Giả sử $u_k = 2^k - 1$ đúng với $k \ge 1, k \in N$.

Ta chứng minh: $u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$.

Thật vậy: $u_{k+1} = u_k + 2^k = 2^k - 1 + 2^k = 2^{k+1} - 1$.

b) $S = \left(2^1 - 1\right) + \left(2^2 - 1\right) + ... + \left(2^n - 1\right) = 2^1 + 2^2 + ... + 2^n - n$.

$S = 2.\frac{2^n - 1}{2 - 1} - n = 2^{n+1} - n - 2$.

Bài 19. Cho dãy số(u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{2} - 1}{1 - (\sqrt{2} - 1)u_n} \quad (\forall n \ge 1, n \in \mathbb{N}) \end{cases}$.

a) Chứng minh: $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

b) Tính: u_{2015}.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $1 = \tan\frac{\pi}{4} = \tan\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2\frac{\pi}{8}} \Leftrightarrow \tan^2\frac{\pi}{8} + 2\tan\frac{\pi}{8} - 1 = 0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 \\ \tan\frac{\pi}{8} = -\sqrt{2} - 1 \end{array}\right. \Rightarrow \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ (Vì $\tan\frac{\pi}{8}$ dương).

b) Đặt $u_1 = \sqrt{2} = \tan a$, ta có: $u_2 = \dfrac{\tan a + \tan\frac{\pi}{8}}{1 - \tan a.\tan\frac{\pi}{8}} = \tan(a + \frac{\pi}{8})$,

$u_3 = \dfrac{\tan(a + \frac{\pi}{8}) + \tan\frac{\pi}{8}}{1 - \tan\frac{\pi}{8}\tan(a + \frac{\pi}{8})} = \tan(a + 2.\frac{\pi}{8})$.

Ta chứng minh: $u_n = \tan(a + (n-1)\frac{\pi}{8}), \forall n \ge 1, n \in \mathbb{N}$ (*).

Với $n = 1$: $u_1 = \tan a$ đúng.

Giả sử (*) đúng với $n = k$, $k \ge 1$, hay ta có: $u_k = \tan(a + (k-1)\frac{\pi}{8})$.

Ta có: $u_{k+1}=\dfrac{u_k+\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}-1)u_k}=\dfrac{\tan(a+(k-1)\frac{\pi}{8})+\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan(a+(k-1)\frac{\pi}{8}).\tan\frac{\pi}{8}}=\tan(a+k.\frac{\pi}{8})$.

Vậy (*) đúng với $n=k+1$. Vậy $u_n=\tan(a+(n-1)\frac{\pi}{8}),\forall n\geq 1,n\in\mathbb{N}$.

Cho $n=2015$, ta có: $u_{2015}=\tan(a+2014.\frac{\pi}{8})=\tan(a+\frac{3\pi}{4}+251\pi)=\tan(a+\frac{3\pi}{4})$.

$=\tan(a-\frac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2=\tan^2\frac{\pi}{8}$.

Bài 20. Cho dãy số thực (u_n) với $\begin{cases}u_1=1\\u_2=-1\\u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n\end{cases}$ $(n\in N^*)$.

a) Chứng minh $u_n=3-2n$ với mọi $n\in N^*$.

b) Tính tổng $S=u_1+u_2+...+u_{2012}$.

Hướng dẫn giải

a) *Dùng phương pháp qui nạp.*

$u_1=1=3-2.1$, $u_2=3-2.2=-1$.

Giả sử $u_k=3-2k$ $(k\geq 3)$.

Ta có: $u_{k+1}=2u_k-u_{k-1}=2(3-2k)-(3-2(k-1))$.

$=1-2k=3-2(k+1)$.

Vậy $u_n=3-2n$ với mọi $n\in N^*$.

b) $S=(3-2.1)+(3-2.2)+...+(3-2.2012)$.

$=3.2012-2(1+2+...+2012)=6036-2013.2012=-4044120$.

Bài 21. Cho dãy số (v_n) với $\begin{cases}v_1=8\\v_2=34\\v_{n+2}=8v_{n+1}+1996v_n\end{cases}$ $(n\in N^*)$.

Tìm số dư khi chia v_{2013} cho 2011.

Hướng dẫn giải

Xét dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 8 \\ u_2 = 34 \\ u_{n+2} = 8u_{n+1} - 15u_n \end{cases}$ $(n \in N^*)$.

Ta có $v_n \equiv u_n \pmod{2011}$ với mọi $n \in N^*$.

Xét phương trình đặc trưng: $t^2 - 8t + 15 = 0$.

Phương trình trên có nghiệm $t = 5, t = 3$.

(u_n) có dạng $u_n = A.5^n + B.3^n$. Vì $u_1 = 5, u_2 = 13$ nên $\begin{cases} 5A + 3B = 8 \\ 25A + 9B = 34 \end{cases}$.Ta có: $A = B = 1$.

Ta có: $u_n = 5^n + 3^n$.

Ta có 2011 là số nguyên tố Theo định lý Fecma ta có: $5^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}$.

$3^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}$.

Suy ra $5^{2013} \equiv 125 \pmod{2011}, 3^{2013} \equiv 27 \pmod{2011}$.

Vậy khi chia u_{2013} cho 2011 ta được số dư là 152.

Suy ra khi chia v_{2013} cho 2011 ta được số dư là 152.

Bài 22. Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ 3^n(2u_{n+1} - u_n) = 2, (\forall n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$.

a) Chứng minh dãy số (u_n) là dãy số giảm.

b) Lập công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Hướng dẫn giải

a) Chứng minh dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Ta có: $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{3^n}$; Chứng minh: $u_{n+1} < u_n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp.

- Ta có: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = \dfrac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow u_2 < u_1$.

- Giả sử: $u_{k+1} < u_k; k \in \mathbb{N}$ và $k > 1$. Chứng minh: $u_{k+2} < u_{k+1}$.

Ta có: $u_{k+2} = \dfrac{u_{k+1}}{2} + \dfrac{1}{3^{k+1}} < \dfrac{u_k}{2} + \dfrac{1}{3^{k+1}} < \dfrac{u_k}{2} + \dfrac{1}{3^k} = u_{k+1}$. Vậy $u_{n+1} < u_n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Lập công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Ta có: $3^n(2u_{n+1}-u_n)=2 \Leftrightarrow 3^{n+1}.u_{n+1}=\frac{3}{2}3^n.u_n+3$.

Đặt $v_n=3^n u_n+6$, ta được: $v_{n+1}-6=\frac{3}{2}(v_n-6)+3 \Leftrightarrow v_{n+1}=\frac{3}{2}v_n$.

Ta được: $(v_n):\begin{cases} v_1=9 \\ v_{n+1}=\frac{3}{2}v_n,\ (n\in\mathbb{N}^*) \end{cases}$ là cấp số nhân có công bội $q=\frac{3}{2}$.

Suy ra: $v_n=v_1.\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=9.\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

Vậy $u_n=\frac{v_n-6}{3^n}=6.\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$.

Bài 23. Tìm số hạng tổng quát của dãy (x_n) biết rằng:.

$$\begin{cases} x_0=1;\ x_1=5;\ x_2=125 \\ x_{n+2}x_n x_{n-1}=3(x_{n+1})^2 x_{n-1}+10x_{n+1}(x_n)^2 \end{cases}\ (n\in N^*).$$

Hướng dẫn giải

Từ đề bài ta có: $x_n>0$ với mọi $n\in N$.

Ta có: $\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}=\frac{3x_{n+1}}{x_n}+\frac{10x_n}{x_{n-1}}$ với mọi $n\in N^*$.

Đặt $y_n=\frac{x_n}{x_{n-1}}$ ta được $y_{n+2}-3y_{n+1}-10y_n=0$ với mọi $n\in N^*$.

Vì phương trình đặc trưng của dãy (y_n) có hai nghiệm phân biệt $-2;5$ nên $y_n=A(-2)^n+B.5^n$ với mọi $n\in N^*$.

Với $\begin{cases} y_1=\frac{x_1}{x_0}=5 \\ y_2=\frac{x_2}{x_1}=25 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} B=1 \\ A=0 \end{cases}$. Suy ra $y_n=5^n$ với mọi $n\in N^*$.

Ta có $x_n=5^n.x_{n-1}=5^n.5^{n-1}....5.x_0=5^{n+(n-1)+...+1}=5^{\frac{n^2+n}{2}}$ với mọi $n\in N^*$.

Kết hợp với $x_0=1$, ta suy ra $x_n=5^{\frac{n^2+n}{2}}$ với mọi $n\in N$.

Bài 24. Cho dãy số $(u_n):\begin{cases} u_1 = \dfrac{7}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{7u_n + 4}{2u_n + 5},\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

a) Chứng minh dãy số (u_n) là dãy số giảm.

b) Lập công thức tổng quát của dãy số (u_n).

Hướng dẫn giải

a) Chứng minh dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Ta có: $u_1 = \frac{7}{2};\ u_2 = \frac{19}{8} \Rightarrow u_1 > u_2$.

Giả sử: $u_k > u_{k+1}$ với k >1. Cần chứng minh: $u_{k+1} > u_{k+2}$.

Ta có: $u_{k+1} = \dfrac{7u_k + 4}{2u_k + 5} = \dfrac{7}{2} - \dfrac{27}{2}.\dfrac{1}{2u_k + 5} \Rightarrow u_{k+2} = \dfrac{7}{2} - \dfrac{27}{2}.\dfrac{1}{2u_{k+1} + 5}$.

Mà $u_k > u_{k+1} \Rightarrow \dfrac{1}{2u_k + 5} < \dfrac{1}{2u_{K+1} + 5}$.

$\Rightarrow \dfrac{7}{2} - \dfrac{27}{2}.\dfrac{1}{2u_k + 5} > \dfrac{7}{2} - \dfrac{27}{2}.\dfrac{1}{2u_{k+1} + 5} \Rightarrow u_{k+1} > u_{k+2}$ $\Rightarrow$(điều phải chứng minh).

b) Lập công thức tổng quát của dãy số (u_n).

Ta có $0 < u_n \le \frac{7}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Xét dãy số $x_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$, ta có: $x_1 = \dfrac{1}{3}$.

$x_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}\right) = \dfrac{1}{3}x_n \Rightarrow (x_n)$ là cấp số nhân $\Rightarrow x_n = \dfrac{1}{3^n}$.

$\dfrac{u_n - 2}{u_n + 1} = \dfrac{1}{3^n} \Leftrightarrow (3^n - 1)u_n = 2.3^n + 1 \Leftrightarrow u_n = \dfrac{2.3^n + 1}{3^n - 1}$.

Bài 25. Cho dãy số $(u_n):\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2016} \\ u_{n+1} = \dfrac{2015u_n + 1}{2016},\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

a) Chứng minh rằng $u_n < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Lập công thức tổng quát của dãy số (u_n).

Hướng dẫn giải

a) **Chứng minh rằng** $u_n < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $u_1 = \frac{1}{2016} < 1$.

Giả sử: $u_k < 1,\ (k > 1)$; Cần chứng minh: $u_{k+1} < 1$.

Ta có: $u_k < 1 \Rightarrow 2015u_k + 1 < 2016 \Rightarrow \frac{2015u_k + 1}{2016} < 1 \Rightarrow u_{k+1} < 1$. Vậy $u_n < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b)Lập công thức tổng quát của dãy số (u_n).

Đặt $x_n = u_n - 1$ ta có $x_1 = -\frac{2015}{2016}$.

$$x_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{2015u_n + 1}{2016} - 1 = \frac{2015}{2016}(u_n - 1) = \frac{2015}{2016}x_n.$$

$\Rightarrow (x_n)$ là cấp số nhân $\Rightarrow x_n = -\left(\frac{2015}{2016}\right)^n$.

Vậy $u_n = 1 - \left(\frac{2015}{2016}\right)^n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$..

Bài 26. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 3 \\ u_n = nu_{n-1} - (n-2)u_{n-2} - 2n + 4, \forall n \geq 3 \end{cases}$.

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n).

b) Tìm số dư khi chia u_{2016} cho 2015.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $v_n = u_n - n$ ta có: $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 1 \\ v_n = n(v_{n-1} + n - 1) - (n-2)(v_{n-2} + n - 2) - 3n + 4 = nv_{n-1} - (n-2)v_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$.

Khi đó $v_n - v_{n-1} = (n-1)v_{n-1} - (n-2)v_{n-2}$.

Lại có:.

$$v_n - v_2 = (v_n - v_{n-1}) + (v_{n-1} - v_{n-2}) + ... + (v_4 - v_3) + (v_3 - v_2).$$

$= [(n-1)v_{n-1} - (n-2)v_{n-2}] + [(n-2)v_{n-2} - (n-3)v_{n-3}] + ... + (3v_3 - 2v_2) + (2v_2 - 1v_1)$.

$= (n-1)v_{n-1} - v_1$.

Do đó $v_n = (n-1)v_{n-1}$. Hay $v_n = (n-1)(n-2)v_{n-2} = ... = (n-1)(n-2)...1.v_1 = (n-1)!$.

Vậy $u_n = (n-1)! + n$.

b) Ta có $u_{2016} = 2015! + 2016$ chia cho 2015 dư 1.

Bài 27. Xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số $(x_n): \begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ x_n = \dfrac{x_{n-1}}{1+\sqrt{1+x_{n-1}^2}}, \forall n \geq 2 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{x_{n-1}} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{x_{n-1}^2}}$. Đặt $y_n = \dfrac{1}{x_n}$, khi đó ta được dãy (y_n) xác định như sau: $y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ và $y_n = y_{n-1} + \sqrt{1 + y_{n-1}^2}$.

Vì $y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \cot\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow y_2 = \cot\dfrac{\pi}{3} + \sqrt{1 + \cot^2\dfrac{\pi}{3}} = \dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{3}}{\sin\dfrac{\pi}{3}} = \cot\dfrac{\pi}{2.3}$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $y_n = \cot\dfrac{\pi}{2^{n-1}.3} \Rightarrow x_n = \tan\dfrac{\pi}{2^{n-1}.3}, \forall n \geq 1$.