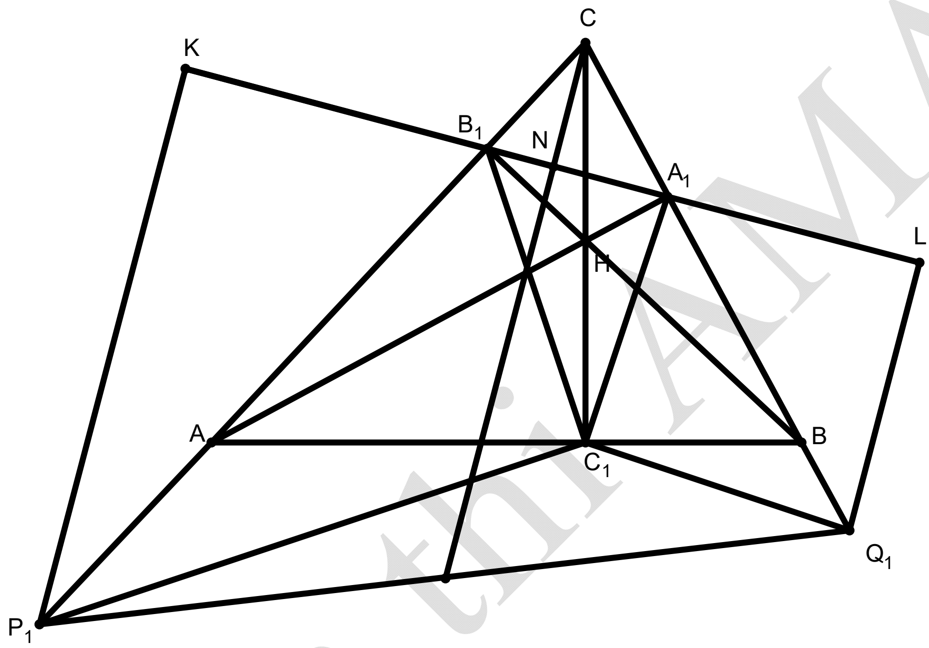
Câu 28. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ** HÒA BÌNH **ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC THPT VÙNG DUYÊN HẢI &ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ VII, NĂM HỌC 2011-2012]**

. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại trực tâm H. Đường vuông góc kẻ từ H tới đường thẳng B_1C_1 và A_1C_1 lần lượt cắt các đường CA và CB tại P và Q. Chứng minh rằng đường vuông góc kẻ từ C tới A_1B_1 đi qua trung điểm của PQ.

Hướng dẫn giải

1. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại trực tâm H. Đường vuông góc kẻ từ H tới đường thẳng B_1C_1 và A_1C_1 lần lượt cắt các đường CA và CB tại P và Q. Chứng minh rằng đường vuông góc kẻ từ C tới A_1B_1 đi qua trung điểm của PQ.



Xét phép vị tự V tâm C biến H thành C_1. Gọi P_1, Q_1 lần lượt là ảnh của P, Q qua phép vị tự V tâm **C.** Từ tính chất của phép vị tự có $C_1P_1 \perp C_1B_1$, $C_1Q_1 \perp C_1A_1$.

Gọi N, K, L lần lượt là hình chiếu của C, P_1, Q_1 trên A_1B_1. Khi đó ta có KLP_1Q_1 là hình thang vuông tại K và L, vì $CN \perp A_1B_1$ nên ta chỉ cần chứng minh N là trung điểm của KL thì CN trở thành đường trung bình của hình thang và do đó nó đi qua trung điểm của P_1Q_1, và theo tính chất của phép vị tự thì nó cũng đi qua trung điểm của PQ.

Có $\widehat{AB_1C} = \widehat{AA_1C} = 90° \Rightarrow ABA_1B_1$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CB_1A_1} = \widehat{A_1BA}$.

Chứng minh tương tự có $\widehat{AB_1C_1} = \widehat{C_1BC}$. Suy ra $\widehat{CB_1A_1} = \widehat{AB_1C_1}$ dẫn đến AC là đường phân giác ngoài của $\widehat{A_1B_1C_1}$.

Chứng minh tương tự có BC là đường phân giác ngoài của $\widehat{B_1A_1C_1}$. Do đó điểm C trở thành tâm đường tròn bàng tiếp góc $\widehat{C_1}$ của $\Delta A_1B_1C_1$

Từ tính chất của đường phân giác suy ra được $\Delta P_1B_1K = \Delta P_1B_1C_1 \Rightarrow KB_1 = B_1C_1$.

Chứng minh tương tự có $A_1L = A_1C_1$.

Dẫn đến nếu gọi p là nửa chu vi $\Delta A_1B_1C_1$ thì $KL = 2p$.

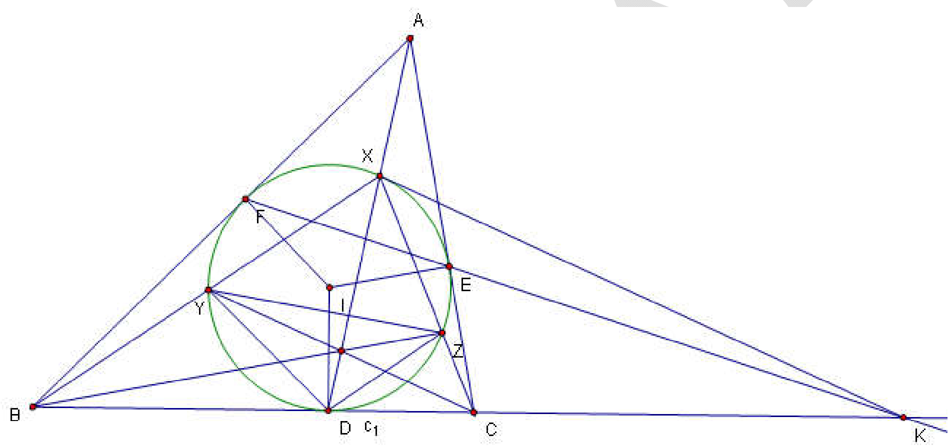
Do C là tâm đường tròn bàng tiếp góc $\widehat{C_1}$ của $\Delta A_1B_1C_1$ nên tính được $B_1N = p - B_1C_1$

$\Rightarrow KN = KB_1 + B_1N = B_1C_1 + p - B_1C_1 = p = \frac{1}{2}KL$. Vậy N là trung điểm của KL. (đpcm)

Câu 29. **[Trêng THPT chuyªn BẮC GIANG tØnh BẮC GIANG TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG IX MÔN: TOÁN 11 n¨m häc 2012 – 2013]**

Cho tam giác *ABC* ngoại tiếp đường tròn (*I*) tâm *I.* Gọi *D*, *E*, *F* là tiếp điểm của (*I*) với *BC*, *CA*, *A**B.*** *AD* cắt (*I*) tại điểm thứ hai là *X*, *BX* cắt (*I*) tại điểm thứ hai là *Y*, *CX* cắt (*I*) tại điểm thứ hai là *Z*. Chứng minh rằng *BZ*, *CY*, *AX* đồng quy.

Hướng dẫn giải



Kẻ tiếp tuyến tại X của (I) cắt BC tại K.

Trong tứ giác XEDF ta có tiếp tuyến tại F, E và XD đồng quy tại A nên tứ giác XEDF là tứ giác điều hòa. Mà KX, KD là tiếp tuyến của (I) tại X, D nên $\overline{K,E,F}$

Mặt khác AD, BE, CF đồng quy nên $(KCBC) = -1$

Suy ra:

$X(KDBC) = -1$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\overrightarrow{XK},\overrightarrow{XB})}{\sin(\overrightarrow{XK},\overrightarrow{XC})} : \frac{\sin(\overrightarrow{XD},\overrightarrow{XB})}{\sin(\overrightarrow{XD},\overrightarrow{XC})} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\left(\widehat{XDY}\right)}{\sin\left(\widehat{XDZ}\right)} : \frac{\sin\left(-\widehat{YXD}\right)}{\sin\left(\widehat{DXZ}\right)} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\left(\widehat{XDY}\right)}{\sin\left(\widehat{XDZ}\right)} : \frac{\sin\left(\widehat{YXD}\right)}{\sin\left(\widehat{DXZ}\right)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{XY}{XZ} : \frac{YD}{DZ} = 1 \Rightarrow \frac{XY}{XZ} . \frac{DZ}{DY} = 1 \ (1)$$

Theo định lí Céva thì BZ, CY, AX đồng quy

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{YB}}{\overline{YX}} . \frac{\overline{ZX}}{\overline{ZC}} . \frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{YB}{YX} . \frac{ZX}{ZC} . \frac{DC}{DB} = 1 \,(\text{do } D \in BC, Y \in BX, Z \in XC)$$

$$\Leftrightarrow \frac{YB}{YX} . \frac{ZX}{ZC} . \frac{DC}{DB} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{YB}{BD} . \frac{DC}{ZC} . \frac{ZX}{XY} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{YD}{XD} . \frac{XD}{DZ} . \frac{ZX}{XY} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{YD}{DZ} . \frac{ZX}{XY} = 1 \,(\text{luôn đúng theo } (1))$$

Vậy BZ, CY, AX đồng quy (đpcm).

Câu 30. ***[Trêng THPT TrÇn Nguyªn H·n* VÜnh Phóc n¨m 2009 – 2010]**

Cho tam gi¸c ABC c©n tại **A.** Gọi H là trung điểm của BC, D là h×nh chiếu vu«ng gãc của H trªn cạnh AC, M là trung điểm của H**D.**

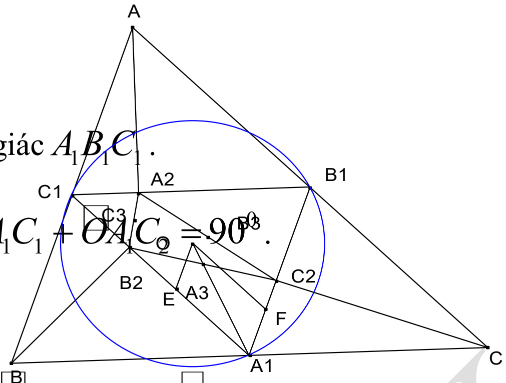
Chứng minh AM vu«ng gãc với B**D.**

Hướng dẫn giải

Câu 31. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XII]**

Kí hiệu A_1, B_1, C_1 là trung điểm các cạnh BC, CA, AB của tam giác nhọn AB***C.*** A_2, B_2, C_2 là hình chiếu của A, B, C trên B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Trung điểm các đoạn A_2B_2, C_2A_2, A_2B_2 là A_3, B_3, C_3. Chứng minh các đường thẳng A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 đồng quy.

Hướng dẫn giải



Cách 1: Gọi (*O*) là đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$.

Ta có: $\widehat{B_1C_1A_1} = \widehat{BA_1C_1} = \widehat{C} = \widehat{A_1OC_2} \Rightarrow \widehat{BA_1C_1} + \widehat{OA_1C_2} = 90^0$.

Dựng hình bình hành OEA_1F có:

$$\frac{A_1E}{A_1F} = \frac{A_1E}{OE} = \frac{\sin\widehat{EOA_1}}{\sin\widehat{EA_1O}},\ \frac{A_1B_2}{A_1C_2} = \frac{A_1B.\cos\widehat{BA_1B_2}}{A_1C.\cos\widehat{CA_1C_2}} = \frac{\sin\widehat{EOA_1}}{\sin\widehat{EA_1O}}.$$

Do đó $EF // B_2C_2$.

Vì A_1O đi qua trung điểm *EF* nên đi qua trung điểm $B_2C_2 \Rightarrow A_1A_3$ đi qua *O*. Tương tự B_1B_3, C_1C_3 đi qua O.

Cách 2: Dùng định lí Ceva dạng sin.

Đặt $\alpha_1 = \widehat{B_2A_1A_3},\ \alpha_2 = \widehat{C_2A_1A_3}$, $S_{A_1B_2A_3} = \frac{1}{2}A_1B_2.A_1A_3\sin\alpha_1; S_{A_1C_2A_3} = \frac{1}{2}A_1C_2.A_1A_3\sin\alpha_2$

Lập tỉ số: $1 = \frac{A_1B_2}{A_1C_2}.\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \Rightarrow \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{A_1C_2}{A_1B_2}$.

$$A_1B_2 = \frac{a}{2}\cos C,\ A_1C_2 = \frac{a}{2}\cos B \Rightarrow \frac{A_1C_2}{A_1B_2} = \frac{\cos B}{\cos C}.$$

Tương tự: $\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \frac{B_1A_2}{B_1C_2} = \frac{\cos C}{\cos A}; \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \frac{C_1B_2}{C_1A_2} = \frac{\cos A}{\cos B}$

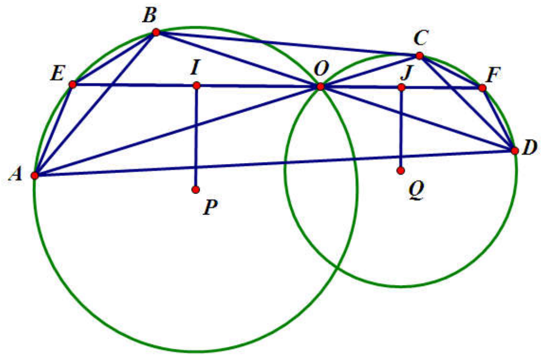
$\Rightarrow \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}.\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}.\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1 \Rightarrow A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3$ đồng quy.

Câu 32. **[CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG TRỊ ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÙNG DUYÊN HẢI BẮC BỘ LẦN THỨ VII – NĂM 2014]**

Cho tứ giác lồi ABCD có các đường chéo AC và BD cắt nhau tại O.

Gọi P, Q là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác AOB và tam giác CO**D.** Chứng minh rằng AB + CD ≤ 4.PQ

Hướng dẫn giải



* Đường phân giác góc $\widehat{AOB}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AOB tại E $\neq$ O.

Tứ giác AEBO nội tiếp => $\widehat{EAO}+\widehat{EBO}=180^0$

Nếu $\widehat{EAO}\geq 90^0>\widehat{AOE}$ thì EO > EA

Nếu $\widehat{EBO}\geq 90^0>\widehat{BOE}$ thì EO >EB = EA

Vậy ta luôn có EO > EA

* Đường phân giác góc $\widehat{COD}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác COD tại F $\neq$ O. Tương tự ta có FO > FD

*Gọi I, J là hình chiếu của P, Q lên đường thẳng EF ta có:

AB < AE + EB $\leq$ 2EO

CD < CF + FD $\leq$2FO

=> AB + CD < 2EF = 4IJ $\leq$ 4PQ

Câu 33. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN HẠ LONG** QUẢNG NINH **ĐỀ THI OLYMPIC TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ X MÔN: TOÁN - KHỐI: 11 Ngày thi: 01 tháng 08 năm 2014]**
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Đường tròn tâm I tiếp xúc với hai cạnh AC, BC lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với đường tròn tâm O tại điểm P. Một đường thẳng song song với AB và tiếp xúc với đường tròn tâm I tại điểm Q nằm trong tam giác AB**C.**

a) Gọi K, L lần lượt là giao điểm thứ hai của PE và PF với (O). Chứng minh rằng KL song song với EF.

b) Chứng minh rằng $\widehat{ACP}=\widehat{QCB}$.

Hướng dẫn giải

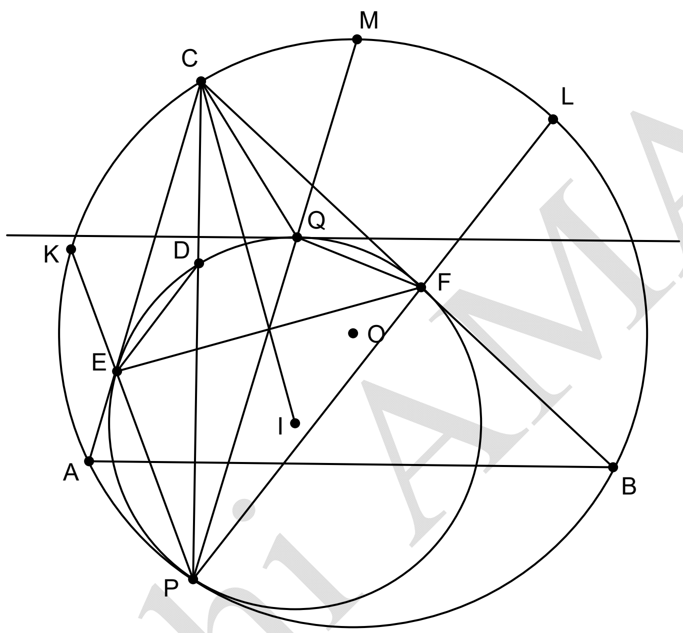
a. Xét phép vị tự $V_{(P;k)}$ tâm P biến đường tròn (I) thành đường tròn (O) nên biến điểm E thành điểm K và biến điểm F thành điểm L nên KL//EF.

b. Gọi D là giao điểm thức hai của đường thẳng PC với đường tròn tâm I, và M là giao điểm thứ hai của đường tròn tâm O với PQ.

Xét phép vị tự $V_{(P;k)}$ biến đường tròn tâm I thành đường tròn tâm O, ta có phép vị tự $V_{(P;k)}$ biến E, D, Q, F lần lượt thành K, C, M, L.

Do OK là ảnh của IE qua $V_{(P;k)}$, dẫn đến $OK // IE$ mà $IE \perp AC$ nên $OK \perp AC$, suy ra K là điểm chính giữa của cung A**C.**

Chứng minh tương tự ta có L là điểm chính giữa của cung BC, M là điểm chính giữa của cung A**B.**



Nếu $AC \le BC$ thì ta có

$$\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MA} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BL} + \overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{MK} + \overset{\frown}{KA}$$

$$\Leftrightarrow \overset{\frown}{LC} + \overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{MK} + \overset{\frown}{CK}$$

$$\Leftrightarrow 2\overset{\frown}{LM} + \overset{\frown}{MC} = \overset{\frown}{MC} + 2\overset{\frown}{CK}$$

$$\Leftrightarrow \overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{CK}$$

Trường hợp $AC > BC$ ta cũng chỉ ra được $\overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{CK}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{FQ}$ (tính chất phép vị tự).

$\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{QFC}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn hai cung bằng nhau) và DE = QF.

Lại có CE = CF theo tính chất của hai tiếp tuyến kẻ từ một điểm.

Suy ra $\Delta CED = \Delta CFQ$, dẫn đến $\widehat{ECD} = \widehat{FCQ}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Câu 34. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC GIANG ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC THPT VÙNG DUYÊN HẢI ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM HỌC 2012 – 2013]**

Cho tam giác *ABC***.** Đường tròn (I) tâm *I* nội tiếp tam giác *ABC*, tiếp xúc với *BC*, *CA*, *AB* lần lượt tại *P, Q, R*. Một đường tròn đi qua *B, C* tiếp xúc với (I) tại *X*. Một đường tròn đi qua *C, A* tiếp xúc với (I) tại *Y*. Một đường tròn đi qua *A, B* tiếp xúc với (I) tại *Z*. Chứng minh rằng các đường thẳng *PX, QY, RZ* đồng quy.

Hướng dẫn giải

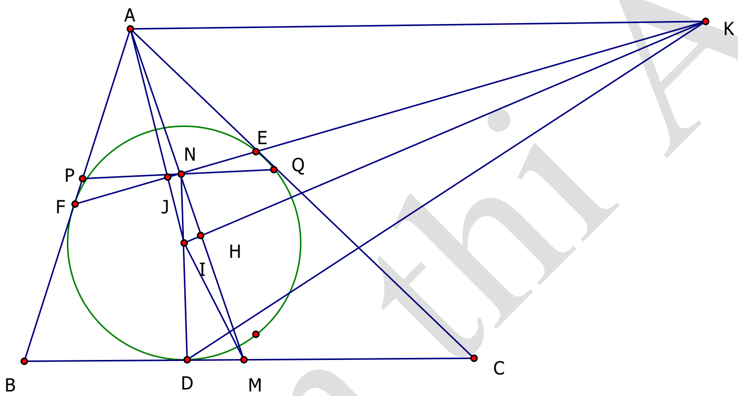
Câu 35. **[Ngân hàng đề Trường THPT Chuyên Hạ Long - Sở GD- ĐT Quảng Ninh]**

Giả sử đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự D, E, F. Đường thẳng qua A và song song với BC cắt EF tại K. Gọi M là trung điểm của B**C.** Chứng minh rằng: IM $\perp$ DK.

Hướng dẫn giải

Gọi N là giao điểm của ID và EF. Qua N kẻ đường thẳng // BC cắt AB, AC theo thứ tự từ P,Q.

Vì hai tứ giác IFPN và IQEN nội tiếp nên $\widehat{IFN} = \widehat{IPN}$



$\widehat{IEN} = \widehat{IQN}$ 1.0 đ

Mặt khác $\widehat{IEN} = \widehat{IFN} \Rightarrow \widehat{IPN} = \widehat{IQN}$. Do đó ΔIPQ cân tại I. Vậy N là trung điểm của PQ -> A, N, M thẳng hàng. 0.5 đ

Lại có $IN \perp AK, KN \perp AI$ -> N là trực tâm $\Delta AIK \Rightarrow AM \perp IK$ 0.5 đ

Gọi H là giao điểm của AM và IK

J là giao điểm của IA và EF

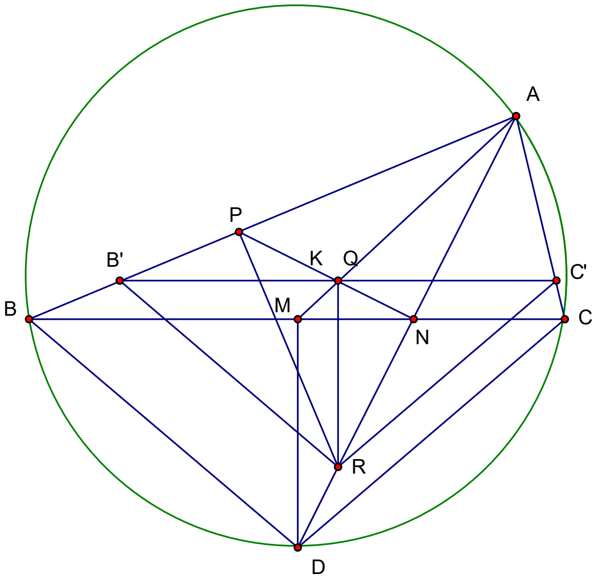
$\Rightarrow \overline{IH}.\overline{IK} = \overline{IJ}.\overline{IA} = IE^2 = ID^2 \Rightarrow \Delta IHD \sim \Delta IDK (c-g-c) \rightarrow \widehat{IDH} = \widehat{IKD}$ 1.0 đ

Mà $\square IHMD$ nội tiếp nên $\widehat{IDH} = \widehat{IMH} \Rightarrow \widehat{IKD} = \widehat{IMH} \Rightarrow IM \perp DK$ (Đpcm). 1.0đ

Câu 36. [TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XI-**TRƯỜNG THPT CHUYÊN TUYÊN QUANG -LỚP 11]**

Cho tam giác *ABC* với *AB* > *AC*. Các đường trung tuyến và phân giác trong góc *A* cắt *BC* tại *M* và *N* tương ứng. Đường thẳng qua *N* vuông góc với *AN* cắt *AB, AM* lần lượt tại *P* và *Q*; đường thẳng qua *P* vuông góc với *AB* cắt đường thẳng *AN* tại *R*. Chứng minh *QR* vuông góc với *BC*.

Hướng dẫn giải



Gọi *D* là giao điểm thứ hai của *AN* với đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*, dễ thấy $DB = DC$ suy ra *DM* vuông góc với *BC*.

Đặt $k = \dfrac{AR}{AD}$ và xét phép vị tự $V_A^k : B \mapsto B', C \mapsto C', D \mapsto R$. Khi đó *B'* thuộc *AB, C'* thuộc *AC* và hai tam giác *BCD* và *B'C'R* có các cạnh tương ứng song song.

Gọi *K* là giao điểm của *PN* với *B'C'*, ta có

$$\widehat{C'B'R} = \widehat{CBD} = \widehat{BAD} = 90^O - \widehat{ARP} = \widehat{RPN}$$

suy ra tứ giác *RKPB'* nội tiếp. Từ đó $\widehat{B'KR} = \widehat{B'PR} = 90^0$.

Như vậy $V_A^k : M \mapsto K$ nên *K* là trung điểm *B'C'*, hay *K* thuộc *AM*, suy ra *K* trùng *Q*. Do *B'C'* song song với *BC* mà *QR* vuông góc với *B'C'* nên *QR* vuông góc với *BC*.

Câu 37. [TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XI-**ĐỀ CHÍNH THỨC -LỚP 11**]

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE, CF cắt nhau tại H $(E \in AC, F \in AB)$. Đường thẳng EF cắt BC tại G. Lấy điểm T trên (O) sao cho $\widehat{ATH} = 90^\circ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác GTO cắt EF tại K $(K \neq G)$. Chứng minh rằng

a) Ba điểm G, T, A thẳng hàng.

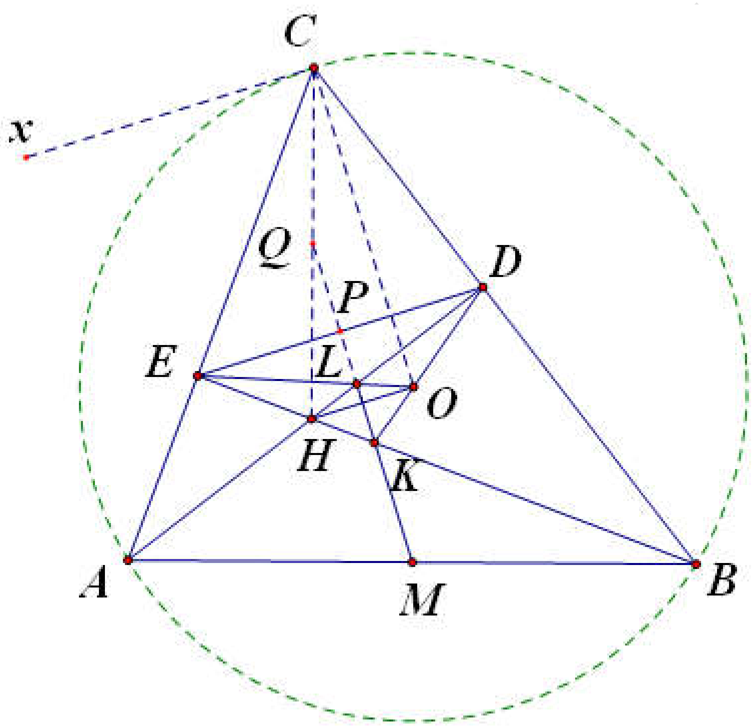
b) Đường thẳng OK vuông góc với đường thẳng AT.

Hướng dẫn giải

Câu 38. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÀO CAI ĐỀ THI ĐỀ XUẤT KỲ THI HSG VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ VII MÔN TOÁN: KHỐI 11 Năm học: 2013-2014]**

Cho tam giác nhọn ABC không cân. Gọi H, O lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; D, E lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh A, B của tam giác ABC. Các đường thẳng OD và BE cắt nhau tại K, các đường thẳng OE và AD cắt nhau tại L. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Chứng minh rằng ba điểm K, L, M thẳng hàng khi và chỉ khi bốn điểm C, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

Hướng dẫn giải



Áp dụng đinh lý Mê-nê-la-uýt cho tam giác HAB và ba điểm K, L, M ta có: K, L, M thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{\overline{KB}}{\overline{KH}}.\frac{\overline{LH}}{\overline{LA}}.\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=1 \Leftrightarrow \frac{\overline{KB}}{\overline{KH}}=-\frac{\overline{LA}}{\overline{LH}}$. (1)

Ta lại có $\frac{KB}{KH}=\frac{S_{BOD}}{S_{HOD}}$ (cùng cạnh đáy OD), $\frac{LA}{LH}=\frac{S_{AOE}}{S_{HOE}}$ (cùng cạnh đáy OE) và $S_{AOE}=S_{BOD}$.(Bởi vì $S_{AOE}=\frac{1}{2}AE.d(O,AE)=\frac{1}{2}c.\cos A.R.\cos B=\frac{1}{2}R.c.\cos A.\cos B$,

ở đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $c=AB$. Tương tự $S_{BOD}=\frac{1}{2}R.c.coA.\cos B$).

Từ các kết quả trên ta có (1) Û $S_{HOD} = S_{HOE}$ khi và chỉ khi *OH* // *DE* hoặc *OH* đi qua trung điểm *E**D*.

Bằng cách vẽ tiếp tuyến Cx của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* tại *C*, dễ dàng suy ra *DE* // Cx, suy ra *CO* vuông góc với *DE*.

Gọi *P, Q* lần lượt là trung điểm của *DE, H**C*. Dễ thấy tứ giác *CEHD* nội tiếp, suy ra *QP* vuông góc với *DE*. Suy ra *CO*//*QP*.

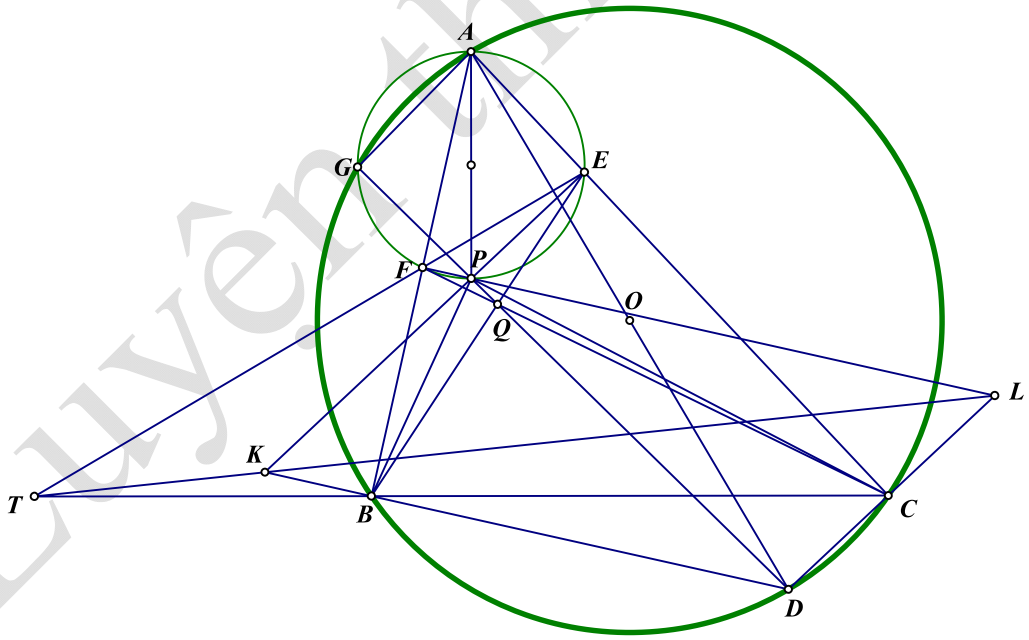
Nếu *HO* đi qua trung điểm *DE* suy ra *P* là trung điểm *HO*, suy ra *EHDO* là hình bình hành, suy ra *OD* // *EH* và *EO* // *H**D*. Điều này trái với giả thiết *OD* cắt *BE* cà *OE* cắt *A**D*.

Vậy (1) xảy ra khi và chỉ khi *OH* // *DE* khi và chỉ khi *CO* vuông góc với *OH* khi và chỉ khi *E, H, O, D* cùng nằm trên một đường tròn (vì ta luôn có tứ giác *CEHD* nội tiếp đường tròn đường kính *CH*).

Câu 39. [TRƯỜNG THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ VIII- NĂM 2015 MÔN TOÁN - LỚP 11]

Cho tam giác ABC nhọn không cân, nội tiếp đường tròn (O). P là điểm nằm trong tam giác sao cho $AP \perp BC$. Đường tròn đường kính AP cắt các cạnh AC, AB lần lượt tại E, F và cắt đường tròn (O) tại điểm G khác A. Chứng minh rằng GP, BE, CF đồng quy.

Hướng dẫn giải



Gọi *AD* là đường kính của (*O*), dễ thấy *G,P,D* thẳng hàng và $PE \parallel CD; PF \parallel BD$. Giả sử *PE,PF* cắt *DB,DC* tại *K,L*; *EF* cắt *BC* tại *T*.

Theo định lý Desargues để chứng minh *BE, CF, GP* (hay *PD*) đồng quy ta chỉ cần chứng minh *T,K,L* thẳng hàng.

Áp dụng định lý Menelaus ta được: $\frac{TB}{TC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=1\Rightarrow\frac{TB}{TC}=\frac{FB}{EC}.\frac{AE}{AF}$ (1)

Dễ thấy tứ giác $EFBC$ nội tiếp nên $\frac{AE}{AF}=\frac{BE}{CF}$ (2)

Cũng từ $EFBC$ nội tiếp suy ra $\angle FCL=\angle FCA+\angle ACL=\angle EBA+90^0=\angle EBA+\angle ABK=\angle KBE$

Tứ giác $PKDL$ là hình bình hành suy ra $\angle PKB=\angle PLC$.

Suy ra $\Delta EBK \sim \Delta FCL\Rightarrow\frac{BE}{CF}=\frac{KB}{CL}$ (3).

Ta có $BF.PL=CE.PK=S_{PKDL}\Rightarrow\frac{BF}{CE}=\frac{PK}{PL}=\frac{DL}{DK}$ (4)

Thay (2), (3), (4) vào (1) ta được $\frac{TB}{TC}=\frac{DL}{DK}.\frac{KB}{CL}\Rightarrow\frac{TB}{TC}.\frac{LC}{LD}.\frac{KD}{KB}=1$. Từ đó áp dụng định lý menelaus cho tam giác DBC ta suy ra T,K,L thẳng hàng. Bài toán được chứng minh.

Câu 40. [TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẢO LỘC- **LÂM ĐỒNG- KỲ THI HSG KHU VỰC DH VÀ ĐBBB LẦN THỨ 9 ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN: TOÁN; LỚP: 11]**

Cho tứ giác ABCD nội tiếp có các cặp cạnh đối không song song. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại điểm E và các đường chéo AC và BD cắt nhau tại F. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác AFD và BFC cắt nhau tại điểm thứ hai K. Chứng minh rằng hai đường thẳng EK và FK vuông góc.

Hướng dẫn giải

▪ Gọi G là giao điểm của AD và BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABC**D.**

Ta dùng kí hiệu (ABC), (ABCD) tương ứng để chỉ đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, tứ giác ABC**D.**

Ta có AD, BC, FK lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (ABCD) và (ADF), (ABCD) và (BCF), (ADF) và (BCF) nên AD, BC, FK đồng quy tại G hay F, K, G thẳng hàng.

▪ Không mất tổng quát ta giả sử F nằm giữa K và G.

Ta có $\widehat{DKC}=(180^0-\widehat{DKF})+(180^0-\widehat{CKF})=\widehat{DAF}+\widehat{CBF}=\frac{1}{2}\widehat{DOC}+\frac{1}{2}\widehat{DOC}=\widehat{DOC}$

(ta có thể dùng góc định hướng cho mọi trường hợp).

Suy ra các điểm D, C, K, O cùng thuộc một đường tròn ta gọi là (C_1).

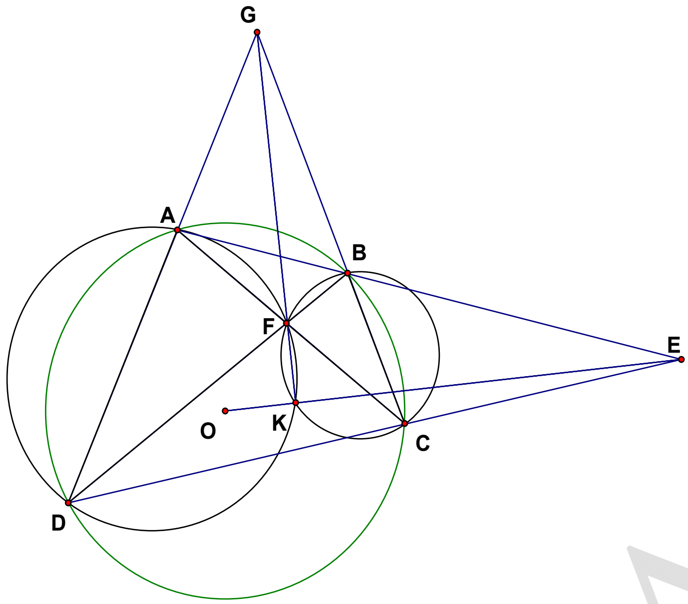
▪ Tương tự, các điểm A, B, K, O cùng thuộc một đường tròn ta gọi là (C_2).

Ta có AB, CD, OK lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (ABCD) và (C_2), (ABCD) và (C_1), (C_1) và (C_2) nên AB, CD, OK đồng quy tại E hay O, K, E thẳng hàng.

▪ Xét cực và đối cực đối với đường tròn (O), ta có GF là đối cực của E

nên GF vuông góc với OE

Mà G, K, F thẳng hàng; O, K, E thẳng hàng nên EK và FK vuông góc (điều phải chứng minh).



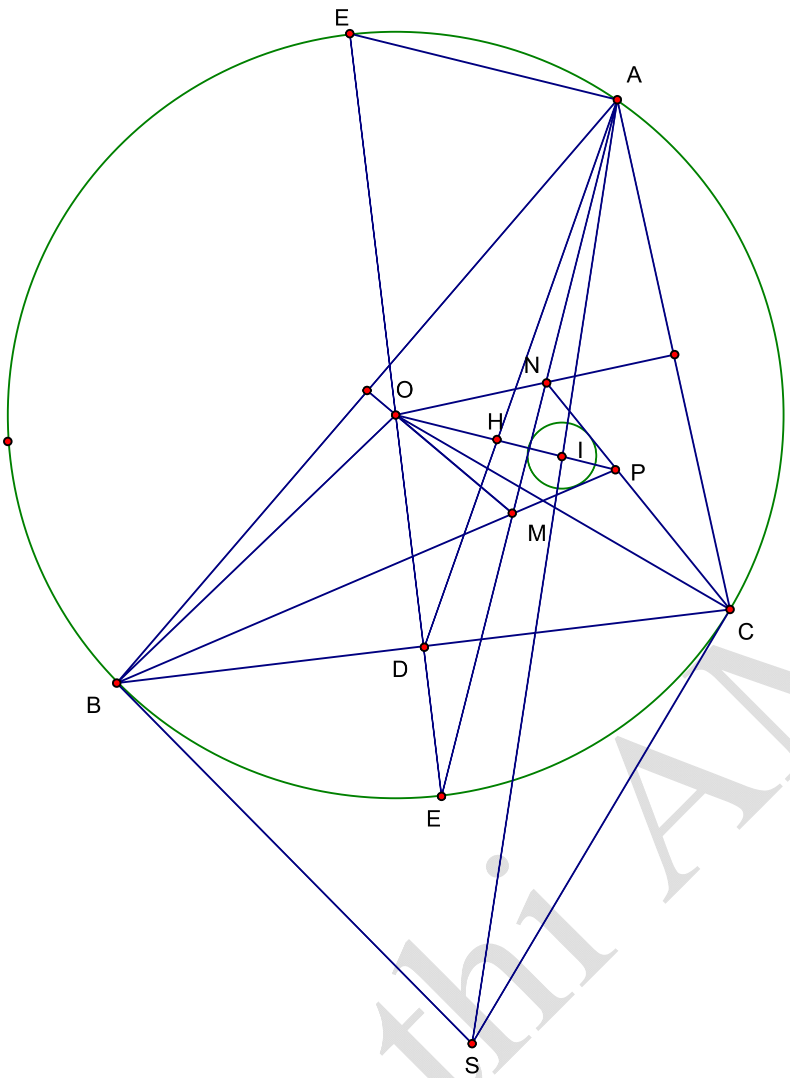
Câu 41. **[KỲ THI HỌC SINH GIỎI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ IX, NĂM HỌC 2015 – 2016 ĐỀ THI MÔN TOÁN – KHỐI 11]**

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau tại S. Gọi d là đường thẳng chứa phân giác trong góc A của tam giác ABC. Các đường trung trực của các đoạn thẳng AB, AC cắt d lần lượt tại M và N. Gọi P là giao điểm của BM và CN, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP, H là trực tâm của tam giác OMN.

a. Chứng minh H, I đối xứng với nhau qua d.

b. Chứng minh A, I, S thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



+) Chứng minh OP là trung trực của MN

Không mất tính tổng quát ta giả sử bài toán có vị trí tương đối như hình vẽ.

Gọi D là trung điểm của BC, E là giao điểm (khác A) của d với (O), F là trung điểm của MN.

Vì hai tam giác MAB và NAC cân nên dễ thấy:

$$\widehat{PMN} = \widehat{PNM}, \widehat{OMN} = \widehat{ONM}$$

Suy ra, tam giác PMN cân tại P và tam giác OMN cân tại O. Vậy OP là trung trực của MN.

+) Chứng minh I, H đối xứng với nhau qua d

Ta có:

$$\widehat{\mathrm{IMF}} = \frac{1}{2}\widehat{BME} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}, \widehat{HMF} = \widehat{HON} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{\mathrm{IMF}} = \widehat{HMF}.$$

Vậy hai điểm I và H đối xứng với nhau qua d.

+) Chứng minh AD, AS đối xứng với nhau qua AE

Gọi EK là đường kính của (O).

Ta có (DSEK) = - 1 nên A (DSEK) = -1 mà AE và AK vuông góc với

nhau suy ra AE là phân giác góc SA**D.**

Vậy AD, AS đối xứng với nhau qua AE.

+) Dựa vào tính chất của phép đối xứng trục d ta thấy A, I, S thẳng hàng khi và chỉ khi A, H, D thẳng hàng. Ta dùng Melenauyt với tam giác OEF để chứng minh điều này.

$$\frac{HO}{HF}=\frac{FO}{FH}-1=\frac{MF\cot\frac{A}{2}}{MF\tan\frac{A}{2}}-1=\frac{\cos A}{\sin^2\frac{A}{2}};\quad \frac{DE}{DO}=\frac{R(1-\cos A)}{R\cos A}=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{\cos A}$$

$$\Rightarrow \frac{HO}{HF}.\frac{DE}{DO}.\frac{AF}{AE}=1.$$

Ta có điều phải chứng minh

Câu 42. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN BIÊN HÒA** HỘI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ]

Cho tam giác ABC với H là trực tâm tam giác, O là tâm đường tròn ngoại tiếp và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC, E là điểm đối xứng của B qua CA, F là điểm đối xứng của C qua A**B.** Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi OH = 2R.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm tam giác AB**C.** A', B', C' lần lượt là trung điểm BC, CA, A**B.** Gọi I, J,K là tam giác nhận, A, B, C là trung điểm các cạnh JK, KI, IJ. Do đó G là trọng tâm tam giác IJK.

Từ cách dựng suy ra *HA, HB, HC* lần lượt là đường trung trực của *JK, KI, IJ.* Do đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *IJK có bán kính 2R.*

Gọi D', E', F' là hình chiếu vuông góc của O lên các đường *JK, KI, IJ.* Do G là trọng tâm hai tam giác trên nên:

Xét V(G; -1/2) biến A, B, C, I, J, K thành $A', B', C', A, B, C.$

Có A' là trung điểm BC nên $OA' \perp BC$, $OD' \perp JK$; suy ra $OD' \perp BC$. Vậy O, A', D' thẳng hàng. Do đó $A'D'$ vuông góc với B**C.**

Suy ra $A'D'$ // AD và $A'D = \frac{1}{2}AD \to \widehat{GAD} = \widehat{GA'D'} \to \Delta GAD = \Delta GA'D'$

$$\to \widehat{AGD} = \widehat{A'GD'} \to \widehat{AGD} + \widehat{AGD'} = \widehat{A'GD'} + \widehat{AGD'} = 180^0$$

Vậy D, G, D' Thẳng hàng và $V(G; -\frac{1}{2})$ biến D thành D'.