quá 4x403+1= 1613 (vô lý). Vậy trong các tập hợp gồm 5 phần tử trên phải có 1 tập là con của C nên C chứa 5 số nguyên lien tiếp.

Vậy số k nhỏ nhất cần tìm bằng 1614.

Câu 39. Cho $n\in\mathbb{N}^*$, $a_0<a_1<a_2<\ldots<a_n$ là các số nguyên và P(x) là đa thức bậc n có hệ số cao nhất bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại i ∈ {0, 1, …, n} sao cho $\left|P(a_i)\right|\ge\frac{n!}{2^n}$.

Hướng dẫn giải

Khai triển đa thức P(x) theo công thức nội suy Lagrange có:

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n}P(a_i)\prod_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n}\frac{(x-a_j)}{(a_i-a_j)}.$$

Xét hệ số của x^n có:

$$1=\sum_{i=0}^{n}P(a_i)\frac{1}{\prod\limits_{j=0,j\ne i}^{n}(a_i-a_j)}\Rightarrow 1=\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{P(a_i)}{\prod\limits_{j=0,j\ne i}^{n}(a_i-a_j)}\right|\le\sum_{i=0}^{n}\frac{|P(a_i)|}{\left|\prod\limits_{j=0,j\ne i}^{n}(a_i-a_j)\right|}$$

Đặt $M=\max\limits_{0\le i\le n}P(a_i)$, vì $a_0<a_1<a_2<\ldots<a_n$ là các số nguyên nên có:

$$\Rightarrow 1 \le \sum_{i=0}^{n} \frac{|P(a_i)|}{\left|\prod_{j=0, j\ne i}^{n}(a_i - a_j)\right|} \le \sum_{i=0}^{n} \frac{M}{\left|\prod_{j=0, j\ne i}^{n}(a_i - a_j)\right|} \le \sum_{i=0}^{n} \frac{M}{i!(n-i)!}$$

Lại có $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!(n-i)!} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{2^n}{n!}$. Từ đó suy ra: $1 \le M.\frac{2^n}{n!}$

$\Rightarrow M \ge \frac{n!}{2^n}$ vì $M = \max_{0\le i\le n} P(a_i) \Rightarrow \exists 0 \le i \le n$ để $P(a_i) \ge \frac{n!}{2^n}$.

Câu 40. Tìm tất cả các đa thức với hệ số thực thỏa mãn:

$$P(x).P(x+1) = P(x^2+2) \quad , \forall x \in R$$

Hướng dẫn giải

Nếu degP = 0 thì $P(x) \equiv c$, c là hằng số

Từ (1) $\Rightarrow c.c = c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = 1 \end{array}\right.$

Suy ra trường hợp này có hai đa thức: $P(x) \equiv 0, P(x) \equiv 1$ thỏa đề ra

▪ Nếu degP = m với m lẻ thì đa thức $P(x)$ luôn có 1 nghiệm $x_0 \in R$

Từ (1) suy ra: $P({x_0}^2+2) = P(x_0).P(x_0+1) = 0$ suy ra x_0^2+2 cũng là nghiệm của $P(x)$

Xét dãy số: $(u_n): \begin{cases} u_1 = x_0 \\ u_n = u_{n-1}^2 + 2 \ , \ n \ge 2 \end{cases}$

Dễ dàng ta thấy (u_n) là dãy tăng và bằng quy nạp theo n ta có: $P(u_n) = 0$, $\forall n$

Do đó đa thức $P(x)$ có vô số nghiệm: điều này vô lý.

Vì vậy degP(x) là chẵn

▪ Xét degP(x) = 2n, $n \in N^*$

• Ta viết lại $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + ... + a_1x + a_0$, $a_{2n} \ne 0$

Từ quan hệ (1) của bài toán, ta đồng nhất hệ số của x^{4n} ở cả hai vế phương trình hàm, ta được:

$a_{2n}^2 = a_{2n} \Leftrightarrow a_{2n} = 1$

• Ta đặt $P(x) = (x^2 - x + 2)^n + G(x)$ với $\deg G(x) < 2n$ và $G(x) \ne 0$

Khi đó: $P(x).P(x+1) = P(x^2+2) \quad , \forall x \in R$

$\Leftrightarrow \left[G(x) + (x^2-x+2)^n\right].\left[G(x+1) + (x^2+x+2)^n\right] = G(x^2+2) + \left[(x^2+2)^2 - (x^2+2)^n + 2\right]^n$

$\Leftrightarrow G(x).G(x+1) + G(x).(x^2+x+2)^n + G(x+1).(x^2-x+2)^n = G(x^2+2)$, (2)

Vì: $(x^2-x+2).(x^2+x+2) = (x^2+2)^2 - x^2 = (x^2+2)^2 - (x^2+2) + 2$

Mà $\deg G(x) = k < 2n$ suy ra: VT(2) có bậc là: $2n + k$, VP(2) có bậc là $2k$

Nhưng: $2n + k > 2k$

Do đó phải có $G(x) \equiv 0$, ta tìm được: $P(x) = (x^2 - x + 2)^n, \forall x \in R$

▪ Vậy các đa thức cần tìm là: $P(x) \equiv 0, P(x) \equiv 1$, $P(x) = (x^2 - x + 2)^n, \forall x \in R$

Câu 41. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực P(x) không đồng nhất không thỏa mãn: P(2014) = 2046, $P(x) = \sqrt{P(x^2+1) - 33} + 32, \forall x \ge 0$

Hướng dẫn giải

Giả sử P(x) thỏa mãn đầu bài. Khi đó ta có

$$P(x^2+1)=[P(x)-32]^2+33, \forall x \geq 0$$

Suy ra $P(2014^2+1)=(2046-32)^2+33=2014^2+33$ Đặt x_0=2014, ta có

$x_0+32=2046, P(x_0)=x_0+32$ do P(2014) = 2046.

Xét dãy $\{x_n\}$ như sau: x_0=2014, $x_1=x_0^2+1$, $x_{n+1}=x_n^2+1$, $\forall$n=1,2,3...

Khi đó

$$P(x_0)=x_0+32$$

$$P(x_1)=P(x_0^2+1)=[P(x_0)-32]^2+33=x_0^2+33=x_0^2+1+32=x_1+32$$

$$P(x_2)=P(x_1^2+1)=[P(x_1)-32]^2+33=x_1^2+33=x_1^2+1+32=x_2+32$$

Bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được

$P(x_n)=x_n+32, \forall n=0,1,2...(*)$ Xét đa thức hệ số thực $Q(x)=P(x)-x-32$ Từ (*) ta có Q(x) nhận x_n làm nghiệm với mọi n=0,1,2…

Mặt khác do dãy $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ tăng nghiêm ngặt nên Q(x)$\equiv$ 0 suy ra P(x) = x+32

Thử lại ta có P(x) thỏa mãn đầu bài. Vậy: Có duy nhất đa thức P(x) = x + 32

Câu 42. Cho đa thức $P(x)=4x^3-54x^2+243x+m$, với $m \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng tồn tại $n \in \mathbb{Z}$ sao cho $P(n) \vdots 821$ với mọi *m*.

Hướng dẫn giải

Nhận xét 821 là một số nguyên tố có dạng $3k+2$. Để chứng minh bài toán ta chứng minh $A=\{P(1),P(2),\dots,P(821)\}$ là một hệ đầy đủ $\bmod 821$ với mọi *m*. Nghĩa là $P(n_i)\equiv P(n_j)(\bmod 821)$ thì $n_i\equiv n_j(\bmod 821)$

Vì $(2,821)=1$ nên $P(n_i)\equiv P(n_j)(\bmod 821) \Leftrightarrow 2P(n_i)\equiv 2P(n_j)(\bmod 821)$.

$$2(4n_i^3-54n_i^2+243n_i+m)\equiv 2(4n_j^3-54n_j^2+243n_j+m)(\bmod 821)$$

$(2n_i-9)^3\equiv(2n_j-9)^3(\bmod 821)$ (1), với mọi *m*.

Ta chứng minh bổ đề sau; nếu $x^3\equiv y^3(\bmod p)$ thì $x\equiv y(\bmod p)$ với $p=3k+2$ là một số nguyên tố. Thật vậy.

Nếu $x\equiv 0(\bmod p)\Rightarrow x^3\equiv 0\equiv y^3(\bmod p)\Rightarrow y\equiv 0(\bmod p)\Rightarrow x\equiv y(\bmod p)$

Nếu $x \not\vdots\, p$ hay $(x,p)=1$ và $(y,p)=1$, theo Fermat ta có $x^{3k+1}\equiv 1\equiv y^{3k+1}(\bmod p)$

Từ $x^3\equiv y^3\to x^{3k}(xy)\equiv y^{3k}(xy)\to x^{3k+1}y\equiv y^{3k+1}x\to y\equiv x(\bmod p)$

Vậy từ (1) $\Rightarrow 2n_i-9\equiv 2n_j-9(\bmod 821)\Leftrightarrow n_i\equiv n_j(\bmod 821)$, và vì $1\leq n_i,n_j\leq 821$ nên $n_i=n_j$. Vậy $A=\{P(1),P(2),\dots,P(821)\}$ là một hệ đầy đủ $\bmod 821$ với mọi *m*.

Suy ra với mọi *m*, tồn tại n_i sao cho $P(n_i)\in A$ thỏa mãn $P(n_i)\vdots 821$.

Câu 43. Cho đa thức $P(x)=x^3+2009x^2+2015x+2012$.

Đặt $P_1(x)=P(x);\ P_{n+1}(x)=P(P_n(x)),\ \ \forall n\in N^*$. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương n thỏa mãn $P_n(x)-x$ chia hết cho 2003 với mọi số nguyên x.

Hướng dẫn giải

Bổ đề: $P(x)\equiv P(y)\ (\text{mod}\,2003)\Leftrightarrow x\equiv y\ (\text{mod}\ 2003)\quad \forall x,y\in Z$

Chứng minh:

Ta chỉ cần chứng minh $P(x)\equiv P(y)\ (\text{mod}\,2003)\Rightarrow x\equiv y\ (\text{mod}\ 2003)$

Thật vậy $P(x)=(x+2)^3+2003(x^2+x+1)+1$

Do đó $P(x)\equiv P(y)\ (\text{mod}\,2003)\ \Rightarrow (x+2)^3\equiv (y+2)^3\ (\text{mod}\ 2003)\ \forall x,y\in Z$

Nếu $(x+2)\equiv 0\ (\text{mod}\,2003)\ \Rightarrow (y+2)\equiv 0(\text{mod}\,2003)$. Do đó $x\equiv y\ (\text{mod}\ 2003)$

Nếu $(x+2)\neq 0\ (\text{mod}\,2003)\ \Rightarrow (y+2)\neq 0(\text{mod}\,2003)$.

Áp dụng định lý Fermat với 2003 là số nguyên tố ta có:

$(x+2)^{2002}\equiv (y+2)^{2002}\equiv 1\ (\text{mod}\,2003)$

Mặt khác $(x+2)^3\equiv (y+2)^3\ (\text{mod}\,2003)\ \Rightarrow (x+2)^{2001}\equiv (y+2)^{2001}\ (\text{mod}\,2003)$

$\Rightarrow (x+2)^{2002}\equiv (y+2)^{2001}(x+2)\ (\text{mod}\,2003)\Rightarrow (y+2)^{2002}\equiv (y+2)^{2001}(x+2)\ (\text{mod}\,2003)$

$(x+2)\equiv (y+2)\ (\text{mod}\ 2003)\ \Rightarrow x\equiv y\ (\text{mod}\ 2003)$ (đpcm).

Trở lại bài toán:

Đặt A={0;1;2;.2002}. Với mỗi $x\in A$, xét dãy $P_1(x)$, $P_2(x)$.,$P_{2004}(x)$.

Theo nguyên lý Dirichle tồn tại các số m,k thỏa mãn $1\le m<k\le 2004$ và

$P_m(x)\equiv P_k(x)\ \ (\text{mod}2003)$ suy ra $P_m(x)\equiv P_m(P_{k-m}(x))\ \ (\text{mod}2003)$

Áp dụng bổ đề ta có $P_{k-m}(x)\equiv x\ \ (\text{mod}2003)$.

Vì vậy với mỗi $x\in A$ luôn tồn tại $n_x\in N^*$ thỏa mãn: $P_{n_x}(x)\equiv x\ (\text{mod}\,2003)$.

Lấy một bội số chung n > 1 của n_0, n_1,.n_{2012}. Ta sẽ chứng minh n là một giá trị thỏa mãn yêu cầu cầu của đề bài.

Thậy vậy với $x\in A$ ta dễ thấy $P_n(x)=P_{kn_x}(x)\equiv P_{n_x}(x)\equiv x\ (\text{mod}\,2003)$

Với mỗi số nguyên $x\notin A$ luôn tồn tại $y\in A,\ x\equiv y\ (\text{mod}2003)$ suy ra

$P_n(x)\equiv P_n(y)\equiv y\equiv x\ (\text{mod}2003)$

Vì vậy $P_n(x)-x$ chia hết cho 2003 với mọi số nguyên x.

Vì tồn tại vô hạn bội chung n > 1 của n_0, n_1,.n_{2012} nên có vô hạn n thỏa mãn bài toán (đpcm).

Câu 44. Tìm các chữ số a,b,c,d sao cho $\overline{abcd2016}$ chia hết cho 2017

Hướng dẫn giải

Đặt $\overline{abcd}=A, 1000\le A\le 9999$. Ta có

$$\begin{aligned}&\overline{abcd2016}\,\vdots\,2017\Leftrightarrow(10000A+2016)\,\vdots\,2017\\&\Leftrightarrow(4.2017A+1932A+2017-1)\,\vdots\,2017\\&\Leftrightarrow(1932A-1)\,\vdots\,2017\Leftrightarrow 1139(1932A-1)\,\vdots\,2017\ (*)\end{aligned}$$

Vì (1139, 2017) = 1 nên

$(*)\Leftrightarrow(1091.2017A+A-1139)\,\vdots\,2017\Leftrightarrow(A-1139)\,\vdots\,2017$.

Vì $1000\le A\le 9999$ nên $-139\le A-1139\le 8806$. Do đó

$$(A-1139)\vdots 2017 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A-1139=0 \\ A-1139=2017 \\ A-1139=4034 \\ A-1139=6051 \\ A-1139=8068 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=1139 \\ A=3156 \\ A=5173 \\ A=7190 \\ A=9207 \end{array}\right. .$$

Từ đây suy ra các chữ số a,b,c,d .