Bổ đề 2: $\lim \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}}{n}=0$.

Đặt $x_n=n^2\sin\frac{1}{n}$. Áp dụng bổ đề 1: $\frac{1}{k}>\sin\frac{1}{k}>\frac{1}{k}-\frac{1}{6k^3}\Rightarrow k>x_k>k-\frac{1}{6k}$.

$\Rightarrow 1+2+...+n>a_n>1+2+...+n-\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)$.

Chia các vế cho n^2: $\frac{1}{2}>\frac{a_n}{n^2}>\frac{1}{2}-\dfrac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}{6n^2}$.

Cho $n\to\infty$, và lấy giới hạn, suy ra $\lim\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{2}$.

Bài 23. Cho dãy số $u_1=2, u_{n+1}=\dfrac{(n+1)^2}{u_n+1}\ \forall n\ge 1$. Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}$.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh quy nạp $\frac{n^2}{n+1}\le u_n\le n+1$, $\forall n\ge 1$.

Rõ ràng khẳng định đã đúng với u_1.

Giả sử đã có $\frac{k^2}{k+1}\le u_k\le k+1$, $k\ge 1$. Ta chứng minh $\frac{(k+1)^2}{k+2}\le u_{k+1}\le k+2$.

Thật vậy: $u_k\le k+1\Rightarrow u_{k+1}=\frac{(k+1)^2}{u_k+1}\ge\frac{(k+1)^2}{k+2}$.

$$u_k\ge\frac{k^2}{k+1}\Rightarrow u_{k+1}=\frac{(k+1)^2}{u_k+1}\le\frac{(k+1)^2}{\frac{k^2}{k+1}+1}=k+2-\frac{1}{k^2+k+1}\le k+2..$$

Vậy ta có $\frac{n^2}{n+1}\le u_n\le n+1$, $\forall n\ge 1\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=1$.

Bài 24. Cho $\alpha>2$ và dãy số (x_n) với: $\begin{cases}x_1=\alpha\\ 2x_{n+1}=\sqrt{3x_n^2+\frac{n+3}{n}}\end{cases}\ (n\in\mathbb{N}^*)$.

a) Chứng minh: $x_n>1$ với $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh $x_n > 1$ *với* $\forall n \in N^*$ *bằng quy nạp.*

Ta có: $x_1 = \alpha$ nên $x_1 > 1$.

Giả sử: $x_k > 1$ với $k \in N^*$.

Ta có: $3x_k^2 > 3$ và $\frac{n+1}{n} > 1$ nên $\sqrt{3x_n^2 + \frac{n+3}{n}} > 2$. Suyra: $x_{n+1} > 1$.

Vậy $x_n > 1$ với $\forall n \in N^*$.

Ta chứng minh (x_n) *là dãy giảm bằng quy nạp.*

Vì $\alpha > 2$ nên $\sqrt{3\alpha^2 + 4} < 2\alpha$. Ta có $x_2 < x_1$.

Giả sử: $x_{k+1} < x_k$. Ta có: $3x_{k+1}^2 < 3x_k^2$ và $f(n) = \frac{n+1}{n}$ là hàm nghịch biến nên:.

$3x_{k+1}^2 + \frac{k+4}{k+1} < 3x_k^2 + \frac{k+3}{k}$.

Suy ra: $x_{k+2} < x_{k+1}$. Vậy (x_n) là dãy giảm.

(x_n) lả dãy giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên hội tụ.

Đặt $\lim x_n = \alpha$. Ta có $2\alpha = \sqrt{3\alpha^2 + 1} \Leftrightarrow \alpha = 1.(x_n)\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{3x_n + 4}{x_n + 1} \end{cases}(n \in N^*)(u_n) u_n = x_{2n-1}(n \in N^*)$

.

Vậy $\lim x_n = 1$.

Bài 25. Cho dãy số (u_n) được xác định: $\begin{cases} u_1 = 2011 \\ 2^n u_{n+1} = |2^n u_n - 1|, n \in N^* \end{cases}$.

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

Ta có $2^n u_{n+1} = |2^n.u_n - 1| \Leftrightarrow u_{n+1} = \left|u_n - \frac{1}{2^n}\right|$.

Chứng minh : $u_n > 2^{1-n}$ (bằng quy nạp).

*với $n = 1$ ta có $u_1 = 2011 > 2^0$.

*Giả sử $u_k > 2^{1-k}$ (với $k > 1$).

*Cần chứng minh : $u_{k+1} > 2^{-k}$.

Ta có $u_{k+1}=\left|u_k-2^{-k}\right|>\left|2^{1-k}-2^{-k}\right|=2^{-k}$. Suy ra điều phải chứng minh.

Từ đó ta có $u_n-2^{-n}>0$ với mọi n $\Rightarrow u_{n+1}=u_n-\frac{1}{2^n}$.

Ta có $u_2=u_1-\frac{1}{2}$; $u_3=u_2-\frac{1}{2^2}$; $u_4=u_3-\frac{1}{2^3};...;u_n=u_{n-1}-\frac{1}{2^{n-1}}$.

$\Rightarrow u_n=u_1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

Công thức tổng quát : $u_n=2011-\frac{1}{2}.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\frac{1}{2}}=2011-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Vậy $\lim u_n=2010$.

Bài 26. Cho số thực $a\in(0;1)$, xét dãy số (u_n) với: $\begin{cases}u_1=a\\ u_{n+1}=\frac{1}{2014}u_n^2+\frac{2013}{2014}\sqrt{u_n},\forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$.

a) Chứng minh rằng: $0<u_n<1,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

a) Chứng minh: $0<u_n<1,\forall n\in\mathbb{N}^*\,(1)$.

$n=1:u_1=a\in(0;1)\Rightarrow(1)$ đúng với n=1.

Giả sử $0<u_k<1$ với $\forall k\geq 1,k\in\mathbb{N}$. Ta có: $0<u_k^2<1\Rightarrow 0<\frac{1}{2014}u_k^2<\frac{1}{2014}$.

$0<\sqrt{u_k}<1\Rightarrow 0<\frac{2013}{2014}\sqrt{u_k}<\frac{2013}{2014}$.

$\Rightarrow 0<\frac{1}{2014}u_k^2+\frac{2013}{2014}\sqrt{u_k}<1\Rightarrow 0<u_{k+1}<1$.

Vậy: $0<u_n<1,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Ta chứng minh: (u_n) là dãy tăng.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2014}u_n^2+\frac{2013}{2014}\sqrt{u_n}-u_n=\frac{1}{2014}\left[\left(u_n-\sqrt{u_n}\right)\left(u_n+\sqrt{u_n}-2013\right)\right]>0$.

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ hay (u_n) là dãy tăng.(2).

Từ (1),(2) suy ra (u_n) có giới hạn hữu hạn.Giả sử (u_n) có giới hạn là $a, (o < a \le 1)$.

Ta có: $a = \frac{1}{2014}a^2 + \frac{2013}{2014}\sqrt{a} \Leftrightarrow a = 1$. Vậy $\lim u_n = 1$.

Bài 27. Cho dãy số(u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n^3 - \frac{2}{3}, \quad \forall n \in N^* \end{cases}$.

a) Chứng minh rằng: $-1 < u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

a) Với: $n = 1 : u_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow (1)$ đúng với n=1.

Giả sử: $-1 < u_k < 2$ với $\forall k \ge 1, k \in \mathbb{N}$.

Ta có: $u_{k+1} - 2 = \frac{1}{3}u_k^3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}(u_k - 2)(u_k^2 + 2u_k + 4) < 0 \Rightarrow u_{k+1} < 2$.

$u_{k+1} + 1 = \frac{1}{3}(u_k^3 + 1) > 0 \Rightarrow u_{k+1} > -1$.

$\Rightarrow -1 < u_{k+1} < 2$. Vậy: $-1 < u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(u_n + 1)^2(u_n - 2) < 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ hay (u_n) là dãy giảm (2).

Từ (1),(2) suy ra (u_n) có giới hạn hữu hạn.

Gọi a là giới hạn của $(u_n), -1 \le a < 2$.

Ta có $a = \frac{1}{3}a^3 - \frac{2}{3} \Leftrightarrow a = 1$. Vậy $\lim u_n = -1$.

Bài 28. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 1; u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2015} + u_n, n \in N^*$. Tìm giới hạn sau:

$$\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \ldots + \frac{u_n}{u_{n+1}}\right).$$

Hướng dẫn giải

Từ đề bài ta có: $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2}{2015}$. Suy ra: $\frac{u_n}{u_{n+1}}=2015\left(\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}\right)$.

Ta có: $\frac{u_1}{u_2}+\frac{u_2}{u_3}+...+\frac{u_k}{u_{k+1}}=2015\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_{k+1}}\right)=2015\left(1-\frac{1}{u_{k+1}}\right)$.

Ta có (u_n) là dãy đơn điệu tăng và $u_1=1$.

Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$ thì $\alpha=\frac{\alpha^2}{2015}+\alpha\Rightarrow\alpha=0$.

(vô lí vì (u_n) là dãy đơn điệu tăng và $u_1=1$).

Suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

Kết luận: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1}{u_2}+\frac{u_2}{u_3}+...+\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)=2015$.

Bài 29. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=2013 \\ u_n{}^2-2u_n.u_{n+1}+2013=0 \end{cases}\left(n\in N^*\right)$. Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn và tính giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

Từ hệ thức truy hồi suy ra $2u_n.u_{n+1}=u_n{}^2+2013$.

Bằng quy nạp chứng minh được $u_n>0$, với mọi n.

Do đó ta có:.

$$u_n=\frac{u_{n-1}{}^2+2013}{2u_{n-1}}=\frac{1}{2}\left(u_{n-1}+\frac{2013}{u_{n-1}}\right)\geq\sqrt{u_n.\frac{2013}{u_n}}=\sqrt{2013},\forall n\geq 1.$$

Mặt khác ta có :.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{u_n{}^2+2013}{2u_n{}^2}=\frac{1}{2}+\frac{2013}{2u_n{}^2}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

(u_n) là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi $\sqrt{2013}$, do đó (u_n) có giới hạn hữu hạn.

Đặt $\lim u_n=a$.

Ta có : $a=\frac{a^2+2013}{2a}\Rightarrow a=\sqrt{2013}$. Vậy $\lim u_n=\sqrt{2013}$.

Bài 30. Cho dãy số (x_n) xác định bởi: $x_1=4, x_{n+1}=\frac{x_n^4+9}{x_n^3-x_n+6}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$;.

b) Với mỗi số nguyên dương n, đặt $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k^3+3}$. Tính $\lim y_n$.

Hướng dẫn giải

a) Xét $x_{n+1} - 3 = \dfrac{x_n^4+9}{x_n^3 - x_n + 6} = \dfrac{(x_n-3)(x_n^3+3)}{(x_n^3+3)-(x_n-3)}$ (*).

Bằng quy nạp chứng minh được $x_n > 3, \forall n \ge 1$.

□ Xét $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n^4+9}{x_n^3-x_n+6} - x_n = \dfrac{x_n^2 - 6x_n + 9}{x_n^3 - x_n + 6}$.

$\Rightarrow x_{n+1} - x_n = \dfrac{(x_n-3)^2}{x_n^3 - x_n + 6} > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó (x_n) là dãy tăng và $4 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots$.

□ Giả sử (x_n) bị chặn trên $\Rightarrow \lim x_n = a$.

Do đó: $a = \dfrac{a^4+9}{a^3 - a + 6} \Rightarrow a = 3 < 4$ (vô lý). Suy ra (x_n) không bị chặn trên. Vậy $\lim x_n = +\infty$.

b) Từ (*), suy ra: $\dfrac{1}{x_{n+1}-3} = \dfrac{1}{x_n - 3} - \dfrac{1}{x_n^3+3} \Rightarrow \dfrac{1}{x_n^3+3} = \dfrac{1}{x_n-3} - \dfrac{1}{x_{n+1}-3}$.

Suy ra: $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k^3+3} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{x_k - 3} - \dfrac{1}{x_{k+1}-3} \right) = 1 - \dfrac{1}{x_{n+1}-3}$.

Vậy $\lim y_n = \lim \left(1 - \dfrac{1}{x_{n+1}-3} \right) = 1$.

Bài 31. Cho dãy số $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^{2015}}{2015} + x_n \end{cases}$. Tìm giới hạn của dãy số u_n với $u_n = \dfrac{x_1^{2014}}{x_2} + \dfrac{x_2^{2014}}{x_3} + \dots + \dfrac{x_n^{2014}}{x_{n+1}}$.

Hướng dẫn giải

$x_{n+1} = \dfrac{x_n^{2015}}{2015} + x_n \Leftrightarrow x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n^{2015}}{2015} \Leftrightarrow \dfrac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}x_n} = \dfrac{x_n^{2015}}{2015 x_{n+1} x_n}$

.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{x_n^{2014}}{2015x_{n+1}} \Leftrightarrow 2015\left(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}\right)=\frac{x_n^{2014}}{x_{n+1}}$$

.

Từ đó $u_n=2015\left(1-\frac{1}{x_{n+1}}\right)$.

□ Dễ thấy (x_n) là dãy tăng và $1=x_1<x_2<x_3<\ldots$.

□ Giả sử (x_n) bị chặn trên $\Rightarrow \lim x_n=a$.

Do đó: $a=\frac{a^{2015}}{2015}+a \Rightarrow a=0<1$ (vô lý). Suy ra (x_n) không bị chặn trên. Vậy $\lim x_n=+\infty$.

Vậy $\lim u_n=\lim 2015\left(1-\frac{1}{x_{n+1}}\right)=2015$.

Bài 32. Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $\begin{cases} x_1=1 \\ x_{n+1}=x_n+\frac{x_n^2}{2015} \end{cases}$. Tìm giới hạn của dãy (S_n) với $S_n=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_n}{x_{n+1}}$.

Hướng dẫn giải

$$x_{n+1}=x_n+\frac{x_n^2}{2015} \Leftrightarrow 2015(x_{n+1}-x_n)=x_n^2 \Leftrightarrow 2015\frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}x_n}=\frac{x_n^2}{x_{n+1}x_n} \Leftrightarrow \frac{x_n}{x_{n+1}}=2015\left(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}\right)..$$

Suy ra: $S_n=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_n}{x_{n+1}}=2015\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{n+1}}\right)=2015\left(1-\frac{1}{x_{n+1}}\right)$.

□ Dễ thấy (x_n) là dãy tăng và $1=x_1<x_2<x_3<\ldots$.

□ Giả sử (x_n) bị chặn trên $\Rightarrow \lim x_n=a$.

Do đó: $a=\frac{a^2}{2015}+a \Rightarrow a=0<1$ (vô lý). Suy ra (x_n) không bị chặn trên. Vậy $\lim x_n=+\infty$.

Vậy $\lim S_n=\lim 2015\left(1-\frac{1}{x_{n+1}}\right)=2015$.

Bài 33. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $\begin{cases} x_1=1 \\ x_{n+1}=\sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1} \end{cases}$. Đặt $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k+2}$.

Tìm $\lim S_n$.

Hướng dẫn giải

$x_{n+1}=\sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1}=\sqrt{(x_n{}^2+3x_n)(x_n{}^2+3x_n+2)+1}=x_n^2+3x_n+1$.

Ta có $\frac{1}{x_n+2}=\frac{1}{x_n+1}-\frac{1}{x_{n+1}+1}\Rightarrow S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k+2}=\frac{1}{x_1+1}-\frac{1}{x_{n+1}+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{x_{n+1}+1}$.

Dễ thấy: $x_{n+1}-x_n=(x_n+1)^2>0,\forall n\in N^*$ suy ra (x_n) là dãy tăng và $1=x_1<x_2<x_3<\ldots$.

□ Giả sử (x_n) bị chặn trên $\Rightarrow \lim x_n=a$.

Do đó: $a=a^2+3a+1\Rightarrow a=-1<1$ (vô lý). Suy ra (x_n) không bị chặn trên. Vậy $\lim x_n=+\infty$.

Vậy $\lim S_n=\lim\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x_{n+1}+1}\right)=\frac{1}{2}$.

Bài 34. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases}u_1=\frac{2016}{2015}\\ 2u_{n+1}=u_n^2+2u_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$. Đặt $S_n=\frac{1}{u_1+2}+\frac{1}{u_2+2}+\ldots+\frac{1}{u_n+2}$ Tính: $\lim S_n$.

Hướng dẫn giải

$2u_{n+1}=u_n(u_n+2)\Leftrightarrow u_{n+1}=\frac{u_n(u_n+2)}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}}=\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_n+2}\Leftrightarrow \frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}$.

$\Rightarrow S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u_k+2}=\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_{n+1}}=\frac{2015}{2016}-\frac{1}{u_{n+1}}$.

Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được $u_n>0,\forall n\in N^*$.

Khi đó: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}u_n{}^2>0,\forall n\in N^*$ suy ra (u_n) là dãy tăng và $\frac{2016}{2015}=u_1<u_2<u_3<\ldots$.

□ Giả sử (u_n) bị chặn trên $\Rightarrow \lim u_n=a$.

Do đó: $2a=a^2+2a\Rightarrow a=0<\frac{2016}{2015}$ (vô lý). Suy ra (u_n) không bị chặn trên.

Vậy $\lim u_n=+\infty$.

Vậy $\lim S_n=\lim\left(\frac{2015}{2016}-\frac{1}{u_{n+1}}\right)=\frac{2015}{2016}$.

Bài 35. Cho dãy số (x_n) xác định bởi: $x_1=4, x_{n+1}=\frac{x_n^4+9}{x_n^3-x_n+6},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$;.

b) Với mỗi số nguyên dương n, đặt $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^3+3}$. Tính $\lim y_n$.

Hướng dẫn giải

a) Xét $x_{n+1} - 3 = \frac{x_n^4+9}{x_n^3 - x_n + 6} = \frac{(x_n-3)(x_n^3+3)}{(x_n^3+3)-(x_n-3)}$ $(*)$.

Bằng quy nạp chứng minh được $x_n > 3, \forall n \geq 1$.

□ Xét $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^4+9}{x_n^3 - x_n + 6} - x_n = \frac{x_n^2 - 6x_n + 9}{x_n^3 - x_n + 6}$.

$\Rightarrow x_{n+1} - x_n = \frac{(x_n-3)^2}{x_n^3 - x_n + 6} > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó (x_n) là dãy tăng và $4 = x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$.

□ Giả sử (x_n) bị chặn trên $\Rightarrow \lim x_n = a$.

Do đó: $a = \frac{a^4+9}{a^3 - a + 6} \Rightarrow a = 3 < 4$ (vô lý). Suy ra (x_n) không bị chặn trên. Vậy $\lim x_n = +\infty$.

b) Từ (*), suy ra: $\frac{1}{x_{n+1}-3} = \frac{1}{x_n-3} - \frac{1}{x_n^3+3} \Rightarrow \frac{1}{x_n^3+3} = \frac{1}{x_n-3} - \frac{1}{x_{n+1}-3}$.

Suy ra: $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^3+3} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{x_k-3} - \frac{1}{x_{k+1}-3}\right) = 1 - \frac{1}{x_{n+1}-3}$.

Vậy $\lim y_n = \lim\left(1 - \frac{1}{x_{n+1}-3}\right) = 1$.