Thử lại: $p=2$ thì $n=4$ (thỏa); $p \neq 2$: (*) $\Leftrightarrow \left[\frac{2p}{p}\right]+\left[\frac{2p}{p^2}\right]+\ldots<3 \Leftrightarrow 2<3$ (đúng)

+ Với $k=3$: $n=3p$ (p nguyên tố)

Thử lại: $p=2$ thì $n=6$ (thỏa); $p=3$ thì $n=9$ (thỏa); $p \geq 5$:

(*) $\Leftrightarrow \left[\frac{3p}{p}\right]+\left[\frac{3p}{p^2}\right]+\ldots<3 \Leftrightarrow 3<3$ (sai)

• **TH₂**: $t=2$. Ta có (**) $\Rightarrow 6 \geq k(p+1)$. Suy ra $k=1$ hoặc $k=2$ (Do $(p+1) \geq 3$)

+ Với $k=1$, ta được $(p+1) \leq 6 \Rightarrow p \in \{2,3,5\} \Rightarrow n \in \{4,9,25\}$.

Thử lại ta chọn: $n=4, n=9$.

+ Với $k=2$, ta được $(p+1) \leq 3 \Rightarrow p=2 \Rightarrow n=8$.

Thử lại ta thấy $n=8$ thỏa mãn.

• **TH₃**: $t=3$. Ta có (**) $\Rightarrow 9 \geq k(p^2+p+1)$.

Suy ra $k=1$ (Do $p^2+p+1) \geq 7$)

+ Với $k=1$, ta được $(p^2+p+1) \leq 9 \Rightarrow p=2 \Rightarrow n=8$ (thỏa)

Câu 20. Vậy tập tất cả các giá trị của số tự nhiên n thỏa $(n-1)! \vdots n^2$ là $\{p, 2p, 8, 9\}$ với p nguyên tố. Tæng cña m nh÷ng sè nguyªn d-¬ng liªn tiÕp b»ng 2008. X¸c ®Þnh nh÷ng sè Êy.

Hướng dẫn giải

Giả sử tổng của m số nguyên dương liên tiếp bắt đầu từ k bằng 2008 :

$$k+(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+m-1)=2008$$

$$\Rightarrow mk+\frac{m(m-1)}{2}=2008$$

$$\Rightarrow m(2k+m-1)=4016=2^4.251$$

Nếu m lẻ $\Rightarrow 2k+m-1$ chẵn. Khi đó: $m=251,\ 2k+m-1=2^4$ (không xảy ra)

Nếu m chẵn $\Rightarrow 2k+m-1$ lẻ. Ta có: $\begin{cases} 2k+m-1=251 \\ m=2^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=16 \\ k=118 \end{cases}$

Vậy các số cần tìm là 118, 119,…133.

Câu 21. Tìm tất cả số nguyên x sao cho $x+3$ chia hết cho x^2+1.

Hướng dẫn giải

$x+3$ chia hết cho x^2+1

$\Rightarrow (x+3)(x-3)$ chia hết cho x^2+1

$\Rightarrow x^2+1-10$ chia hết cho x^2+1

$\Rightarrow -10$ chia hết cho x^2+1.

Từ đó tìm được $x=0,\ x=-1,\ x=1,\ x=2$.

Câu 22. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^4-y^4=3y^2+1$.

Hướng dẫn giải

Câu 23. Có bao nhiêu cách phân tích 6^9 thành tích của 3 số nguyên dương, biết các cách phân tích mà các nhân tử chỉ khác nhau về thứ tự thì chỉ được tính 1 lần?

Hướng dẫn giải

Xét phân tích $6^9=(2^{□_1}.3^{□_1})(2^{□_2}.3^{□_2})(2^{□_3}.3^{□_3})$ với $\begin{cases} □_□, □_□ \in □ \\ □_1+□_2+□_3=9 \\ □_1+□_2+□_3=9 \end{cases}$

Với mỗi $\square_1 \in \square, 0 \leq \square_1 \leq 9$, có $10 - \square_1$ cách chọn số $\square_2$, để $\square_1 + \square_2 \leq 9$
từ đó chọn $\square_3 = 9 - \square_1 - \square_2$.
Vậy số cách chọn các bộ $(\square_1, \square_2, \square_3)$ là 10+9+.+1 = 55 cách

⇒số cách chọn các bộ $(\square_1, \square_2, \square_3)$ và $(\square_1, \square_2, \square_3)$ là 55.55 cách.
Bây giờ, ta sẽ tính số các cách phân tích bị trùng nhau.
+) TH1: 3 thừa số bằng nhau:

$$6^9 = (2^3.3^3)(2^3.3^3)(2^3.3^3)$$

+) TH2: 2 thừa số bằng nhau:

Câu 24. $6^9 = (2^a.3^b)(2^a.3^b)(2^{9-2a}.3^{9-2b})$ và (a; b) (3; 3).

Câu 25. Khi đó a ∈ {0; 1; 2; 3; 4}; b∈ {0; 1; 2; 3; 4 } và (a; b) (3; 3)
→ số cặp (a; b) là 5.5 – 1 =24, và 24 cặp này cho ta 24 cách phân tích thỏa mãn yêu cầu. Tuy nhiên, mỗi cặp sẽ cho 3 lần đếm trong quá trình đếm mà ta vừa nêu ở trên. (*1 điểm*)
+) TH3: nếu cả 3 thừa số khác nhau, thì mỗi phân tích bị đếm trùng 3!=6 lần.
Vậy số cách phân tích là: $1 + 24 + (55 \times 55 - 24 \times 3 - 1) : 6 = 517$ cách

Câu 26. Tìm số tự nhiên P nhỏ nhất sao cho số $A = P.17^{2014} + 86^{2014}$ chia hết cho số 23690.

Hướng dẫn giải

Để A chia hết cho 23690 khi và chỉ khi A chia hết cho 10, 23 và 103.
Ta xác định P sao cho A chia hết cho 10, 23 và 103.
a) Ta có:

$86 \equiv 6 (\bmod 10) \Rightarrow 86^{2014} \equiv 6 (\bmod 10)$

$17 \equiv 7 (\bmod 10) \Rightarrow 7^{2014} \equiv 9 (\bmod 10)$

$\Rightarrow A \equiv 9P + 6 (\bmod 10)$

Để $A \vdots 10$ thì $P \equiv 6 (\bmod 10)$

b) Ta có $A = P.17^{2014} + (103 - 17)^{2014} = (P+1)17^{2014} + 103k, k \in Z$

Để $A \vdots 103$ thì $P + 1 \equiv 0 (\bmod 103) \Leftrightarrow P = 103t - 1, t \in N$

Từ 2 trường hợp a, b ta suy ra $t = 10q + 9, q \in N$. Do đó:

$P = 1030q + 926$

c) Ta lại có

$A = (1030q + 926).17^{2014} + (3.23 + 17)^{2014}$

$\quad = (1030q + 927).17^{2014} + 23l, l \in Z$

Để $A \vdots 23$ thì

$1030q + 927 \equiv 0 (\bmod 23) \Rightarrow q \equiv 6 (\bmod 23)$

$\Rightarrow q = 23h + 6, h \in N$

Vậy $P = 23690h + 7106$

P nhỏ nhất khi và chỉ khi $h = 0$. Vậy số cần tìm là $P = 7106$.

Câu 27. Tồn tại hay không hai số nguyên dương phân biệt p, q sao cho $q^n + n$ chia hết cho $p^n + n$ với mọi số nguyên dương n?

Hướng dẫn giải

Giả sử tồn tại hai số p, q nguyên dương phân biệt sao cho $q^n + n$ chia hết cho $p^n + n$ với mọi số nguyên dương n, thế thì $q^n + n > p^n + n \Rightarrow q > p$.
Giả sử a là một số nguyên tố lớn hơn q và n là số tự nhiên thỏa mãn $n = (p+1)(a-1) + 1$.
Khi đó

$n = (p+1)a - p \Rightarrow n \equiv -p(\bmod a)$ (1)

Vì $p < q < a$ nên $(p,\ a) = (q,\ a) = 1$. Theo định lý nhỏ Fermat, ta có

$p^{a-1} \equiv 1(\bmod a) \Rightarrow p^{(p+1)(a-1)} \equiv 1(\bmod a) \Rightarrow p^{(p+1)(a-1)+1} \equiv p(\bmod\ a)$.

Do đó $p^n \equiv p(\bmod a)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $p^n + n \equiv 0(\bmod a)$ *hay* $(p^n + n) \vdots a$ (4)

Chứng minh tương tự, ta được $q^n \equiv q(\bmod a)$ (3), $(q^n + n) \vdots a$

Từ (1) và (3) suy ra $q^n + n \equiv q - p(\bmod a)$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $(q-p) \vdots a$. Điều này không thể sảy ra vì $p < q < a$

Vậy không tồn tại hai số nguyên dương phân biệt p, q sao cho $q^n + n$ chia hết cho $p^n + n$ với mọi số nguyên dương n.

Câu 28. Tìm số nguyên dương a lẻ sao cho với mọi số nguyên dương k lớn hơn 2 luôn tồn tại số nguyên x thỏa mãn $a \equiv x^2(\bmod 2^k)$.

Hướng dẫn giải

- $a \equiv x^2(\bmod 2^k)$, a lẻ, $k \geq 3 \Rightarrow$ x lẻ $\Rightarrow a \equiv x^2 \equiv 1(mod\ 8)$.
- Với $a \equiv 1(mod\ 8)$, suy ra tồn tại n nguyên dương sao cho $a = 8n+1$.

$+k = 3$: Chọn $x = 1$.

$+k > 3$: Nhận xét: Nếu x chạy qua một HTDĐĐ modulo 2^m thì $2x^2 + x$ cũng chạy qua một HTDĐĐ đầy đủ modulo 2^m (m nguyên dương).

Thật vậy: $2x^2 + x \equiv 2y^2 + y(\bmod 2^m) \Leftrightarrow (x-y)(2x+2y+1) \equiv 0(\bmod 2^m)$

$\Leftrightarrow x - y \equiv 0(\bmod 2^m) \Leftrightarrow x \equiv y(\bmod 2^m)$.

Do đó: Tồn tại t nguyên thỏa mãn: $n \equiv 2t^2 + t(\bmod 2^{k-3}) \Rightarrow 8n+1 \equiv (4t+1)^2(\bmod 2^k)$

Suy ra $a \equiv x^2(\bmod 2^k)(x = 4t+1)$.

Kết luận: a thỏa mãn $a \equiv 1(mod\ 8)$.

Câu 29. Chứng minh rằng m là một số tự nhiên không chia hết cho 2, cho 3, cho 5 thì m sẽ là ước của một số có $\varphi(m)$ chữ số dạng 11...1.

Hướng dẫn giải

Vì $(m,2) = (m,5) = 1$ nên $(m,10) = 1$. từ đó theo (E) ta có $10^{\varphi(m)} - 1 = \underbrace{99...9}_{\varphi(m)\ cs\ 9} \equiv 0(\bmod m)$.

Nhưng lại vì $(m,3) = 1$ nên $(m,9) = 1$, bởi vậy $10^{\varphi(m)} - 1 \equiv \underbrace{11...1}_{\varphi(m)\ cs\ 1} \equiv 0(\bmod m)$.

Câu 30. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, thì phần nguyên của số $\left(2+\sqrt{3}\right)^n$ là số lẻ.

Hướng dẫn giải

Theo công thức nhị thức Newton, ta có:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\sqrt{3})^k 2^{n-k}$$

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k (\sqrt{3})^k 2^{n-k}$$

Do đó: $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1+(-1)^k\right)\left(\sqrt{3}\right)^k 2^{n-k}$ (1)

Chú ý rằng: Khi k chẵn $(k=2m)$ thì $\left(1+(-1)^k\right)\left(\sqrt{3}\right)^k=2.3^m$

Khi k lẻ $(k=2m+1)$ thì $\left(1+(-1)^k\right)\left(\sqrt{3}\right)^k=0$

Vậy từ (1) suy ra với mọi n thì $\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ là số chẵn. (2)

Mặt khác: $0<\left(2-\sqrt{3}\right)<1 \Rightarrow 0<\left(2-\sqrt{3}\right)^n<1;\ \forall n$

Ta có: $\left(2+\sqrt{3}\right)^n=\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n-1+1-\left(2-\sqrt{3}\right)^n$

Vì $\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n-1$ là số nguyên và $0<1-\left(2-\sqrt{3}\right)^n<1$, nên theo định nghĩa phần nguyên ta có:

$$\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right]=\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n-1+1-\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]=\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n-1$$

Từ (2) suy ra với mọi n thì $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right]$ là số lẻ, suy ra điều phải chứng minh

Câu 31. Tính tổng $S=\sum_{k=0}^{2014}\left(\left[\dfrac{3^k+2015}{3^{k+1}}\right]+\left[\dfrac{2015-3^k}{3^{k+1}}\right]\right)$, trong đó $[x]$ là kí hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá số thực x.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$S=\left[\frac{2015}{3}+\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2015}{3}-\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2015}{3^2}+\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2015}{3^2}-\frac{1}{3}\right]+\ldots\left[\frac{2015}{3^{2015}}+\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2015}{3^{2015}}-\frac{1}{3}\right]$$

Sử dụng định lý Hermtie: "Đối với n nguyên dương, x là số thực bất kỳ, ta có $[nx]=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]$", ta được

$$\left[\frac{2015}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2015}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2015}{3}-\frac{1}{3}\right]=[2015-1]=[2015]-1$$

$$\left[\frac{2015}{3^2}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2015}{3^2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2015}{3^2}-\frac{1}{3}\right]=\left[\frac{2015}{3}-1\right]=\left[\frac{2015}{3}\right]-1$$

.

$$\left[\frac{2015}{3^{2015}}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2015}{3^{2015}}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2015}{3^{2015}}-\frac{1}{3}\right]=\left[\frac{2015}{3^{2015}}-1\right]=\left[\frac{2015}{3^{2014}}\right]-1$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta thu được $S=0$.

Câu 32. Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên x, y không chia hết cho 2015 và thỏa mãn $x^2+8059y^2=4.2015^n, \forall n\in \mathbb{N}^*$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $x^2+8059y^2=4.2015^n \Leftrightarrow x^2+\left(4.2015-1\right)y^2=4.2015^n$.

Đặt $a=2015$, ta sẽ chứng minh luôn tồn tại hai số nguyên x, y không chia hết cho a và thỏa mãn $x^2+\left(4a-1\right)y^2=4a^n$.

- Nếu $n=1$ thì $x=y=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Giả sử bài toán đúng đến n.
- Ta sẽ chứng minh bài toán đúng đến $n+1$.

Thật vậy,

$x^2+(4a-1)y^2=4a^n \Leftrightarrow 4a^{n+1}=ax^2+a(4a-1)y^2$.

$$\Leftrightarrow 4a^{n+1}=\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left[\frac{(4a-1)y}{2}\right]^2+(4a-1)\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2\right]$$

Ta có hai cách phân tích như sau:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left[\frac{(4a-1)y}{2}\right]^2+(4a-1)\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2\right]=\left[\frac{x+(4a-1)y}{2}\right]^2+(4a-1)\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

hoặc là

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left[\frac{(4a-1)y}{2}\right]^2+(4a-1)\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2\right]=\left[\frac{x-(4a-1)y}{2}\right]^2+(4a-1)\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

Đặt $\begin{cases} X_1=\dfrac{x+(4a-1)y}{2} \\ Y_1=\dfrac{x-y}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} X_2=\dfrac{x-(4a-1)y}{2} \\ Y_2=\dfrac{x+y}{2} \end{cases}$

Khi đó: $4a^{n+1}=X_1^2+(4a-1)Y_1^2$ (1)

hoặc $4a^{n+1}=X_2^2+(4a-1)Y_2^2$ (2)

Câu 33. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho:

$f(p)=(2+3)-(2^2+3^2)+(2^3+3^3)-...-(2^{p-1}+3^{p-1})+(2^p+3^p)$ chia hết cho 5.

Hướng dẫn giải

Rõ ràng với k lẻ thì:

$(2^k+3^k)\vdots 5$ (1)

- Thật vậy (1) đúng khi $k=1$ vì lúc đó $2^1+3^1=5\vdots 5$.
- Giả sử (1) đúng khi $k=2n+1$, tức:

$(2^{2n+1}+3^{2n+1})\vdots 5$

- Xét khi $k=2(n+1)+1=2n+3$. Ta có:

$2^{2n+3}+3^{2n+3}=2^2.2^{2n+1}+3^2.3^{2n+1}=4.2^{2n+1}+9.3^{2n+1}$

$=5.2^{2n+1}+10.3^{2n+1}-2^{2n+1}-3^{2n+1}$

$=5(2^{2n+1}+2.3^{2n+1})-(2^{2n+1}+3^{2n+1})$ (*)

Từ (*) và giả thiết quy nạp suy ra $(2^{2n+1}+3^{2n+1})\vdots 5$. Vậy (1) cũng đúng khi $k=2n+1$.

Theo nguyên lý quy nạp suy ra (1) đúng với mọi k lẻ. Từ đó suy ra:

$$f(p)\vdots 5\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}(2^{2i}+3^{2i})\vdots 5 \quad (2)$$

Để ý rằng $3^{2i}\equiv(-2)^{2i}\equiv 2^{2i}(\text{mod }5)$. Vì thế từ (2) suy ra:

$$f(p)\vdots 5\Leftrightarrow\left\{2\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}2^{2i}\right\}\vdots 5\Leftrightarrow\left\{\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}2^{2i}\right\}\vdots 5;\ (\text{do } (2,5)=1).\ (3)$$