Câu 30. Chọn B.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=4x^3-4(m-1)x$.

Hàm số đồng biến trên $(1;3) \Leftrightarrow y'\geq 0, \forall x\in(1;3) \Leftrightarrow g(x)=x^2+1\geq m, \forall x\in(1;3)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;3)$.

x	1		3
g'		+	0
g	2	$\nearrow$	10

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m\leq \min g(x) \Leftrightarrow m\leq 2$.

Câu 31. Chọn A.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=x^2-mx+2m$

Ta không xét trường hợp $y'\leq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ vì $a=1>0$

Hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3 $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa

$$|x_1-x_2|=3 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0 \Leftrightarrow m^2-8m>0\\ (x_1-x_2)^2=9 \Leftrightarrow S^2-4P=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>8 \text{ hay } m<0\\ m^2-8m=9\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1\\ m=9\end{array}\right.$$

Câu 32. Chọn B.

+) Điều kiện $\tan x\neq m$. Điều kiện cần để hàm số đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ là $m\notin(0;1)$

+) $y'=\dfrac{2-m}{\cos^2 x(\tan x-m)^2}$.

+) Ta thấy: $\dfrac{1}{\cos^2 x(\tan x-m)^2}>0 \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right); m\notin(0;1)$

+) Để hs đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y'>0\\ m\notin(0;1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+2>0\\ m\leq 0; m\geq 1\end{cases} \Leftrightarrow m\leq 0$ hoặc $1\leq m<2$

Câu 33. Chọn B.

Tập xác định $D=\mathbf{R}$, yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình $mx^2+14mx+14\leq 0, \forall x\geq 1$, tương đương với $g(x)=\dfrac{-14}{x^2+14x}\geq m$ (1)

Dễ dàng có được $g(x)$ là hàm tăng $\forall x\in[1;+\infty)$, suy ra $\min\limits_{x\geq 1} g(x)=g(1)=-\dfrac{14}{15}$

Kết luận: $(1) \Leftrightarrow \min\limits_{x\geq 1} g(x)\geq m \Leftrightarrow -\dfrac{14}{15}\geq m$

Câu 34. Chọn C.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=-4x^3+2(2m-3)x$.

Hàm số nghịch biến trên $(1;2) \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow m \le x^2 + \dfrac{3}{2} = g(x), \forall x \in (1;2)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;2)$. $g'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên

x	1		2
g'		$+$	0
g	$\dfrac{5}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{11}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \le \min g(x) \Leftrightarrow m \le \dfrac{5}{2}$. Vậy $p + q = 5 + 2 = 7$.

Câu 35. Chọn C.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$. Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2mx + 2m^2 - m - 2}{(x-m)^2} = \dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $g(x) \ge 0, \forall x \in D$.

Điều kiện tương đương là $\Delta_{g(x)} = -m^2 + m + 2 \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge 2 \end{array}\right.$

Kết luận: Có vô số giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 36. Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$. Ta có $y' = \dfrac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x-m)^2} = \dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g(x) \ge 0, \forall x > 1$ và $m \le 1$ (1)

Vì $\Delta_g{}' = 2(m+1)^2 \ge 0, \forall m$ nên (1) $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm thỏa $x_1 \le x_2 \le 1$

Điều kiện tương đương là $\begin{cases} 2g(1) = 2(m^2 - 6m + 1) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} = m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \le 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,2$.

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 37. Chọn B.

Điều kiện xác định: $\beta \ge 2$

Yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình $\dfrac{1}{2} \le \sin 2\alpha \le 1$

Kết luận: $\dfrac{\pi}{12} + k\pi \le \alpha \le \dfrac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ và $\beta \ge 2$.

Câu 38. Chọn C.

Tập xác định $D = \mathbf{R}$. Ta có: $y' = 2 + a\cos x - b\sin x$

Áp dụng bất đẳng thức Schwartz ta có $2 - \sqrt{a^2 + b^2} \le y' \le 2 + \sqrt{a^2 + b^2}$

Yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$$y' \ge 0, \forall x \Leftrightarrow 2 - \sqrt{a^2 + b^2} \ge 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \le 4.$$

Câu 39. Chọn C.

$(1) \Leftrightarrow m = x^3 - 3x^2 - 9x = f(x)$. Bảng biến thiên của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra pt có đúng 1 nghiệm khi $m < -27$ hoặc $m > 5$

Câu 40. Chọn B.

Đặt $t = \sqrt{x+1}, t \geq 0$. Phương trình thành: $2t = t^2 - 1 + m \Leftrightarrow m = -t^2 + 2t + 1$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 1, t \geq 0; f'(t) = -2t + 2$

Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Từ đó suy ra phương trình có nghiệm khi $m \leq 2$.

Câu 41. Chọn B

Đặt $t = f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$. Ta có $f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Xét $x > 0$ ta có bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó phương trình đã cho trở thành $m = t^2 + t - 5 \Leftrightarrow t^2 + t - 5 - m = 0$ (*1*).

Nếu phương trình (*1*) có nghiệm t_1, t_2 thì $t_1 + t_2 = -1$. (1) có nhiều nhất 1 nghiệm $t \geq 1$.

Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm dương khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $t \in \left(1; \sqrt{5}\right)$. Đặt $g(t) = t^2 + t - 5$. Ta đi tìm m để phương trình $g(t) = m$ có đúng 1 nghiệm $t \in \left(1; \sqrt{5}\right)$. Ta có $g'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in \left(1; \sqrt{5}\right)$.

Bảng biến thiên:

t	1		$\sqrt{5}$
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	-3	$\nearrow$	$\sqrt{5}$

Từ bảng biến thiên suy ra $-3 < m < \sqrt{5}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 42. Chọn C.

Bất phương trình $x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

Bất phương trình $mx^2+(m+1)x+m+1\geq 0$

$\Leftrightarrow m(x^2+x+1)\geq -x-2 \Leftrightarrow m\geq \dfrac{-x-2}{x^2+x+1}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{-x-2}{x^2+x+1}$ với $1\leq x\leq 2$. Có $f'(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}>0,\forall x\in[1;2]$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\geq \max\limits_{[1;2]} f(x) \Leftrightarrow m\geq -\dfrac{4}{7}$

Câu 43. Chọn B.

Đặt $t=\sqrt{\log_3^2 x+1}$. Điều kiện: $t\geq 1$.

Phương trình thành: $t^2+t-2m-2=0$ (*) . Khi $x\in\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]\Rightarrow t\in[1;2]$

(*) $\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{t^2+t-2}{2}=m$. Bảng biến thiên :

t	1		2
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	2

Từ bảng biến thiên ta có : $0\leq m\leq 2$

Câu 44. Chọn C

Điều kiện: $x\geq -\dfrac{1}{2}$

Phương trình $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1 \Leftrightarrow 3x^2+4x-1=mx$ (*)

Vì $x=0$ không là nghiệm nên (*) $\Leftrightarrow m=\dfrac{3x^2+4x-1}{x}$

Xét $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-1}{x}$. Ta có $f'(x)=\dfrac{3x^2+1}{x^2}>0\ \forall x\geq -\dfrac{1}{2};x\neq 0$

Bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm thì $m\geq \dfrac{9}{2}$.

Câu 45. Chọn D.

Điều kiện : $x\geq 1$

Pt $\Leftrightarrow 3\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}+m=2\dfrac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt[4]{(x+1)^2}} \Leftrightarrow 3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+m=2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$

$t=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ với $x\ge 1$ ta có $0\le t<1$. Thay vào phương trình ta được $m=2t-3t^2=f(t)$

Ta có: $f'(t)=2-6t$ ta có: $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	-1

Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm khi $0\le m<\dfrac{1}{3}$

Câu 46. Chọn D.

Đặt $t=\sqrt{(1+2x)(3-x)}$ khi $x\in\left[-\dfrac{1}{2};3\right]\Rightarrow t\in\left[0;\dfrac{7\sqrt{2}}{4}\right]$

Thay vào bất phương trình ta được $f(t)=t^2+t>m$

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{7\sqrt{2}}{4}$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{49+14\sqrt{2}}{8}$

Từ bảng biến thiên ta có : $m<0$

Câu 47. Chọn D.

Đặt $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}\Rightarrow t^2=4+2\sqrt{(1+x)(3-x)}\Leftrightarrow 2\sqrt{(1+x)(3-x)}=t^2-4$

Với $x\in[-1;3]\Rightarrow t\in[2;2\sqrt{2}]$. Thay vào bất phương trình ta được: $m\le -t^2+3t+4$

Xét hàm số $f(t)=-t^2+3t+4; f'(t)=-2t+3$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{3}{2}<2$

t	2		$2\sqrt{2}$
$f'(t)$		-	
$f(t)$	6	$\searrow$	$6\sqrt{2}-4$

Từ bảng biến thiên ta có $m\le 6\sqrt{2}-4$ thỏa đề bài

Câu 48. Chọn D.

Đặt $t=\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}>0 \Rightarrow t^2=\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}\right)^2=9+2\sqrt{(3+x)(6-x)}$

$\Rightarrow 9\le t^2=9+2\sqrt{(3+x)(6-x)}\le 9+(3+x)+(6-x)=18$

$\Rightarrow \sqrt{18+3x-x^2}=\sqrt{(3+x)(6-x)}=\frac{1}{2}\left(t^2-9\right); t\in\left[3;3\sqrt{2}\right]$

Xét $f(t)=-\frac{1}{2}t^2+t+\frac{9}{2}$; $f'(t)=1-t<0;\forall t\in\left[3;3\sqrt{2}\right]\Rightarrow \max\limits_{[3;3\sqrt{2}]} f(t)=f(3)=3$

ycbt $\Leftrightarrow \max\limits_{[3;3\sqrt{2}]} f(t)=3\le m^2-m+1 \Leftrightarrow m^2-m-2\ge 0 \Leftrightarrow m\le -1$ hoặc $m\ge 2$

Câu 49. Chọn B

Đặt $t=2^x>0$ thì $m.4^x+(m-1).2^{x+2}+m-1>0$, đúng $\forall x\in ¡$

$\Leftrightarrow m.t^2+4(m-1).t+(m-1)>0,\forall t>0 \Leftrightarrow m\left(t^2+4t+1\right)>4t+1,\forall t>0$

$\Leftrightarrow g(t)=\frac{4t+1}{t^2+4t+1}<m,\forall t>0$.

Ta có $g'(t)=\frac{-4t^2-2t}{\left(t^2+4t+1\right)^2}<0$ nên $g(t)$ nghịch biến trên $[0;+\infty)$

ycbt $\Leftrightarrow \max\limits_{t\ge 0} g(t)=g(0)=1\le m$

Câu 50. Chọn A.

Bpt $\Leftrightarrow 3mx<x^3-\frac{1}{x^3}+2,\forall x\ge 1 \Leftrightarrow 3m<x^2-\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x}=f(x),\forall x\ge 1$.

Ta có $f'(x)=2x+\frac{4}{x^5}-\frac{2}{x^2}\ge 2\sqrt{2x\left(\frac{4}{x^5}\right)}-\frac{2}{x^2}=\frac{4\sqrt{2}-2}{x^2}>0$ suy ra $f(x)$ tăng.

Ycbt $\Leftrightarrow f(x)>3m,\forall x\ge 1 \Leftrightarrow \min\limits_{x\ge 1} f(x)=f(1)=2>3m \Leftrightarrow \frac{2}{3}>m$

Câu 51. Chọn A.

$(1)\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\cos^2 x}+3\left(\frac{1}{9}\right)^{\cos^2 x}\ge m$. Đặt $t=\cos^2 x, 0\le t\le 1$

(1) trở thành $\left(\frac{2}{3}\right)^t+3\left(\frac{1}{9}\right)^t\ge m$ (2). Đặt $f(t)=\left(\frac{2}{3}\right)^t+3\left(\frac{1}{9}\right)^t$.

Ta có (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t\in[0;1]\Leftrightarrow m\le \operatorname{Max}\limits_{t\in[0;1]} f(t)\Leftrightarrow m\le 4$

Câu 52. Chọn C

Điều kiện: $-2\le x\le 4$. Xét $f(x)=\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}$ trên đoạn $[-2;4]$.

Có $f'(x)=\frac{3\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}}+\frac{1}{2\sqrt{4-x}}>0,\forall x\in(-2;4)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[-2;4]$, bpt $\Leftrightarrow f(x)\ge f(1)=2\sqrt{3}\Leftrightarrow x\ge 1$.

So với điều kiện, tập nghiệm của bpt là $S=[1;4]\Rightarrow a+b=5$.

Câu 53. Chọn A.

Điều kiện: $1\le x\le 3$; bpt $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2}+\sqrt{x-1}>\sqrt{(3-x)^2+2}+\sqrt{3-x}$

Xét $f(t)=\sqrt{t^2+2}+\sqrt{t}$ với $t\ge 0$. Có $f'(t)=\frac{t}{2\sqrt{t^2+2}}+\frac{1}{2\sqrt{t}}>0,\forall t>0$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$. (1)

$\Leftrightarrow f(x-1) > f(3-x) \Leftrightarrow x-1 > 3 \Leftrightarrow x > 2$

So với điều kiện, bpt có tập nghiệm là $S=(2;3]$.