Từ giả thiết ta có $S_{n+1}u_{n+1}+u_n \le S_n u_n + u_{n-1}, n=2,3,\ldots$.

Từ đây ta thu được $S_n u_n + u_{n-1} \le S_2 u_2 + u_1, n=2,3,\ldots$.

Do đó $u_n + \dfrac{u_{n-1}}{S_n} \le \dfrac{S_2 u_2 + u_1}{S_n} \Rightarrow 0 < u_n < \dfrac{S_2 u_2 + u_1}{S_n}, n=2,3,\ldots$.

Theo nguyên lí kẹp ta có $\lim u_n = 0$.

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có $\lim u_n = 0$.

Bài 15. Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức truy hồi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} - \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = x + \dfrac{1}{x} - \sqrt{2}; g(x) = f(f(x)) - x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x} - \sqrt{2}} - 2\sqrt{2}$. Khi đó.

$$g'(x) = \frac{-2\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x^2+1\right)}{x^4\left(x + \dfrac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2} \le 0 \Rightarrow g(x) < g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \Rightarrow f(f(x)) < x, \forall x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}};1\right) \ (*)..$$

Mặt khác $f'(x) < 0, \forall x \in \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};1\right)$ nên.

$$f(x) < f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f(f(x)) > f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \forall x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}};1\right) \ (**)..$$

Từ (*) và (**) suy ra: $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < f(f(x)) < x, \forall x \in \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};1\right)$..

Vậy: $1 = u_1 > u_3 > \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 = u_1 > u_3 > u_5 > \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \ldots$ Do đó (u_{2n-1}) là đơn điệu giảm và bị chặn dưới nên tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$..

Vì $f(x)$ liên tục trên $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}};1\right]$ nên.

$$u_{2n} = f(u_{2n-1}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_{2n} = f\left(\lim_{n\to\infty} u_{2n-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}..$$

Vậy dãy (u_n) được phân tích thành hai dãy con hội tụ tới cùng một giới hạn. Do đó dãy (u_n) có giới hạn bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$..

Bài 16. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây:.

1. $f(x+y)\le f(x)+f(y)$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$.

2. $f(x)\le e^x-1$ với mỗi $x\in\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

$f(x+0)\le f(x)+f(0)\Rightarrow f(0)\ge 0$ và bởi vì $f(0)\le e^0-1=0$ nên $f(0)=0$.

$f(x+(-x))\le f(x)+f(-x)\Rightarrow f(x)+f(-x)\ge 0$ (1).

$$f(x)\le f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{2}\right)\le 2\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right).$$

$$f(x)\le 2\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\Rightarrow f(x)\le f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{2}\right)\le 4\left(e^{\frac{x}{4}}-1\right).$$

Dùng quy nạp theo $n=1,2,\ldots$ ta CM được $f(x)\le 2\left(e^{\frac{x}{2^n}}-1\right)$.

Cố định $x_0\in\mathbb{R}$ ta có $f(x_0)\le 2^n\left(e^{\frac{x_0}{2^n}}-1\right)$.

Xét dãy $a_n=2^n\left(e^{\frac{x_0}{2^n}}-1\right)$ ta có : $\lim a_n=\lim\left[\frac{e^{\frac{x_0}{2^n}}-1}{\frac{x_0}{2^n}}x_0\right]=x_0$.

Vậy $f(x_0)\le x_0,\forall x_0\in\mathbb{R}$ (2).

Vậy $f(x)+f(-x)\le x+(-x)=0$ (3).

Kết hợp (1) và (3) ta được $f(x)+f(-x)=0$.

Từ (2) $\Rightarrow f(-x)\le -x\Rightarrow f(x)\ge x$ (4). Kết hợp (2) và (4) ta được $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$.

Thử lại $f(x)=x$ ta thấy đúng.

Bài 17. Cho dãy số (x_n) được xác định như sau $\begin{cases} x_1=1, \\ x_{n+1}=x_n+\dfrac{\sqrt[3]{x_n}}{n^2}\ \forall n\ge 1\end{cases}$. Chứng minh rằng (x_n) có giới hạn hữu hạn khi n dần đến vô cùng.

Hướng dẫn giải

Dễ thấy $x_n > 0$, với mọi n nguyên dương, nên dãy số đã cho là dãy tăng thực sự.

Vậy để chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn ta chỉ cần chứng minh nó bị chặn trên.

Ta chứng minh $x_n < 8, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Thật vậy, với $n = 1 \Rightarrow x_1 = 1 < 8$ nên điều cần chứng minh đúng.

Giả sử ta có: $x_n < 8$, với n nguyên dương. Ta cần chứng minh $x_{n+1} < 8$.

Theo công thức xác định dãy số có: $x_{n+1} = x_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[3]{x_k}}{k^2} < 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + 2.2 < 8$.

Do đó $x_n < 8$ với mọi n nguyên dương từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 18. Cho dãy số thực (a_n) xác định bởi $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{4}; a_2 = \frac{3}{10} \\ a_n = \frac{1}{2} + \frac{a_n}{6} + \frac{a_{n-1}^2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn. Hãy tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

Có $a_1, a_2 \in (0;1)$, giả sử $a_1, a_2, ..., a_k \in (0;1), k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Từ công thức truy hồi ta có:.

$\frac{1}{2} + 0 + 0 \leq a_{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{a_k}{6} + \frac{a_{k-1}^2}{3} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1$, vì $0 \leq a_{k-1}, a_k \leq 1 \Rightarrow a_{k+1} \in (0;1)$.

Vậy bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $a_n \in (0;1), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Xét hai dãy số mới $(x_n): \begin{cases} x_1 = x_2 = \frac{1}{4} \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{x_n}{6} + \frac{x_{n-1}^2}{3} \end{cases}$ và $(y_n): \begin{cases} y_1 = y_2 = \frac{3}{10} \\ y_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{y_n}{6} + \frac{y_{n-1}^2}{3} \end{cases}$ với $\forall n \in \mathbb{N}; n \geq 2$.

Có $0 < x_1 \leq x_2 < \frac{1}{2} < x_3 < 1$, giả sử ta có $0 < x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_k < 1, k \in \mathbb{N}, k \geq 3$, khi đó.

$x_k = \frac{1}{2} + \frac{x_{k-1}}{6} + \frac{x_{k-2}^2}{3} \leq \frac{1}{2} + \frac{x_k}{6} + \frac{x_{k-1}^2}{3} = x_{k+1}$.

Vậy bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được (x_n) là dãy số tăng và bị chặn trên bởi 1, nên nó có giới hạn hữu hạn $\lim x_n = \alpha$.

Chuyển công thức truy hồi qua giới hạn tìm được $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{6} + \frac{\alpha^2}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{3}{2} \\ \alpha = 1 \end{array}\right.$.

Do $(x_n) \subset (0;1)$ nên suy ra $\alpha = 1$.

Chứng minh tương tự đối với dãy số (y_n), ta cũng có $\lim y_n = 1$.

Cuối cùng ta chứng minh $x_n \le a_n \le y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1) bằng phương pháp quy nạp:.

Ta có $x_1 = a_1 < y_1$ và $a_2 < x_2 = y_2$, với n = 1, 2 bất đẳng thức (1) đúng. Giả sử (1) đúng tới $k \in \mathbb{N}, k \ge 2$, tức là $x_i \le a_i \le y_i, \forall i = 1, 2, ..., k$. Khi đó.

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{x_k}{6} + \frac{x_{k-1}^2}{3} \le a_{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{a_k}{6} + \frac{a_{k-1}^2}{3} \le \frac{1}{2} + \frac{y_k}{6} + \frac{y_{k-1}^2}{3} = y_{k+1}.$$

Từ $x_n \le a_n \le y_n, n \in \mathbb{N}, n \ge 1$ và áp dụng định lý kẹp ta suy ra được $\lim a_n = 1$.

Bài 19. Cho hai dãy số $(a_n);(b_n)$ xác định bởi $a_1 = 3, b_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n^2$ và $b_{n+1} = 2a_n b_n$ với n = 1, 2, 3,…. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2^n]{b_n}$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2^n]{a_1 a_2 ... a_n}$.

Hướng dẫn giải

Với mọi n = 1,2,3,… ta có.

$$a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = a_n^2 + 2b_n^2 + 2\sqrt{2}a_n b_n = \left(a_n + b_n\sqrt{2}\right)^2.$$

Do đó:.

$$a_n + b_n\sqrt{2} = \left(a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{2}\right)^2 = \left(a_{n-2} + b_{n-2}\sqrt{2}\right)^{2^2} = ... = \left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}} = \left(\sqrt{2} + 1\right)^{2^n}.$$

Tương tự ta có: $a_n - b_n\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2^n}$.

Từ đó: $a_n = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right); b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right)$.

Chú ý: $\sqrt[2^n]{\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}}{4\sqrt{2}}} < \sqrt[2^n]{b_n} < \sqrt[2^n]{a_n} < \sqrt{2} + 1$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}}{4\sqrt{2}}} = \sqrt{2} + 1$, nên theo nguyên lí kẹp ta có: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{a_n} = \sqrt{2} + 1$.

Mặt khác: $b_{n+1} = 2a_n b_n$ hay $a_n = \frac{b_{n+1}}{2b_n} (\forall n \ge 1)$. Suy ra: $a_1 a_2 ... a_n = \frac{b_2}{2b_1} . \frac{b_3}{2b_2} ... \frac{b_{n+1}}{2b_n} = \frac{b_{n+1}}{2^n}$. Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2^n]{a_1 a_2 ... a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{b_{n+1}} = \left(\sqrt{2}+1\right)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ (vì $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\frac{1}{2^n}} = 1$).

Bài 20. Cho dãy số thực (a_n) xác định bởi $\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{4}; a_2 = \dfrac{3}{10} \\ a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{a_n}{6} + \dfrac{a_{n-1}^2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn. Hãy tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

+ Ta Có $a_1, a_2 \in (0;1)$, giả sử $a_1, a_2, ..., a_k \in (0;1), k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Từ công thức truy hồi ta có:.

$$\frac{1}{2} + 0 + 0 \leq a_{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{a_k}{6} + \frac{a_{k-1}^2}{3} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1, \text{ vì } 0 \leq a_{k-1}, a_k \leq 1 \Rightarrow a_{k+1} \in (0;1).$$

Vậy bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $a_n \in (0;1), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

+ Xét hai dãy số mới $(x_n): \begin{cases} x_1 = x_2 = \dfrac{1}{4} \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x_n}{6} + \dfrac{x_{n-1}^2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$.

và $(y_n): \begin{cases} y_1 = y_2 = \dfrac{3}{10} \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{y_n}{6} + \dfrac{y_{n-1}^2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$.

- Có $0 < x_1 \leq x_2 < \dfrac{1}{2} < x_3 < 1$, giả sử ta có $0 < x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_k < 1, k \in \mathbb{N}, k \geq 3$, khi đó.

$$x_k = \frac{1}{2} + \frac{x_{k-1}}{6} + \frac{x_{k-2}^2}{3} \leq \frac{1}{2} + \frac{x_k}{6} + \frac{x_{k-1}^2}{3} = x_{k+1}.$$

Vậy bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được (x_n) là dãy số tăng và bị chặn trên bởi 1, nên nó có giới hạn hữu hạn $\lim x_n = \alpha$. Chuyển công thức truy hồi qua giới hạn tìm được $\alpha = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\alpha}{6} + \dfrac{\alpha^2}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{3}{2} \\ \alpha = 1 \end{array}\right.$. Do $(x_n) \subset (0;1)$ nên suy ra $\alpha = 1$.

- Chứng minh tương tự đối với dãy số (y_n), ta cũng có $\lim y_n = 1$.

- Cuối cùng ta chứng minh $x_n \leq a_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ **(1)** bằng phương pháp quy nạp:.

Ta có $x_1 = a_1 < y_1$ và $a_2 < x_2 = y_2$, với n = 1, 2 bất đẳng thức (1) đúng. Giả sử (1) đúng tới $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, tức là $x_i \leq a_i \leq y_i, \forall i = 1, 2, ..., k$. Khi đó.

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{x_k}{6} + \frac{x_{k-1}^2}{3} \leq a_{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{a_k}{6} + \frac{a_{k-1}^2}{3} \leq \frac{1}{2} + \frac{y_k}{6} + \frac{y_{k-1}^2}{3} = y_{k+1}.$$

+ Từ $x_n \le a_n \le y_n, n\in \mathbb{N}, n\ge 1$ và áp dụng định lý kẹp ta suy ra được $\lim a_n = 1$.

Bài 21. Tìm giới hạn: $\lim(2014+\frac{1}{\sqrt[n]{n!}})$.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức: $n!>\left(\frac{n}{3}\right)^n$ (*) $\forall n\in N^*$).

Bằng phương pháp qui nạp. Thật vậy: với $n=1$, ta có $1>\frac{1}{3}$ (đúng).

Giả sử (*) đúng với $n=k$ tức là: $k!>\left(\frac{k}{3}\right)^k$. Ta đi chứng minh (*) đúng với.

$n=k+1$.

Ta có $(k+1)!=k!(k+1)>\left(\frac{k}{3}\right)^k(k+1)=(\frac{k+1}{3})^{k+1}.\frac{3}{(1+\frac{1}{k})^k}>(\frac{k+1}{3})^{k+1}$.

Bất đẳng thức cuối này đúng vì:.

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=1+\frac{k}{k}+\frac{k(k-1)}{2!}.\frac{1}{k^2}+...+\frac{k(k-1)(k-2)....(k-k+1)}{k!}.\frac{1}{k^2}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{k})+...+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{k})(1-\frac{2}{k})...(1-\frac{k-1}{k})$$

$$<1+1+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}<1+1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+..$$

$$<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3$$

.

Vậy (*) đúng với $n=k+1$. Do đó $n!>\left(\frac{n}{3}\right)^n$, từ đây ta suy ra $\sqrt[n]{n!}>\frac{n}{3}$.

=> $0<\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\frac{3}{n}$. Vì $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0$.

Do đó theo định lý về giới hạn kẹp giữa ta suy ra: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

Vậy $\lim(2014+\frac{1}{\sqrt[n]{n!}})$=2014.