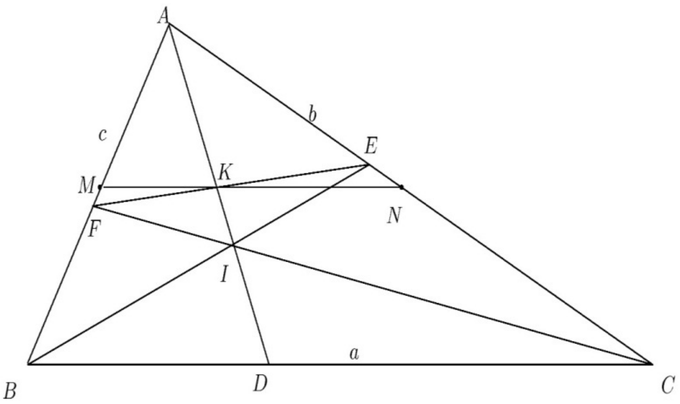
$MN \ge \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\left(AB+AC\right)$.

Hướng dẫn giải



Đặt $BC=a, CA=b, AB=c$ ta có $a^2=b^2+c^2 \ge \dfrac{(b+c)^2}{2}$ suy ra $\dfrac{b+c}{a} \le \sqrt{2}$. Dùng tính chất đường phân giác tính được $AF=\dfrac{bc}{a+b}, AE=\dfrac{bc}{a+c}$. Dùng phương pháp diện tích, hoặc công thức đường phân giác trong tính được

$$AD=\frac{\sqrt{2}bc}{b+c}, AK=\frac{\sqrt{2}AE.AF}{AE+AF}=\frac{\sqrt{2}bc}{2a+b+c}.$$ Từ đó $\dfrac{AK}{AD}=\dfrac{b+c}{2a+b+c} \to \dfrac{MN}{a}=\dfrac{b+c}{2a+b+c}$.

Suy ra: $MN=(b+c)\dfrac{1}{2+\dfrac{b+c}{a}} \ge (b+c)\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\left(AB+AC\right)$.

Câu 2. TRƯỜNG THPT VÂN CANH

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM và đường phân giác trong AD. Đương tròn ngoại tiếp tam giác AMD cắt AB tại E và cắt AC tại F. Chứng minh $BE=CF$.

Câu 3. Trường THPT Cẩm Giàng

Cho hình thang $ABCD$ có đáy nhỏ $AB = 6$ cm, đáy lớn $CD = 15$ cm nằm trong mặt phẳng $\left(P\right)$ không chứa A, B. Từ A, B kẻ hai đường thẳng song song lần lượt cắt $\left(P\right)$ tại A', B'. Gọi O, O' lần lượt là giao điểm của AC và DB; $A'C$ và $B'D$.

1) Chứng minh $AA' = BB'$.

2) Chứng minh $AA' // OO'$

3) Tìm OO' biết $BB' = 7cm$.

Câu 4. ĐỀ THI HOC SINH GIỎI TOÁN 11 NAM ĐỊNH

Cho tam giác ABC vuông góc tại A. Trên đường thẳng $\left(d\right)$ vuông góc với mặt phẳng $\left(ABC\right)$ tại B ta lấy một điểm S sao cho $SB = BA = AC = 1$. $\left(P\right)$ là mặt phẳng song song với các cạnh SB và AC cắt các cạnh SA, SC, BC, BA lần lượt tại D, E, F, H.

1) Chứng minh $DEFH$ là hình chữ nhật.

2) Xác định vị trí của mặt phẳng $\left(P\right)$ sao cho diện tích hình chữ nhật đó lớn nhất.

Câu 5. Trên mặt phẳng cho tứ giác lồi $ABCD$ có $AB = BC = CD = a$.

1) Nếu biết $\widehat{ABC}=\widehat{BCD}=120^0$. Hãy tính diện tích tứ giác $ABCD$ theo a.

2) Giả sử tứ giác $ABCD$ thay đổi, mà $AB = BC = CD = a$ không đổi. Hãy tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$.

Câu 6. SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN CẤP TỈNH VÒNG1

Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R.

Gọi M là điểm tùy ý nằm trên đường tròn này.

a) Chứng minh: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$.

b) Chứng minh: $MA^4 + MB^4 + MC^4 = 18R^4$.

c) Thay tam giác ABC đều bằng hình vuông $ABCD$.

Hãy tính $P = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 ; Q = MA^4 + MB^4 + MC^4 + MD^4$

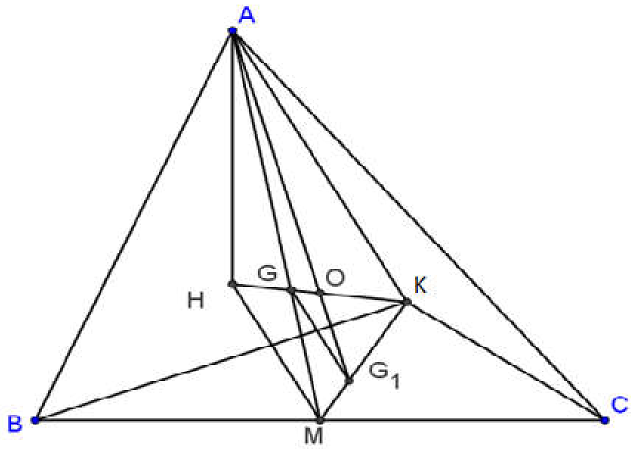
Câu 7. SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN CẤP TỈNH VÒNG 2

a) Cho tam giác ABC có G, H, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi K là điểm sao cho $\overrightarrow{HK} = 3\overrightarrow{HG}$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác ΔKBC, $\Delta KCA, \Delta KAB$. Chứng minh:

G_1A, G_2B, G_3C đồng quy và

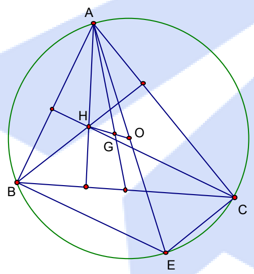
$G_1A = G_2B = G_3C$.

b) Trong mặt phẳng cho ngũ giác đều $ABCDE$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R và điểm M tùy ý.Tìm vị trí của M để $MA + MB + MC + MD + ME$ ngắn nhất.



Hướng dẫn giải

<u>Câu 3a</u> *Trước hết ta chứng minh được G, H, O thẳng hàng và $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$*



Gọi E là điểm đối xứng của A qua O.Ta có:BHCE là hình bình hành

Suy ra: $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$

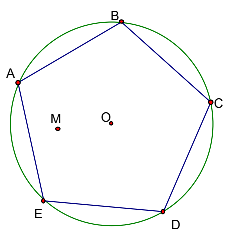
Suy ra: $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$

Vì G, H, O thẳng hàng; $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$; $\overrightarrow{HK} = 3\overrightarrow{HG}$ nên H, G, O, K thẳng hàng và O là trung điểm HK Gọi M là trung điểm BC.

Trong tam giác ΔAMK ta có: GG_1 song song AK ; $GG_1 = \frac{1}{3}AK$ và $GO = \frac{1}{3}OK$

Vậy ta chứng minh được O, A, G_1 thẳng hàng và $AG_1 = \frac{4}{3}AO$ Như vậy G_1A, G_2B, G_3C đồng quy tại O và $G_1A = G_2B = G_3C$

<u>Bài 3b</u>



Vì $ABCDE$ là ngũ giác đều nên ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$ Ta có :

$MA = \frac{1}{R}.|\overrightarrow{MA}|.|\overrightarrow{OA}| \geq \frac{1}{R}.\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OA} = \frac{1}{R}(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).\overrightarrow{OA} = \frac{1}{R}\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA} + R$

$\Rightarrow MA + MB + MC + MD + ME \geq \frac{1}{R}\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) + 5R$

$\Rightarrow MA + MB + MC + MD + ME \geq 5R$ **Vậy** $MA + MB + MC + MD + ME$ ngắn nhất khi M trùng với O.

Câu 8. a) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1;2), B(4;3)$.

Tìm trên trục hoành điểm M sao cho $\widehat{AMB} = 45^0$.

b) Cho tam giác ABC đều, cạnh bằng $6cm$, trọng tâm là G. Một đường thẳng Δ đi qua G, Δ cắt các đoạn thẳng AB và AC lần lượt tại hai điểm M và N sao cho $2AM = 3AN$. Tính diện tích tam giác AMN.

Hướng dẫn giải

a. Gọi $I(x;y)$ là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB.

Ta có: $\begin{cases} AI = BI \\ \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 10 \\ x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

• Với $I(3;1)$ thì $IA = \sqrt{5}$. Đường tròn tâm I bán kính IA có phương trình $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$ cắt trục hoành tại hai điểm $M_1(1;0)$ và $M_2(5;0)$.

• Với $I(2;4)$ thì $IA = \sqrt{5}$. Đường tròn tâm I, bán kính IA không cắt trục hoành.

b. Đặt $AM = x, AN = y$ với $x > 0, y > 0$.

$S_{AMG} = \frac{1}{2}AM.AG.\sin 30^0 = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $S_{ANG} = \frac{1}{2}AN.AG.\sin 30^0 = \frac{y\sqrt{3}}{2}$

$S_{AMN} = \frac{1}{2}AM.AN.\sin 60^0 = \frac{xy\sqrt{3}}{4}$, $S_{AMN} = S_{AMG} + S_{ANG}$ Nên ta có:

$\frac{\sqrt{3}}{2}(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{4}xy \Leftrightarrow 2(x+y) = xy$.

Vậy ta có hệ : $\begin{cases} 2(x+y) = xy \\ 2x = 3y \end{cases}$

Câu 9. a) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, cạnh BC nằm trên đường thẳng có phương trình: $2x + y - 2 = 0$. Đường cao kẻ từ B có phương trình: $x + y + 1 = 0$, điểm $M(1;1)$ thuộc đường cao kẻ từ đỉnh C. Xác định toạ độ các đỉnh của tam giác ABC.

b) Trong mặt phẳng cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D sao cho bốn điểm đó không cùng nằm trên một đường thẳng.

Chứng minh rằng: $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục Oxy sao cho $A, C \in Ox$, $B \in Oy$. Giả sử trong hệ trục đó ta có:

$A(a,0), C(c,0), B(0,b), D(m,n)$ $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + (c-m)^2 + n^2 = (a-m)^2 + n^2 + c^2 + b^2 \Leftrightarrow 2m(a-c) = 0$ (*)Do

$A(a,0) \neq \ C(c,0) \ \Leftrightarrow a \neq c$ Vậy từ (*) suy ra m = 0, hay D nằm trên trục tung. Vậy (*) $\Leftrightarrow AC \perp BD$

Câu 10. SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN VÒNG 2 - NĂM 2012

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ và có trọng tâm G. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm của GA, GB, GC với đường tròn $(O;R)$.

a) Chứng minh: $GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3(R^2 - OG^2)$.

b) Chứng minh: $GA_1 + GB_1 + GC_1 \ {}^3 \ GA + GB + GC$.

Hướng dẫn giải

a) $GA^2 + GB^2 + GC^2 = (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC})^2$

$GA^2 + GB^2 + GC^2 = (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC})^2$

$= 3GO^2 + 3R^2 + 2\overrightarrow{GO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 3GO^2 + 3R^2 + 2\overrightarrow{GO}.3\overrightarrow{OG}$

$= 3GO^2 + 3R^2 - 6OG^2 = 3(R^2 - OG^2)$ b)

$GA_1 + GB_1 + GC_1 = \dfrac{GA_1.GA}{GA} + \dfrac{GB_1.GB}{GB} + \dfrac{GC_1.GC}{GC} = (R^2 - OG^2)(\dfrac{1}{GA} + \dfrac{1}{GB} + \dfrac{1}{GC})$

$= \dfrac{GA^2 + GB^2 + GC^2}{3}(\dfrac{1}{GA} + \dfrac{1}{GB} + \dfrac{1}{GC})$ Mặt khác:

$GA^2 + GB^2 + GC^2 \ {}^3 \ \dfrac{(GA + GB + GC)^2}{3}$ áp dụng AM-GM:

$(GA + GB + GC)(\dfrac{1}{GA} + \dfrac{1}{GB} + \dfrac{1}{GC}) \ {}^3 \ 9$ Vậy

$GA_1 + GB_1 + GC_1 \ {}^3 \ \dfrac{1}{9}(GA + GB + GC)^2(\dfrac{1}{GA} + \dfrac{1}{GB} + \dfrac{1}{GC}) \ {}^3 \ GA + GB + GC$

Câu 11. KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12 LONG AN VÒNG 2 – NĂM 2013

Cho AA', BB', CC' là các đường trung tuyến của tam giác ABC và O là điểm tuỳ ý trong mặt phẳng ABC

a) Chứng minh $\dfrac{AA'}{BC} + \dfrac{BB'}{CA} + \dfrac{CC'}{AB} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

b) Chứng minh $\dfrac{OA}{BC} + \dfrac{OB}{CA} + \dfrac{OC}{AB} \geq \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

a) Chứng minh $\dfrac{AA'}{BC} + \dfrac{BB'}{CA} + \dfrac{CC'}{AB} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Ta có

$4AA'^2 = 2\left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2 \quad 2\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right) = 4AA'^2 + 3BC^2$ Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta được

$2\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right) \geq 4\sqrt{3}AA'.BC$ Khi đó

$AA'.BC \leq \dfrac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{2\sqrt{3}} \quad \dfrac{1}{AA'.BC} \geq \dfrac{2\sqrt{3}}{AB^2 + BC^2 + CA^2} \quad \dfrac{AA'}{BC} \geq \dfrac{2\sqrt{3}\,AA'^2}{AB^2 + BC^2 + CA^2}$

Tương tự, ta có

$\frac{BB'}{AC}\geq\frac{2\sqrt{3}\,BB'^2}{AB^2+BC^2+CA^2}$ $\frac{CC'}{AB}\geq\frac{2\sqrt{3}\,CC'^2}{AB^2+BC^2+CA^2}$ Do

$AA'^2+BB'^2+CC'^2=\frac{3}{4}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$ Nên

$\frac{AA'}{BC}+\frac{BB'}{CA}+\frac{CC'}{AB}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$

b) Chứng minh $\frac{OA}{BC}+\frac{OB}{CA}+\frac{OC}{AB}\geq\sqrt{3}$.

$AA'.BC\leq\frac{AB^2+BC^2+CA^2}{2\sqrt{3}}$ $GA.BC\leq\frac{AB^2+BC^2+CA^2}{3\sqrt{3}}$

Với G là trọng tâm tam giác ABC.

$\frac{OA}{BC}=\frac{OA.GA}{BC.GA}\geq\frac{3\sqrt{3}.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{GA}}{AB^2+BC^2+CA^2}$ Do đó

$\frac{OA}{BC}=\frac{OA.GA}{BC.GA}\geq\frac{3\sqrt{3}.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{GA}}{AB^2+BC^2+CA^2}\geq\frac{3\sqrt{3}\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}\right).\overrightarrow{GA}}{AB^2+BC^2+CA^2}$

$\frac{OA}{BC}\geq\frac{3\sqrt{3}}{AB^2+BC^2+CA^2}\left(\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{GA}+GA^2\right)$ Tương tự ta được

$\frac{OB}{CA}\geq\frac{3\sqrt{3}}{AB^2+BC^2+CA^2}\left(\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{GB}+GB^2\right)$ $\frac{OC}{AB}\geq\frac{3\sqrt{3}}{AB^2+BC^2+CA^2}\left(\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{GC}+GC^2\right)$

$\frac{OA}{BC}+\frac{OB}{CA}+\frac{OC}{AB}\geq\frac{3\sqrt{3}}{AB^2+BC^2+CA^2}\left(\overrightarrow{OG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+GA^2+GB^2+GC^2\right)$ Do

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0};GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$ Nên

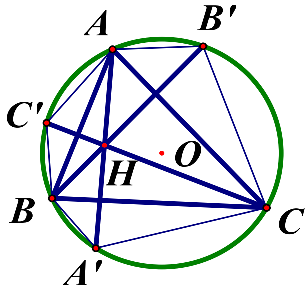
$\frac{OA}{BC}+\frac{OB}{CA}+\frac{OC}{AB}\geq\sqrt{3}$

Câu 12. KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12 LONG AN VÒNG 2-NĂM 2013

Cho đường tròn (O) tâm O bán kính R và tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi A',B' và C' lần lượt là giao điểm thứ hai của đường cao kẻ từ A,B và C với đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng diện tích lục giác $AB'CA'BC'$ bằng hai lần diện tích tam giác ABC.
b) Hãy xác định độ dài ba cạnh của tam giác ABC theo R sao cho lục giác $AB'CA'BC'$ có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải



a) Chứng minh rằng diện tích lục giác $AB'CA'BC'$ bằng hai lần diện tích tam giác ABC .Gọi H là trực tâm tam giác ABC.

Ta có: $\widehat{BAA'} = \widehat{BCC'}$ và $\widehat{BAA'} = \widehat{BCA'}$

Khi đó $\widehat{BCC'} = \widehat{BCA'}$

Suy ra H đối xứng với A' qua BC.

Qua phép đối xứng trục BC biến ΔHBC thành $\Delta A'BC$. Như vậy $S_{\Delta HBC} = S_{\Delta A'BC}$ Qua phép đối xứng trục AC biến ΔHAC thành $\Delta B'AC$. Như vậy $S_{\Delta HAC} = S_{\Delta B'AC}$ Qua phép đối xứng trục AB biến ΔHAB thành $\Delta C'AB$. Như vậy $S_{\Delta HAB} = S_{\Delta C'AB}$ $S_{AB'CA'BC'} = 2S$ với S là diện tích tam giác ABC.

b) Hãy xác định độ dài ba cạnh của tam giác ABC theo R sao cho lục giác $AB'CA'BC'$ có diện tích lớn nhất Gọi a, b và c lần lượt là độ dài các cạnh BC, AC và AB.

Ta có: $S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}$ Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$(a+b-c)+(b+c-a)+(a+c-b) \geq 3\sqrt[3]{(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}$

$(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leq \frac{(a+b+c)^3}{27}$ $S \leq \frac{1}{12\sqrt{3}}(a+b+c)^2$ Mà

$a = 2R\sin A; b = 2R\sin B$ và $c = 2R\sin C$ nên $a+b+c = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$ Xét hàm số $f(x) = \sin x,\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $f'(x) = \cos x;\ f''(x) = -\sin x < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Khi đó $\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3} \leq f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$

Suy ra $\sin A + \sin B + \sin C \leq 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ Ta được $S \leq \frac{9R^2}{4\sqrt{3}}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = R\sqrt{3}$.

Vậy lục giác $AB'CA'BC'$ có diện tích lớn nhất khi $a = b = c = R\sqrt{3}$

Câu 13. KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 VÒNG 1

Cho tam giác không cân ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Các trung tuyến kẻ từ A, B, C lần lượt cắt (O) tại D, E và F. Biết $DE = DF$, chứng minh rằng $AB^2 + AC^2 = 2BC^2$.

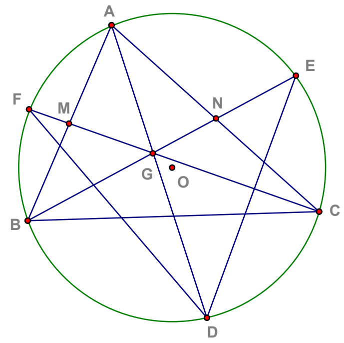
Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC; M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC.

ΔDEG đồng dạng ΔBAG suy ra $\dfrac{DE}{DG} = \dfrac{BA}{BG}$

ΔDFG đồng dạng ΔCAG suy ra $\dfrac{DF}{DG} = \dfrac{CA}{CG}$ Do

$DE = DF$ nên suy ra:



$$\frac{BA}{BG} = \frac{CA}{CG} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BG}{CG} \Leftrightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BG^2}{CG^2} = \frac{\frac{4}{9}BN^2}{\frac{4}{9}CM^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{\frac{1}{4}\left[2\left(AB^2 + BC^2\right) - AC^2\right]}{\frac{1}{4}\left[2\left(AC^2 + BC^2\right) - AB^2\right]} = \frac{2\left(AB^2 + BC^2\right) - AC^2}{2\left(AC^2 + BC^2\right) - AB^2}$$

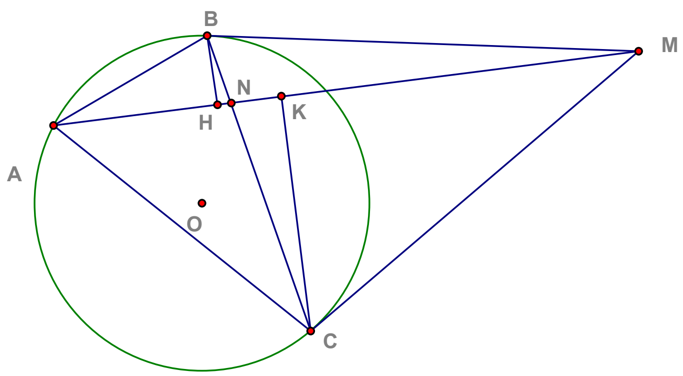
$$\Leftrightarrow AB^2\left[2\left(AC^2 + BC^2\right) - AB^2\right] = AC^2\left[2\left(AB^2 + BC^2\right) - AC^2\right]$$

$$\Leftrightarrow AB^4 - AC^4 = 2BC^2\left(AB^2 - AC^2\right) \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = 2BC^2 \text{ (đpcm)}$$

Câu 14. SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 VÒNG 1

Cho tam giác không vuông ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Các tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau tại M. Đường thẳng AM cắt BC tại N. CMR: $\dfrac{NB}{NC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.

Hướng dẫn giải



Dựng BH, CK vuông góc AM

$(H, K \in AM)$