Bài 4. Ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá *x*. Giải phương trình

$$x^2-(1+[x])x+2015=0.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $x \neq 0$.

$\text{pt} \Leftrightarrow [x]=\dfrac{x^2-x+2015}{x} \Leftrightarrow \text{x}-1<\dfrac{x^2-x+2015}{x} \leq \text{x} \Leftrightarrow \text{x} \geq 2015.$

$[x]=a \in \mathbb{Z}\ \ (a \geq 2015) \Rightarrow x^2-(a+1)x+2015=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{a+1 \pm \sqrt{(a+1)^2-8060}}{2}\ \ (*)$

$Do\ \ a \geq 2015 \Rightarrow x^2-(a+1)x+2015=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{a+1+\sqrt{(a+1)^2-8060}}{2} \geq 2015\ \ (\text{t/ m});$

$\dfrac{a+1-\sqrt{(a+1)^2-8060}}{2} \leq \dfrac{a+1-\sqrt{(a+1)^2-4a}}{2}<2015\ (loai)$

Vậy $S=\left\{\dfrac{a+1+\sqrt{(a+1)^2-8060}}{2}\ ;\ a \in \mathbb{Z}\ ; a \geq 2015\right\}$.

2. Có tham số

Bài 1. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt

$(m+1)\sqrt{x^2+2x+2}+m=2x^2+4x+19,\ (x \in \mathbb{R}\ )$.(1)

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{x^2+2x+2}$; điều kiện: $t \geq 1$.

Ta có: $t=\sqrt{x^2+2x+2} \Leftrightarrow x^2+2x+2=t^2 \Leftrightarrow x^2+2x+2-t^2=0$ (2)

Pt (2) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow t \in(-\infty;-1) \cup(1;+\infty)$. Vậy $t>1$.

Thay vào phương trình ta được: $(m+1)t+m=2t^2+15 \Leftrightarrow m=\dfrac{2t^2-t+15}{t+1}$ (3)

Đặt $\begin{cases} y=\dfrac{2t^2-t+15}{t+1} & (C) \\ y=m & (d) \end{cases}$.

Ta có: số giao điểm của (C) và (d) là số nghiệm phương trình (3).

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có đúng 1 nghiệm $t>1$.

Xét hàm số $y=2t-3+\dfrac{18}{t+1};\ (t \in[1;+\infty))$; $y'=2-\dfrac{18}{(t+1)^2}$.

Cho $y'=0 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow y=7;\ \lim\limits_{x \to+\infty} y=+\infty$.

Bảng biến thiên

t	1		2		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	8	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>8 \\ m=7 \end{array}\right.$.

3.

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3-7x^2+(m+6)x-m=0$.

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho tương đương:

$$(x-1)(x^2-6x+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-6x+m=0 \ (1) \end{array}\right..$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1, hay: $\begin{cases} \Delta'=9-m>0 \\ 1^2-6.1+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<9 \\ m\neq 5 \end{cases}$ (*).

Khi đó, PT đã cho có ba nghiệm x_1,x_2 và $x_3=1$, trong đó x_1,x_2 là nghiệm của (1).

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=6 \\ x_1.x_2=m \end{cases}$ (2).

Xét các trường hợp sau:

*) Nếu $x_1.x_3=x_2^2 \Leftrightarrow x_1=x_2^2$ (3). Từ (2) và (3) ta có hệ:

$$\begin{cases} x_1+x_2=6 \\ x_1.x_2=m \\ x_1=x_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2^2+x_2-6=0 \\ x_1=x_2^2 \\ m=x_2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2=2; x_1=4; m=8 \\ x_2=-3; x_1=9; m=-27 \end{array}\right..$$

*) Nếu $x_1.x_2=x_3^2 \Leftrightarrow x_1.x_2=1$ (4). Từ (2) và (4) ta có hệ: $\begin{cases} m=1 \\ x_1+x_2=6 \\ x_1.x_2=1 \end{cases}$.

Vậy, có ba giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $m=1, m=8, m=-27$.

Bài 3. *Tìm các giá trị của tham số m để phương trình* $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}=\sqrt{-x^2+9x+m}$ *có nghiệm*

Hướng dẫn giải.

Lời giải:

Điều kiện: $0 \le x \le 9$

PT (1) $\Leftrightarrow x + 9 - x + 2\sqrt{x(9-x)} = -x^2 + 9x + m$

$\Leftrightarrow 9 + 2\sqrt{-x^2 + 9x} = -x^2 + 9x + m$ *(2)*

Đặt $t = \sqrt{-x^2 + 9x}$

Ta có: $t' = \dfrac{-2x + 9}{2\sqrt{-x^2 + 9x}}$; $t' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{2}$

x	0		$\frac{9}{2}$		9
t'		$+$	0	$-$	
t	0	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	0

Do đó : $0 \le t \le \dfrac{9}{2}$

Phương trình (2) trở thành $9 + 2t = t^2 + m \Leftrightarrow -t^2 + 2t + 9 = m$ (3)

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 9,\ 0 \le t \le \dfrac{9}{2}$

Ta có : $f'(t) = -2t + 2$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Bảng biến thiên :

t	0		1		$\frac{9}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	9	$\nearrow$	10	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$

Phương trình (1) có nghiệm $x \in [0;9] \Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm $t \in \left[0;\dfrac{9}{2}\right]$

$\Leftrightarrow -\dfrac{9}{4} \le m \le 10$

Bài 4. Tìm a để phương trình sau (ẩn x) chỉ có một nghiệm.

$1+\dfrac{5a-3}{x-a}=\dfrac{5(2a+1)(1-a)}{(x-a)(x-3a+1)}$

Bài 5. Cho hai phương trình sau:

$3(x^2+a^2)=1-(9a^2-2)x$ (1)

$x+(3a-2)^2.3^x=(8^a-4)\log_3\left(3^a-\dfrac{1}{2}\right)-3x^3$ (2)

(a là tham số, x là ẩn số)

Tìm a để số nghiệm của phương trình (1) không vượt quá số nghiệm của phương trình (2).

Bài 6. Cho phương trình: $ax^2+(2b+c)x+(2d+e)=0$ có một nghiệm không nhỏ hơn 4.

Chứng minh rằng phương trình $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ có nghiệm.

Bài 7. Với mỗi số tự nhiên k, gọi $N(k)$ là số nghiệm của phương trình

$$2016x+2017y=k, x\ge 0, y\ge 0 .$$

Tính giới hạn sau $L=\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{N(k)}{k}$

Lời giải

Giả sử x_0, y_0 là một nghiệm của phương trình $2016x+2017y=k$, khi đó mọi nghiệm của phương trình trên có dạng $x=x_0+2017t, y=y_0-2016t, t\in\mathbb{Z}$

Vì $x\ge 0$ và $y\ge 0$ nên $\dfrac{y_0}{2016}\ge t\ge\dfrac{x_0}{2017}$.

Suy ra $N(k)=\left[\begin{array}{l}\left[\dfrac{y_0}{2016}\right]-\left[\dfrac{-x_0}{2017}\right]+1\\ \left[\dfrac{y_0}{2016}\right]-\left[\dfrac{-x_0}{2017}\right]\end{array}\right.$

Suy ra $\left|N(k)-\dfrac{y_0}{2016}-\dfrac{x_0}{2017}\right|\le 3.$

Kết hợp với $2016x_0+2017y_0=k$, ta có $\left|\dfrac{N(k)}{k}-\dfrac{1}{2016.2017}\right|\le\dfrac{3}{k}$.

Vậy $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{N(k)}{k}=\dfrac{1}{2016.2017}$

Bài 8. *Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm*

$3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$.

Hướng dẫn giải.

Điều kiện: $x\ge 1$

PT (1) $\Leftrightarrow 3\left(\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)^2+m=2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ (2)

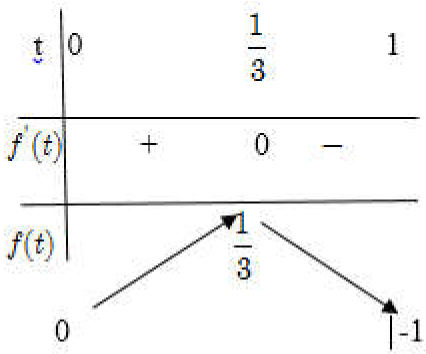
Đặt $t = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$, Do $0 \le \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}} = \sqrt[4]{1 - \dfrac{2}{x+1}} < 1 \Rightarrow 0 \le t < 1$

Phương trình (2) trở thành : $3t^2 + m = 2t \Leftrightarrow m = -3t^2 + 2t$ (3)

Xét hàm số $f(t) = -3t^2 + 2t$, $t \in [0;1)$

Ta có : $f'(t) = -6t + 2$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$

Bảng biến thiên :



Phương trình (1) có nghiệm $x \in [1;+\infty) \Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm $t \in [0;1)$

$\Leftrightarrow -1 < m \le \dfrac{1}{3}$

Bài 9. Cho phương trình

$$x^2 - 2x + m.(x-4).\sqrt{\frac{x+2}{4-x}} + 2\sqrt{8+2x-x^2} - 14 - m = 0.$$

Tìm m để phương trình có nghiệm thực.

Hướng dẫn giải.

Với tập xác định $D = [-2;4)$, Phương trình đã cho tương đương với

$$-(-x^2+2x+8) - m\sqrt{8+2x-x^2} + 2\sqrt{8+2x-x^2} - 6 - m = 0.$$

Đặt t = $\sqrt{8+2x-x^2}$ thì t ∈ [0; 3)

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{-t^2+2t-6}{t+1}; t \in [0;3]$;

f'(t) = $\dfrac{-t^2-2t+8}{(t+1)^2}$; f'(t) = 0 ⇔ t = - 4 hoặc t = 2.

Bảng biến thiên của hàm số f(t) trên đoạn [0; 3]

t	$-\infty$	-4		-1		0		2		3		$+\infty$
f'(t)	-	0	+	||	+	|	+	0	-	|		
f(t)							$\nearrow$		$\searrow$			

Phương trình đã cho có nghiệm x $\in$ [- 2; 4) $\Leftrightarrow$ Đường thẳng y = m cắt đồ thị hàm số f(t), t $\in$ [0; 3] $\Leftrightarrow$ - 6 $\le$ m $\le$ - 2

Bài 10. Cho phương trình: $\sqrt{21+4x-x^2}-\frac{3}{4}x+3=m\left(\sqrt{x+3}+2\sqrt{7-x}\right)$, với m là tham số. Tìm tham số m để phương trình có nghiệm thực.

Hướng dẫn giải.

Điều kiện: $-3\le x\le 7$.Đặt $t=\sqrt{x+3}+2\sqrt{7-x}$ với $x\in[-3,7]$

Ta có: $t'=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}-\frac{1}{\sqrt{7-x}}=\frac{\sqrt{7-x}-2\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x+3}\sqrt{7-x}}$; $y'=0\Leftrightarrow\sqrt{7-x}=2\sqrt{x+3}\Leftrightarrow x=-1$

$t(-3)=2\sqrt{10},t(7)=\sqrt{10},t(-1)=5\sqrt{2}$ suy ra: $t\in\left[\sqrt{10},5\sqrt{2}\right]$

Do $t=\sqrt{x+3}+2\sqrt{7-x}\Leftrightarrow\sqrt{21+4x-x^2}-\frac{3}{4}x+3=\frac{t^2-19}{4}$ nên phương trình trở thành:

$\frac{t^2-19}{4}=mt\Leftrightarrow\frac{t^2-19}{4t}=m$

Bài 11. Tìm m để pt sau có nghiệm $8x^2+4x+13=m^2(2x+1)\sqrt{x^2+3}$.

Hướng dẫn giải.

$8x^2+4x+13=m^2(2x+1)\sqrt{x^2+3}$. Ta đưa pt về dạng đẳng cấp

$8x^2+4x+13=m^2(2x+1)\sqrt{x^2+3}\Leftrightarrow(2x+1)^2+4(x^2+3)=m^2(2x+1)\sqrt{x^2+3}$

Từ pt suy ra $x>\frac{1}{2}$

Chia hai vế pt cho $\sqrt{x^2+3}$, ta được

$$(2x+1)^2+4(x^2+3)=m^2(2x+1)\sqrt{x^2+3}$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}\right)^2-m^2\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}\right)+4=0$$

Đặt $t=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}$, lập bbt với $x>\frac{-1}{2}$ tìm được $t\in(0;2)$

P t trở thành $t+\frac{4}{t}=m^2$ (1)

Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi pt (1) có nghiệm thuộc t thuộc (0;2).

Tìm được $m>2\vee m<-2$

Bài 12. (**Chuyên Hưng Yên**). Giả sử với hai số dương a,b thì phương trình $x^3-ax^2+bx-a=0$, có các nghiệm đều lớn hơn 1. Xác định giá trị của a,b để biểu thức $P=\frac{b^n-3^n}{a^n}$ đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó (n là số nguyên dương cho trước).

Hướng dẫn giải

Gọi x_1,x_2,x_3 là các nghiệm của phương trình đã cho.

Theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b \\ x_1x_2x_3=a \end{cases}$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta được

$x_1+x_2+x_3 \ge 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$ hay $a \ge 3\sqrt[3]{a} \Leftrightarrow a \ge 3\sqrt{3}$ (*)

Theo bất đẳng thức $(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx);\ \ \forall x,y,z \in R$

thì $b^2=(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^2 \ge 3x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)$

hay $b^2 \ge 3a^2 \Leftrightarrow b \ge \sqrt{3}a.$

Suy ra $P=\frac{b^n-3^n}{a^n} \ge \frac{\sqrt{3^n}a^n-3^n}{a^n}=\sqrt{3^n}-\frac{3^n}{a^n} \ge \sqrt{3^n}-\frac{3^n}{(3\sqrt{3})^n}$, do (*)

Do đó ta có $P \ge \frac{3^n-1}{\sqrt{3^n}}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=3\sqrt{3};b=\sqrt{3}a=9.$ Khi đó phương trình có ba nghiệm trùng nhau và đều bằng $\sqrt{3}.$ Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3^n-1}{\sqrt{3^n}}$ khi $a=3\sqrt{3};b=9.$

Bài 13. Giải phương trình $x^4-x^2+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}=0$.

Bài 14. Tìm m để BPT sau vô nghiệm: $\left(m^2-4\right)x^2+2\left(m-2\right)x+1 \ge 0$

Bài 15. Giải bất phương trình $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$

Bài 16. Chứng minh phương trình: $-2x^4+mx^3+nx^2+px+2011=0$ có ít nhất 2 nghiệm với $\forall m,n,p \in \mathbb{R}$

Hướng dẫn giải

Xét phương trình: $-2x^4+mx^3+nx^2+px+2011=0$ (1)

Xét hàm số: $f(x)=-2x^4+mx^3+nx^2+px+2011$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-2x^4+mx^3+nx^2+px+2011)=-\infty \Rightarrow \exists b>0 \text{ sao cho } f\left(b\right)<0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-2x^4+mx^3+nx^2+px+2011)=-\infty \Rightarrow \exists a<0 \text{ sao cho } f(a)<0$$

$$f(0)=2011>0$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên các đoạn $[a;0]$ và $[0;b]$;

$\begin{cases} f(a).f(0)<0 \\ f(0).f(b)<0 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình có ít nhất 1 nghiệm $x_1\in(a;0)$ và ít nhất 1 nghiệm $x_2\in(0;b)$.

Vậy phương trình có ít nhất 2 nghiệm.

Bài 17. Cho các phương trình: $x^2-(m+1)x+m^2-2=0$ (1)

$x^4+mx^3-x^2+2x+m^2=0$ (2)

trong đó x là ẩn số và m là tham số ($0<m<1$).

1) Chứng tỏ rằng phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt và 1 nằm trong khoảng nghiệm.

2) Chứng minh phương trình (2) có nghiệm.

(Chưa giải)

Bài 18. Cho phương trình $x^3+3x^2+2mx-m+2=0;\ m\in R$.

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình trên có 3 nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 thoả mãn điều kiện: $x_1<x_2<1<x_3$.

(Chưa giải)

Bài 19. Tìm điều kiện của tham số a, b để phương trình sau có các nghiệm lập thành cấp số cộng: $x^3-3x^2+\text{ax}+b=0$.

(Chưa giải)

Bài 20. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\sqrt{2+x}+\sqrt{5-x}-\sqrt{(2+x)(5-x)}=m$

(Chưa giải)

Bài 21. Tìm các giá trị của a để phương trình sau chỉ có một nghiệm:

$$1+\frac{5a-3}{x-a}=\frac{5(2a+1)(1-a)}{(x-a)(x-3a+1)}.$$

(Chưa giải)

Bài 22. Giả sử phương trình $x^3+x^2+ax+b=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Hãy xét dấu của biểu thức: a^2-3b.

Hướng dẫn giải

$y=f(x)=x^3+x^2+ax+b=0$.

+ Tập xác định: R.

$y'=3x^2+2x+a$ là tam thức bậc hai có biệt số $\Delta'=1-3a$.

+ Pt: $x^3+x^2+ax+b=0$ có 3 nghiệm phân biệt nên $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 và $f(x_1).f(x_2)<0$.

+ Suy ra: $\begin{cases} 1-3a>0 \\ f(x_1).f(x_2)<0 \end{cases}$ (x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $3x^2+2x+a=0$).

+ Thực hiện phép chia đa thức ta được:

$f(x)=x^3+x^2+ax+b=\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}\right)y'+\frac{1}{9}\left[(6a-2)x+9b-a\right]$

Suy ra $f(x_1)=\frac{1}{9}\left[(6a-2)x_1+9b-a\right]$; $f(x_2)=\frac{1}{9}\left[(6a-2)x_2+9b-a\right]$.

+ $f(x_1).f(x_2)<0 \Leftrightarrow (6a-2)^2x_1x_2+(6a-2)(9b-a)(x_1+x_2)+(9b-a)^2<0.$

+ Vì x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình: $3x^2+2x+a=0$ nên $x_1+x_2=-\frac{2}{3}; x_1.x_2=\frac{a}{3}.$

Do đó: $\frac{a}{3}(6a-2)^2-(6a-2)(9b-a)\frac{2}{3}+(9b-a)^2<0$.

suy ra: $4(3a-1)(a^2-3b)+(9b-a)^2<0.$

+ Vì $(9b-a)^2\geq 0$ và $3a-1<0$ nên $a^2-3b>0.$

Bài 23. Cho phương trình: $\sqrt[5]{x^2-34x+a}-\sqrt[4]{(x-1)(x-33)}=1$.

a/ Giải phương trình khi $a=64$.

b/ Tìm a để phương trình có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Câu a:

+Đặt u = $\sqrt[5]{x^2-34x+a}$ v = $\sqrt[4]{(x-1)(x-33)}$.

+Ta có hệ $\begin{cases} u^5-(u-1)^4=a-33 \\ v=u-1\geq 0 \end{cases}$ (I).

+Hàm số $f(u)=u^5-(u-1)^4$ có $f'(u)=5u^4-4(u-1)^3>0\ \forall u\in[1;+\infty)$ nên f(u) tăng trên $[1;+\infty)$.

+ $a=64, f(u)=31=f(2)$ và $f(u)$ tăng nên hệ (I) chỉ có một nghiệm: $(u=2, v=1)$ từ đó ta có nghiệm của phương trình là: $x=17\pm\sqrt{257}$.

Câu b:

+ $f(u)$ tăng trên $[1;+\infty)$ mà $f(1)=1$ nên phương trình có nghiệm khi $a-33\geq 1$ hay $a\geq 34$.

Bài 24. Giải và biện luận phương trình theo tham số m: $(\lg\cos x)^2-m\log\cos^2x-m^2+2=0.$

Hướng dẫn giải

$(\lg\cos x)^2-m\log\cos^2x-m^2+2=0\ (1).$

+Điều kiện: $\cos x>0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+k2\pi<x<\frac{\pi}{2}+k2\pi$, $k\in Z$.

Đặt $t=\lg\cos x$. Phương trình trở thành: $\begin{cases} t^2-2mt-m^2+2=0 & (2) \\ t\leq 0 \end{cases}$.

Xét tam thức bậc hai $f(t)=t^2-2mt-m^2+2=0$ có:

$a=1;\frac{S}{2}=m,\Delta'=2(m^2-1), f(0)=-m^2+2.$

+Trường hợp 1: t = 0 là nghiệm của (2).Khi đó ta có m = $\pm\sqrt{2}$.

+ m = $\sqrt{2}$: (2) $\Leftrightarrow t=0$ hay t = $2\sqrt{2}$ nên (1) ⇔ lgcosx = 0 ⇔ cosx = 1⇔x =2kπ, k∈Z.

+ m =$-\sqrt{2}$: (2) $\Leftrightarrow t=0$ hay t = $-2\sqrt{2}$ nên (1)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lg\cos x = 0\\ \lg\cos x = -2\sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2k\pi\\ x = \pm\arccos 10^{-2\sqrt{2}} + 2k\pi\end{array}\right., k \in Z.$$

+<u>Trường hợp 2:</u> Phương trình (2) có 2 nghiệm t_1, t_2 khác 0 ($t_1 \le t_2$):

$$t_1 = m - \sqrt{2(m^2-1)}\ ;\ t_2 = m + \sqrt{2(m^2-1)}\ .$$

Với điều kiện (1) có nghiệm nên ta chỉ cần xét 2 trường hợp sau: a/ $t_1 \le t_2 < 0$; b/ $t_1 < 0 < t_2$.

a/ $t_1 \le t_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' \ge 0\\ S/2 < 0\\ f(0) > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2(m^2-1) \ge 0\\ m < 0\\ -m^2 - 2 > 0\end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m \le -1.$

Khi đó (2) có hai nghiệm t_1, t_2 âm nên (1) có các họ nghiệm:

$x = \pm\arccos 10^{m\pm\sqrt{2(m^2-1)}} + 2k\pi, k \in Z$.

b/ $t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow af(0) < 0 \Leftrightarrow -m^2 + 2 < 0 \Leftrightarrow m < -\sqrt{2}\ \ hay\ m > \sqrt{2}.$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \lg\cos x = t_1 \Leftrightarrow x = \pm\arccos 10^{m-\sqrt{2(m^2-1)}} + 2k\pi, k \in Z$.

+Kết quả:

+ $m < -\sqrt{2}$: (1) có nghiệm: $x = \pm\arccos 10^{m-\sqrt{2(m^2-1)}} + 2k\pi, k \in Z$.

+ $m = -\sqrt{2}$: (1) có nghiệm: $x = k2\pi; x = \pm\arccos 10^{-2\sqrt{2}} + 2k\pi, k \in Z$

+ $-\sqrt{2} < m < -1$: (1) có nghiệm: $x = \pm\arccos 10^{m\pm\sqrt{2(m^2-1)}} + 2k\pi, k \in Z$

+ $m = -1$: (1) có nghiệm $x = \pm\arccos 0{,}1 + 2k\pi, k \in Z$.

+ $-1 < m < \sqrt{2}$: (1) vô nghiệm.

+ $m = \sqrt{2}$: (1) có nghiệm $x = k2\pi, k \in Z$.

+ $m > \sqrt{2}$: (1) có nghiệm: $x = \pm\arccos 10^{m-\sqrt{2(m^2-1)}} + 2k\pi, k \in Z$.

BÀI TẬP CHƯA CÓ LỜI GIẢI

1. Giải phương trình: $\left[\dfrac{2x+1}{3}\right] - \left[x^2\right] = \left[-x^2\right]$.

2. Giải phương trình: $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(4-\sqrt{3}x)^2} = 1$

3. Cho trước các số nguyên dương a, b. Chứng minh rằng phương trình

$x^2 - 2axy + \left(a^2 - 4b\right)y^2 + 4by = z^2$ có vô số nghiệm nguyên dương.

4. Giải phương trình: $x^4 - 10x^3 - 2\left(a-11\right) + 2\left(5a+6-\right)x + 2a + a = 0$. Trong đó a là tham số.

5. Giải phương trình: $\left|1995 - x\right|^{1996} + \left|1996 - x\right|^{1995} = 1$

6. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{\dfrac{x+7}{x+1}} + +8 = 2x^2 + \sqrt{2x-1}$; b) $x^3 = x^2 + x + \dfrac{1}{3}$.

c) $x^2 - 1 = 2x\sqrt{x^2 - 2x}$

7. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 + x - 1} = 0$