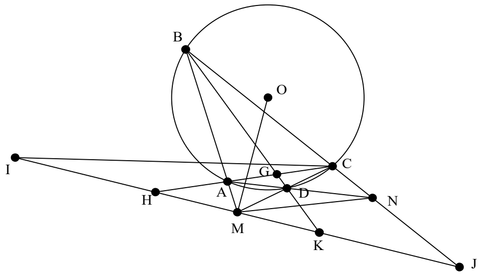
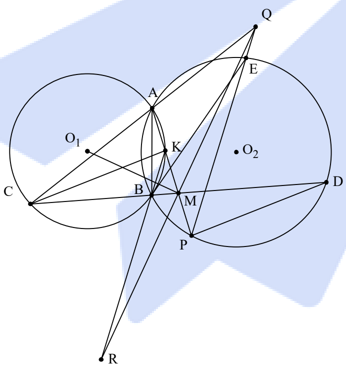


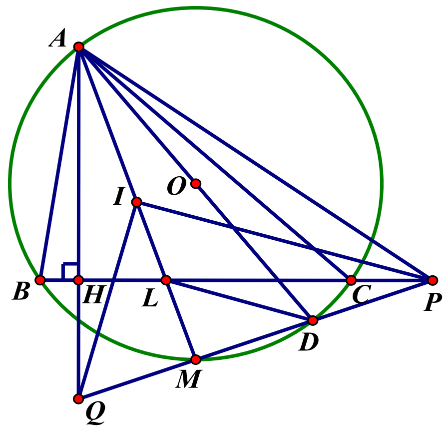
Gọi N là giao điểm của AD và BC; G là giao điểm của AC và BD.
Dựng hai tiếp tuyến NP, NQ của (O) (P, Q là các tiếp điểm).
PQ cắt BC, AD tại Z và T.
Ta có: $(NZCB) = (NTDA) = -1$ nên ZT, CD, AB đồng quy tại M.
$(NZCB) = (NTAD) = -1$ nên ZT, CA, BD đồng quy tại G
Do đó P, Q, Z, T, G, M thẳng hàng.
Theo định lý Brocard, O là trực tâm tam giác GMN nên NG // d (1)
Ta có, $(NTDA) = -1$ nên $G(NTDA) = -1$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra M là trung điểm của HK.
Ta có, $ABCDMN$ là tứ giác toàn phần nên (XGDB) = -1
$\Rightarrow N$(XGDB) = -1 (3).
Từ (1) và (3) suy ra M là trung điểm của IJ.
Trở lại bài toán:



Gọi K = AM $\cap$ (O_1); R = BK $\cap$ d
Ta có CK // PD và M là trung điểm của CD nên $CKDP$ là hình bình hành. Suy ra M là trung điểm của PK.
Theo bổ đề, ta có: M là trung điểm của QR nên $KRPQ$ là hình bình hành. Do đó, RK // PQ.

Gọi E là giao điểm của PQ và (O_2).
Ta có: $\widehat{QPK} = \widehat{PKB}$; $\widehat{QPK} = \widehat{ABE}$ nên $\widehat{PKB} = \widehat{ABE}$
Suy ra $\widehat{BAK} = \widehat{EBK}$ hay BE là tiếp tuyến của (O_1) nên E cố định.
Vậy PQ luôn đi qua điểm E cố định.

Câu 26. [TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN TỈNH ĐIỆN BIÊN NĂM 2016]
Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AH và tâm đường tròn nội tiếp là I. Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ BC của (O) và D là điểm đối xứng với A qua O. Đường thẳng MD cắt các đường thẳng BC, AH theo thứ tự tại P và Q.
a. Chứng minh rằng tam giác IPQ vuông.
b. Đường thẳng DI cắt (O) tại điểm E khác D. Hai đường thẳng AE và BC cắt nhau tại điểm F. Chứng minh rằng nếu $AB + AC = 2BC$ thì I là trọng tâm của tam giác APF.
Hướng dẫn giải



Các hình vẽ sau cho trường hợp $AB < AC$.
a. (3 điểm)

Ta có: $\angle OAC = 90^0 - \dfrac{1}{2}\angle AOC$

$= 90^0 - \angle ABC = \angle BHA$

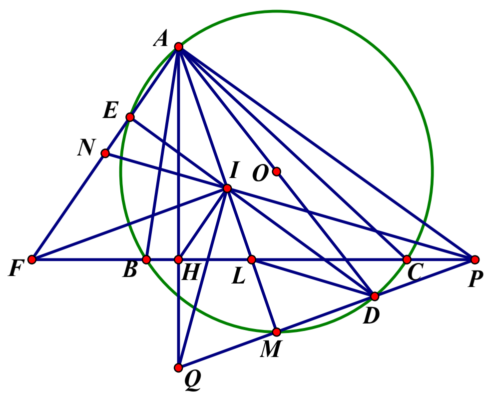
và AI là phân giác $\angle BAC$ nên

$\angle HAI = \angle OAI.$

Suy ra ΔAQD cân tại $A \Rightarrow MQ = MD$ (1).
Gọi L là giao điểm AM và BC.
Khi đó $\angle LPD = 90^0 - \angle HQP$
$= 90^0 - \angle ADM = \angle LAD.$
Do đó tứ giác $ALDP$ nội tiếp được
$\Rightarrow MD.MP = ML.MA$ (2).

Ta có $\Delta MLC \sim \Delta MCA$ $(g-g)$ nên $\dfrac{ML}{MC} = \dfrac{MC}{MA} \Rightarrow MC^2 = ML.MA$ (3). Lại có $\angle MIC = \angle MCI = \dfrac{A+C}{2}$ nên

ΔMIC cân tại $M \Rightarrow MC = MI$ (4).
Từ (1), (2), (3), (4) ta có: $MI^2 = MC^2 = ML.MA = MD.MP = MQ.MP.$ Suy ra tam giác IPQ vuông tại I.



b. (2 điểm)
Từ câu a. ta suy ra $HIPQ$ nội tiếp
$\Rightarrow \angle IHP = \angle IQP = \angle IDM = \angle EAM$
do đó tứ giác $AIHF$ nội tiếp
$\Rightarrow \angle AIF = \angle AHF = 90^0$.
Gọi N là trung điểm của đoạn FA.
Khi đó $\angle NIA = \angle NAI = \angle EDM$
$= \angle IQP = \angle MIP$

nên *N, I, P* thẳng hàng.

Theo tính chất phân giác và giả thiết thì

$$\frac{IA}{IL}=\frac{BA}{BL}=BA:\frac{AB.BC}{AB+AC}=BA:\frac{AB.BC}{2BC}=2.$$

Áp dụng định lý Menelauyt cho tam giác *AFL* với cát tuyến *NIP* ta có

$$\frac{AN}{NF}.\frac{FP}{PL}.\frac{LI}{IA}=1\Leftrightarrow 1.\frac{FP}{PL}.\frac{1}{2}=1\Rightarrow L \text{ là trung điểm của } PF.$$

Từ đó suy ra *I* là trọng tâm của tam giác *APF*.

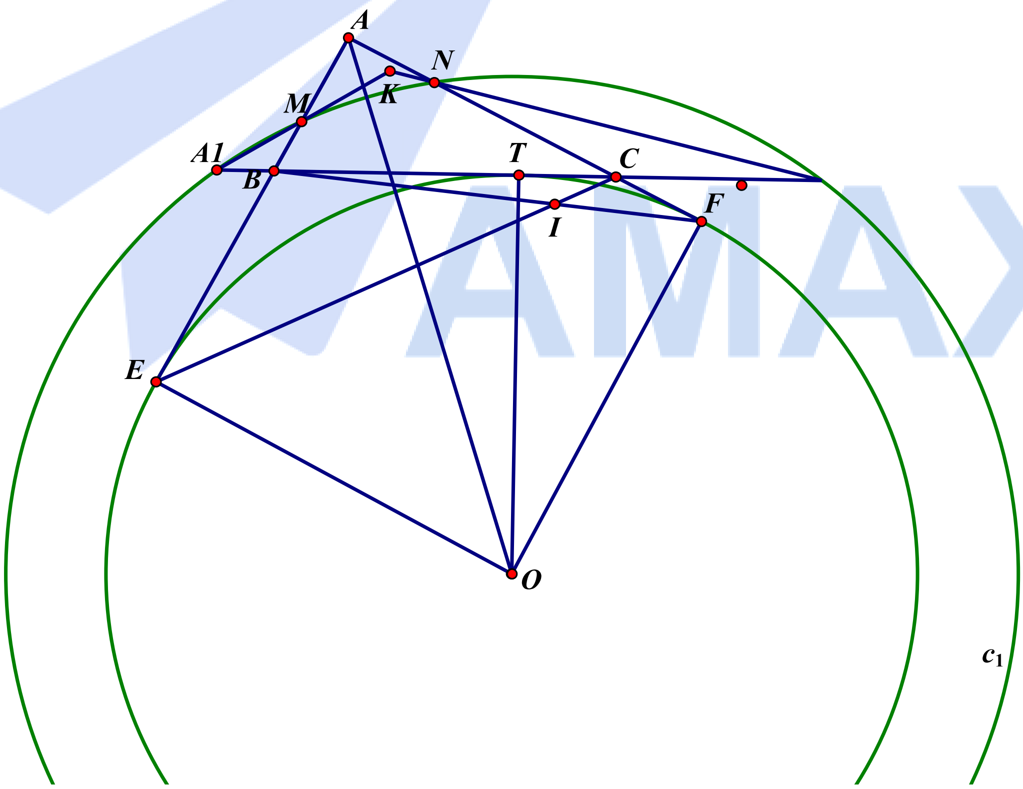
Câu 27. [TRƯỜNG THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ TỈNH HÒA BÌNH TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XII]

Cho tam giác ABC, đường tròn tâm O bàng tiếp góc A tiếp xúc với cạnh BC, CA, AB lần lượt tại T, F, E. Hai đường thẳng BE, CF cắt nhau tại I

a) Chứng minh A, I, T thẳng hàng

b) Vẽ đường tròn tâm O khác đường tròn bàng tiếp góc A ở trên cắt đoạn AB,AC tại M, N; cắt đường thẳng BC tại A_1, A_2 với A_1 thuộc tia đối BC, A_2 thuộc tia đối CB. A_1M cắt A_2N tại K. Chứng minh rằng K nằm trên đường thẳng AI

Hướng dẫn giải



a) Cần chứng minh AT, BF,CE đồng quy. Áp dụng định lí Ceva với tam giác ABC

$\frac{TB}{TC}.\frac{FC}{FA}.\frac{EA}{EB}=1$ suy ra A,I,T thẳng hàng.

b) $A_1B=BM$, $A_2C=CN$

$+\ A_2N \cap AI = K_1 \Rightarrow \dfrac{AK_1}{AT} = \dfrac{AN}{AF}$

$+\ A_1M \cap AI = K_2 \Rightarrow \dfrac{AK_2}{AT} = \dfrac{AM}{AE}$

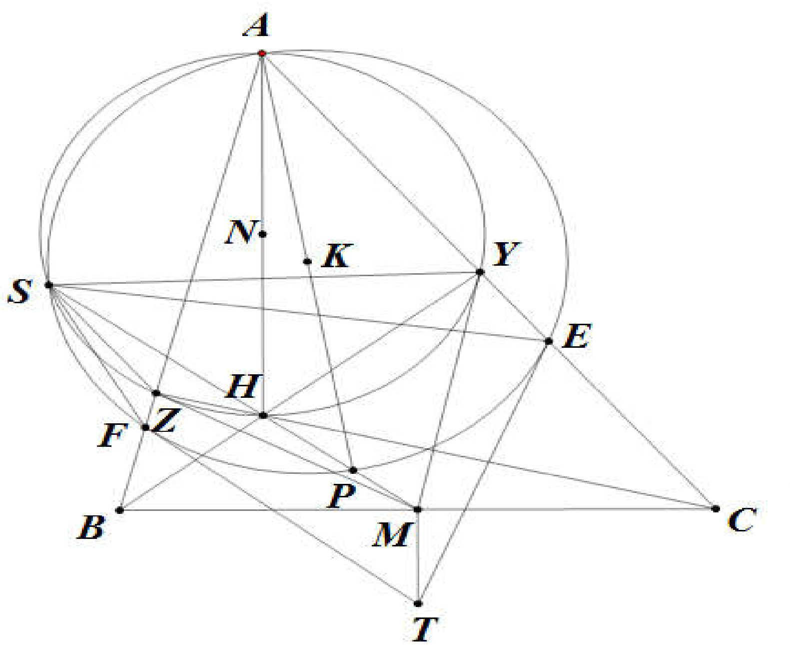
Cần chứng minh AM=AN

Ta có AO vuông góc với MN suy ra tam giác AMN cân dẫn đến AM=AN$\Rightarrow K_1 \equiv K_2$

Câu 28. [TRƯỜNG THPT CHUYÊNLƯƠNG VĂN TỤY KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM HỌC 2014 – 2015]

Cho tam giác ABC ($\widehat{BAC} \neq 90^0$) có H là trực tâm và M là trung điểm của BC. P là một điểm thuộc đường thẳng HM, đường tròn (K) đường kính AP cắt AC, AB lần lượt tại E, F khác A. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau trên trung trực BC.

Hướng dẫn giải



Gọi T là giao điểm của các tiếp tuyến với (K) tại E, F. Y, Z theo thứ tự là giao điểm của CH, BH và CA, AB. (N) là đường tròn đường kính AH, S là giao điểm thứ hai của (K) và (N). Có hai trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1. P trùng với H. Dễ thấy $E \equiv Y, F \equiv Z$. Do đó $T \equiv M$.

Trường hợp 2. P không trùng với H.

Dễ thấy các tam giác SEY, SFZ đồng dạng cùng hướng.

Do đó các tam giác SEF, SYZ đồng dạng cùng hướng (1).

Từ (1), chú ý rằng TE, TF tiếp xúc với (K) tại E,F và MY, MZ tiếp xúc với (N) tại Y, Z suy ra các tam giác TEF, MYZ đồng dạng cùng hướng (2).

Từ (1), (2) suy ra các tam giác STF, SMZ đồng dạng cùng hướng.

Do đó các tam giác STM, SFZ đồng dạng cùng hướng (3).

Dễ thấy: $\widehat{ASH} = 90^0 = \widehat{ASP}$. Do đó: SH=SP.

Kết hợp với P thuộc HM suy ra SM=SH(4).

Từ (3), (4) suy ra:

$(TM, AH) \equiv (TM, FZ) + (FZ, AH)$

$\equiv (SM, SZ) + (AZ, AH) (\bmod \pi)$

$\equiv (SH, SZ) + (SZ, SH) \equiv 0 (\bmod \pi)$

Vậy $TM \parallel AH \perp BC$.

Nói cách khác, tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau trên trung trực BC.

Câu 29. [TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI TỈNH HẢI DƯƠNG NĂM 2015]

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O và có AC vuông góc với BD tại điểm H. Gọi I, J, K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA, gọi M, N, P, Q tương ứng là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

a) Chứng minh rằng tám điểm I, J, K, L, M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn có tâm là trung điểm của đoạn thẳng OH.

b) Chứng minh rằng giao điểm của IK và JL nằm trên đường thẳng OH.

Hướng dẫn giải

ước hết ta chứng minh H, I, P thẳng hàng. Thật vậy, $\widehat{AHI} = 90^0 - \widehat{IAH} = 90^0 - \widehat{HDC} = \widehat{HCD} = \widehat{PHC}$ (vì HP là trung tuyến của tam giác vuông HCD)

ra I, H, P thẳng hàng. Tương tự cũng có J, H, Q thẳng hàng, K, H, M ng hàng, L, H, N thẳng hàng.

ràng I và K nằm trên đường tròn đường kính MP, J và L nằm trên đường n đường kính NQ. (1)

t khác, MNPQ là hình bình hành và MN song song AC, NP song song , AC vuông góc BD nên MN vuông góc NP, vì vậy MNPQ là hình chữ t. Do đó đường tròn đường kính MP cũng là đường tròn đường kính NQ

(1) và (2) suy ra I, J, K, L, M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn có n là trung điểm của MP và NQ, gọi tâm đó là T. Hơn nữa, OM song song (vì cùng vuông góc với AB), OP song song HM(vì cùng vuông góc với) nên OMHP là hình bình hành, do đó trung điểm T của MP cũng là ng điểm của OH.

y I, J, K, L, M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn có tâm là trung m của OH.

2 điểm) Ta sẽ dùng phép nghịch đảo để chứng minh phần này.

hiệu (T) là đường tròn được nêu trong phần (a).Ta có

$_{(T)} = \overline{HI}.\overline{HP} = \overline{HJ}.\overline{HQ} = \overline{HK}.\overline{HM} = \overline{HL}.\overline{HN} = k$ nên phép nghịch đảo cực H

rơng tích k biến I thành P, J thành Q, K thành M, L thành N.

xét hai trường hợp:

Nếu IK và JL đều không đi qua H: thế thì phép nghịch đảo nêu trên biến thành đường tròn (HPM), biến JL thành đường tròn (HQN). Gọi G là o điểm của IK và JL, phép nghịch đảo trên biến G thành G' thì G' thuộc hai đường tròn (HPM) và (HQN). Vậy đường thẳng HG' là trục đẳng rơng của hai đường tròn này.

có MNPQ là hình chữ nhật tâm T nên $\overline{TM}.\overline{TP} = \overline{TN}.\overline{TQ} \Rightarrow P_{T/(HPM)} = P_{T/(HQN)}$

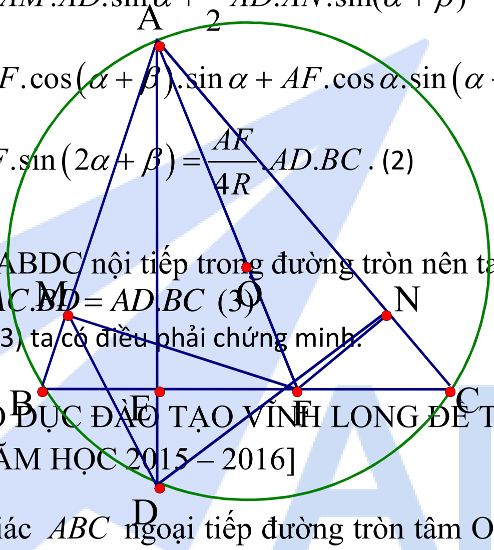
đó T thuộc trục đẳng phương HG'. Mà T là trung điểm của OH và H, G, hẳng hàng nên G nằm trên đường đẳng OH.(đpcm)

Nếu IK hoặc JL đi qua H: giả sử IK đi qua H, thế thì AB song song CD ABCD là hình thang nội tiếp đường tròn (O), do đó ABCD là hình thang . Khi đó I, H, O, K thẳng hàng nên giao điểm của IK và JL nằm trên ờng thẳng OH.(đpcm)

Câu 30. [SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VĨNH LONG ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÒNG TỈNH LỚP 11 NĂM HỌC 2014 – 2015]

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R, trên cạnh BC lấy các điểm E, F sao cho điểm E nằm giữa hai điểm B, F và $\widehat{BAE} = \widehat{CAF}$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của F trên các đường thẳng AB và AC, kéo dài AE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D. Chứng minh rằng tứ giác $AMDN$ và tam giác ABC có diện tích bằng nhau.

Hướng dẫn giải



Chứng minh rằng tứ giác AMDN và tam giác ABC có diện tích bằng nhau.

Đặt $\widehat{BAE}=\widehat{CAF}=\alpha, \widehat{EAF}=\beta$.

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AF.\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}AC.AF.\sin\alpha=\frac{AF}{4R}(AB.CD+AC.BD) \text{ (1)}$$

Diện tích tứ giác AMDN là

$$S_{AMDN}=\frac{1}{2}AM.AD.\sin\alpha+\frac{1}{2}AD.AN.\sin(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{1}{2}AD.\left[AF.\cos(\alpha+\beta).\sin\alpha+AF.\cos\alpha.\sin(\alpha+\beta)\right]$$

$$=\frac{1}{2}AD.AF.\sin(2\alpha+\beta)=\frac{AF}{4R}AD.BC. \text{ (2)}$$

Vì tứ giác ABDC nội tiếp trong đường tròn nên ta có:

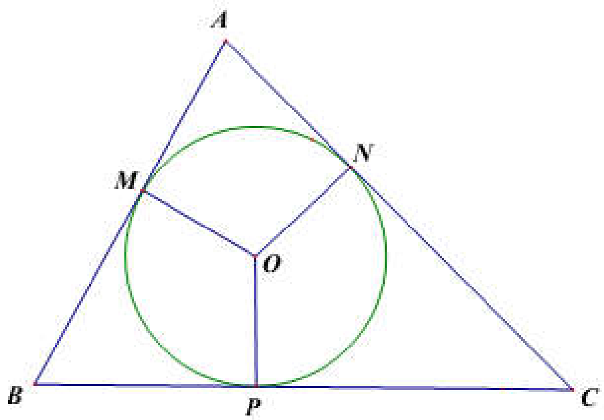
$AB.CD+AC.BD=AD.BC$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có điều phải chứng minh.

Câu 31. [SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VĨNH LONG ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÒNG TỈNH LỚP 11 NĂM HỌC 2015 – 2016]

Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm O. Chứng minh rằng $\frac{OA^2}{bc}+\frac{OB^2}{ca}+\frac{OC^2}{ab}=1$, với $a=BC, b=AC, c=AB$.

Hướng dẫn giải



Gọi M,N,P lần lượt là các tiếp điểm của (O) với AB, AC, BC.

Ta có $AM=AN$, $OM=ON$ nên

$$S_{AMON} = \frac{1}{2}AM^2.\sin A + \frac{1}{2}OM^2.\sin \widehat{MON}$$

$$= \frac{1}{2}\left(AM^2 + OM^2\right).\sin A = \frac{1}{2}.OA^2.\sin A$$

Tương tự: $S_{BPOM} = \frac{1}{2}.OB^2.\sin B$, $S_{CPON} = \frac{1}{2}.OC^2.\sin C$

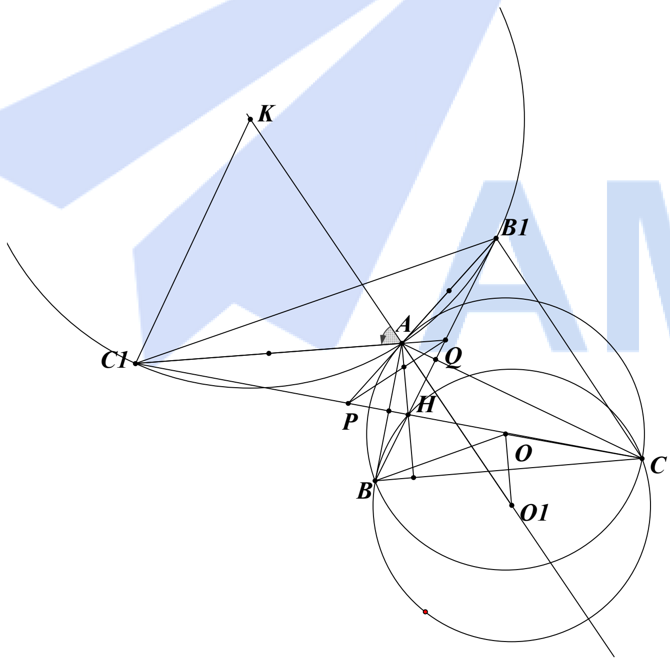
Khi đó:

$$\frac{OA^2}{bc} + \frac{OB^2}{ca} + \frac{OC^2}{ab} = \frac{OA^2.\sin A}{bc.\sin A} + \frac{OB^2.\sin B}{ca.\sin B} + \frac{OC^2.\sin C}{ab.\sin C}$$

$$= \frac{2\left(S_{AMON} + S_{BPOM} + S_{CPON}\right)}{2S_{ABC}} = \frac{2S_{ABC}}{2S_{ABC}} = 1$$

Câu 32. [TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH TỈNH YÊN BÁI NĂM 2015] . Cho tam giác ABC. Gọi B_1 là điểm đối xứng của B qua AC, C_1 là điểm đối xứng của C qua các đường thẳng AB, O_1 là điểm đối xứng của O qua BC. Chứng minh rằng: Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_1C_1 nằm trên đường thẳng AO_1.

Hướng dẫn giải



Gọi H là trực tâm ΔABC. Gọi AB_1, CH cắt nhau tại P, AC_1 và BH cắt nhau tại Q. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB_1C_1.

Dễ thấy O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC.

Tương tự ta Chứng minh được Q nằm trên trục đẳng phương của các đường tròn (O_1) và (K). Vì vậy, PQ vuông góc O_1K.

Lại có $\widehat{QC_1P} = \widehat{ABH} = \widehat{QB_1P}$ (cùng chắn cung AH của (w_2) nên PQB_1C_1 nội tiếp và tam giác AQP đồng dạng tam giác AC_1B_1.

Xét tứ giác B_1AHC. Ta có $\widehat{HCA} = 90^0 - \widehat{CAB} = \widehat{ABH} = \widehat{HB_1A}$. Vì vậy B_1AHC nội tiếp đường tròn (w_1).Tương tự C_1AHB nội tiếp đường tròn (w_2).

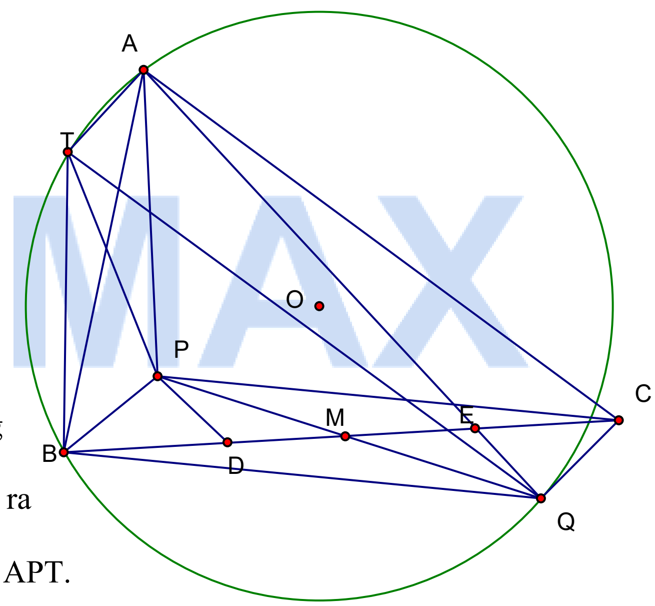
Trục đẳng phương của (K) và (w_1) là AB1, Trục đẳng phương của (O_1) và (w_1) là CH.
Nên P là tâm đẳng phương của (O_1), (K) và (w_1) và nó phải nằm trên trục đẳng phương của (O_1) và (K).

Ta lại có $\widehat{C_1AK} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{C_1KA} = 90^0 - \widehat{AB_1C_1} = 90^0 - \widehat{PQA}$ nên KA là đường vuông góc PQ.

Vậy KA và O_1K vuông góc PQ nên A, K, O_1 thẳng hàng.

Bài 1. Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. Giả sử D và E là các điểm trên cạnh BC. sao cho $BD = CE$ và D nằm giữa B và E. Giả sử P là điểm thuộc miền trong tam giác ABC sao cho $PD \parallel AE$ và $\angle PAB = EAC$. Chứng minh rằng: $\angle PBA = PCA$.

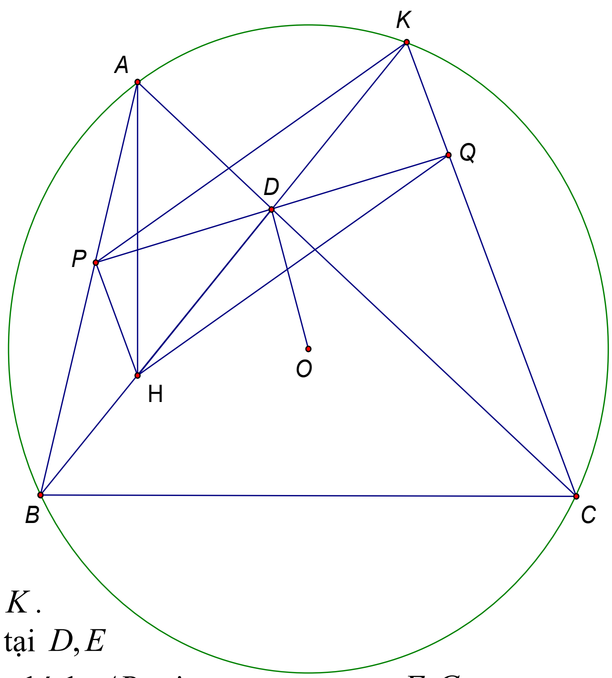
Hướng dẫn giải



Vẽ hình bình hành $BPCQ$, khi đó PQ và BC giao nhau tại trung điểm M của mỗi đường.
Do đó DE và PQ cũng giao nhau tại trung điểm M của mỗi đường suy ra PDQE là hình bình hành. Suy ra QE||PD từ đó A, E, Q thẳng hàng.
Vẽ hình bình hành BPAT. Khi đó ta cũng suy ra TACQ là hình bình hành.
Ta có ∠TQA=∠QAE=∠EAC=∠BAP=∠APT.
Do đó tứ giác TAQB nội tiếp.
Ta thấy qua phép tịnh tiến véc tơ $\overrightarrow{BP}$ thì tam giác BQT biến thành tam giác PCA.
Do đó ∠ACB=∠TQB=∠TAB=∠ABP (ĐPCM).

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O, $AB < BC$. D là chân đường cao xuất phát từ B và H là trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng qua D vuông góc với OD cắt cạnh AB tại P. Chứng minh rằng $\angle DHP = \angle BAC$.

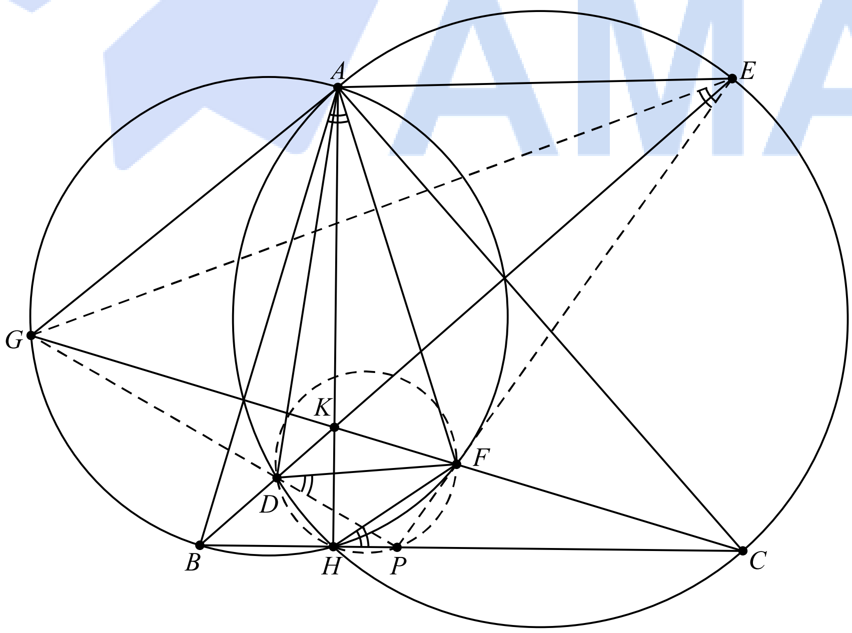
Hướng dẫn giải



Gọi K là giao điểm của BD và $(O), K \neq B$. Q là giao điểm của CK và PD.
Theo định lý con bướm, suy ra D là trung điểm của đoạn PQ.
Mặt khác D là trung điểm của HK, do đó tứ giác $PHQK$ là một hình bình hành. Suy ra $\angle DHP = \angle HKQ$.
Mà $\angle HKQ = \angle BAC$, do vậy $\angle DHP = \angle BAC$.

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH, trực tâm K.
Đường thẳng BK cắt đường tròn đường kính AC tại D, E $(BD < BE)$ Đường thẳng CK cắt đường tròn đường kính AB tại F, G $(CF < CG)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DHF cắt BC tại điểm thứ hai là P.
a) Chứng minh rằng các điểm G, H, P, E cùng thuộc một đường tròn.
b) Chứng minh rằng các đường thẳng BF, CD, PK đồng quy.

Hướng dẫn giải



a) Ta có $P_{K/(AGHF)} = \overrightarrow{KG}.\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KH} = P_{K/(ADHE)} = \overrightarrow{KD}.\overrightarrow{KE}$. Suy ra tứ giác $GDFE$ nội tiếp.
Dẫn đến $\widehat{GDF} + \widehat{GEF} = 180^0$ (1).
Từ giả thiết ta có AB, AC lần lượt là đường trung trực của GF, DE. Suy ra A là tâm của đường tròn $(GDFE)$. Suy ra $\widehat{GEF} = \frac{1}{2}\widehat{GAF} = \widehat{BAF}$ (2).

Ta có $\widehat{FDP}=\widehat{FHP}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{FP}$ của đường tròn (DHF)). Xét đường tròn đường kính AB ta có $\widehat{FHP}=\frac{1}{2}\left(\text{sd}\overset{\frown}{BH}+\text{sd}\overset{\frown}{HF}\right)=\frac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{BF}=\widehat{BAF}=\widehat{GEF}$ (do (2)).

Suy ra $\widehat{FDP}=\widehat{GEF}$ (3).

Từ (1) và (3) suy ra $\widehat{GDF}+\widehat{FDP}=180^0$. Suy ra G, D, P thẳng hàng.

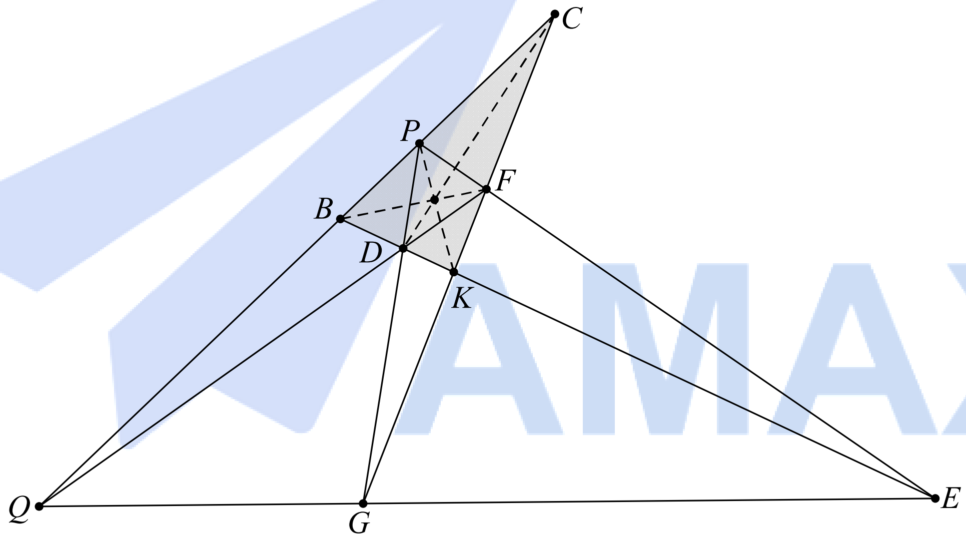
Tương tự E, F, P thẳng hàng.

Vì A là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{GAF}$ của đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AHG}=\widehat{AHF}$. Tương tự $\widehat{AHE}=\widehat{AHD}$. Suy ra

$$\widehat{GHE}=\widehat{AHG}+\widehat{AHE}=\widehat{AHF}+\widehat{AHD}=\widehat{DHF}=\widehat{DPF}=\widehat{GPE}.$$

Suy ra các điểm G, H, P, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Nhận thấy rằng, ba đường tròn ($GDFE$), ($DHPF$), ($GHPE$) có 3 trục đẳng phương DF, GE, HP đồng quy (tại Q). Từ đó, *ta xét bài toán tổng quát như sau*: "Cho tam giác PGE. Điểm Q thuộc tia đối của tia GE. Đường thẳng đi qua Q cắt cạnh PG, PE lần lượt tại D, F. Gọi K là giao điểm của GF và DE. Đường thẳng PQ cắt EK, GK lần lượt tại B, C. Chứng minh rằng các đường thẳng BF, CD, PK đồng quy".



Xét tam giác CQG, ta có $(EDKB)=-1$ (hàng điểm điều hoà cơ bản).

Suy ra $\frac{EK}{EB}=\frac{DK}{DB}$ (*).Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác CBK với cát tuyến PFE ta có $\frac{PB}{PC}.\frac{FC}{FK}.\frac{EK}{EB}=1$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $\frac{PB}{PC}.\frac{FC}{FK}.\frac{DK}{DB}=1$. Áp dụng định lý Ceva cho tam giác CBK suy ra BF, CD, PK đồng quy.

Bài 4. Cho hình bình hành $ABCD$. Các điểm M,N nằm trên các cạnh BC,CD sao cho $\frac{MB}{MC}=\frac{NC}{2ND}$.

Gọi I,J lần lượt là giao điểm của BD với AM,AN. Chứng minh rằng diện tích tứ giác $IJMN$ bằng diện tích tam giác AIJ.

Hướng dẫn giải