2. Áp dụng sơ đồ Hornơ để tính giá trị của đa thức tại $x = a$

Giá trị của $f(x)$ tại $x = a$ là số dư của phép chia $f(x)$ cho $x – a$

1. Ví dụ 1:

Tính giá trị của $A = x^3 + 3x^2 – 4$ tại $x = 2010$

Ta có sơ đồ:

	1	3	0	-4
a = 2010	1	2010.1+3 = 2013	2010.2013 + 0 = 4046130	2010.4046130 – 4 = 8132721296

Vậy: A(2010) = 8132721296

C. Chưngs minh một đa thức chia hết cho một đa thức khác

I. Phương pháp:

1. Cách 1: Phân tích đa thức bị chia thành nhân tử có một thừa số là đa thức chia

2. Cách 2: biến đổi đa thức bị chia thành một tổng các đa thức chia hết cho đa thức chia

3. Cách 3: Biến đổi tương đương $f(x) \vdots g(x) \Leftrightarrow f(x) \pm g(x) \vdots g(x)$

4. cách 4: Chứng tỏ mọi nghiệm của đa thức chia đều là nghiệm của đa thức bị chia

II. Ví dụ

1.Ví dụ 1:

Chứng minh rằng: $x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$

Ta có: $x^{8n} + x^{4n} + 1 = x^{8n} + 2x^{4n} + 1 - x^{4n} = (x^{4n} + 1)^2 - x^{4n} = (x^{4n} + x^{2n} + 1)(x^{4n} - x^{2n} + 1)$

Ta lại có: $x^{4n} + x^{2n} + 1 = x^{4n} + 2x^{2n} + 1 – x^{2n} = (x^{2n} + x^n + 1)(x^{2n} - x^n + 1)$

chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$

Vậy: $x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$

2. Ví dụ 2:

Chứng minh rằng: $x^{3m + 1} + x^{3n + 2} + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ với mọi $m, n \in N$

Ta có: $x^{3m + 1} + x^{3n + 2} + 1 = x^{3m + 1} - x + x^{3n + 2} – x^2 + x^2 + x + 1$

$= x(x^{3m} – 1) + x^2(x^{3n} – 1) + (x^2 + x + 1)$

Vì $x^{3m} – 1$ và $x^{3n} – 1$ chia hết cho $x^3 – 1$ nên chia hết cho $x^2 + x + 1$

Vậy: $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ với mọi m, n $\in$ N

3. Ví dụ 3: Chứng minh rằng

$f(x) = x^{99} + x^{88} + x^{77} + ... + x^{11} + 1$ chia hết cho $g(x) = x^9 + x^8 + x^7 + ...+ x + 1$

Ta có: $f(x) – g(x) = x^{99} – x^9 + x^{88} – x^8 + x^{77} – x^7 + ... + x^{11} – x + 1 – 1$

$= x^9(x^{90} – 1) + x^8(x^{80} – 1) + ...+ x(x^{10} – 1)$ chia hết cho $x^{10} – 1$

Mà $x^{10} – 1 = (x – 1)(x^9 + x^8 + x^7 +...+ x + 1)$ chia hết cho $x^9 + x^8 + x^7 +...+ x + 1$

Suy ra $f(x) – g(x)$ chia hết cho $g(x) = x^9 + x^8 + x^7 +...+ x + 1$

Nên $f(x) = x^{99} + x^{88} + x^{77} + ... + x^{11} + 1$ chia hết cho $g(x) = x^9 + x^8 + x^7 + ...+ x + 1$

4. Ví dụ 4: CMR: $f(x) = (x^2 + x – 1)^{10} + (x^2 - x + 1)^{10} – 2$ chia hết cho $g(x) = x^2 – x$

Đa thức $g(x) = x^2 – x = x(x – 1)$ có 2 nghiệm là x = 0 và x = 1

Ta có $f(0) = (-1)^{10} + 1^{10} – 2 = 0 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm của f(x) $\Rightarrow$ f(x) chứa thừa số x

$f(1) = (1^2 + 1 – 1)^{10} + (1^2 – 1 + 1)^{10} – 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ là nghiệm của f(x) f(x) chứa thừa số x – 1, mà các thừa số x và x – 1 không có nhân tử chung, do đó f(x) chia hết cho x(x – 1)

hay $f(x) = (x^2 + x – 1)^{10} + (x^2 - x + 1)^{10} – 2$ chia hết cho $g(x) = x^2 – x$

5. Ví dụ 5: Chứng minh rằng

a) $A = x^2 – x^9 – x^{1945}$ chia hết cho $B = x^2 – x + 1$

b) $C = 8x^9 – 9x^8 + 1$ chia hết cho $D = (x – 1)^2$

c) $C(x) = (x + 1)^{2n} – x^{2n} – 2x – 1$ chia hết cho $D(x) = x(x + 1)(2x + 1)$

Giải

a) $A = x^2 – x^9 – x^{1945} = (x^2 – x + 1) – (x^9 + 1) – (x^{1945} – x)$

Ta có: $x^2 – x + 1$ chia hết cho $B = x^2 – x + 1$

$x^9 + 1$ chia hết cho $x^3 + 1$ nên chia hết cho $B = x^2 – x + 1$

$x^{1945} – x = x(x^{1944} – 1)$ chia hết cho $x^3 + 1$ (cùng có nghiệm là x = - 1)

nên chia hết cho $B = x^2 – x + 1$

Vậy $A = x^2 – x^9 – x^{1945}$ chia hết cho $B = x^2 – x + 1$

b) $C = 8x^9 – 9x^8 + 1 = 8x^9 – 8 - 9x^8 + 9 = 8(x^9 – 1) – 9(x^8 – 1)$

$= 8(x – 1)(x^8 + x^7 + ...+ 1) – 9(x – 1)(x^7 + x^6 + ...+ 1)$

$= (x - 1)(8x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1)$

$(8x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1)$ chia hết cho $x - 1$ vì có tổng hệ số bằng 0

suy ra $(x - 1)(8x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1)$ chia hết cho $(x - 1)^2$

c) Đa thức chia D (x) = $x(x + 1)(2x + 1)$ có ba nghiệm là $x = 0$, $x = -1$, $x = -\frac{1}{2}$

Ta có:

$C(0) = (0 + 1)^{2n} - 0^{2n} - 2.0 - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm của C(x)

$C(-1) = (-1 + 1)^{2n} - (-1)^{2n} - 2.(-1) - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ là nghiệm của C(x)

$C(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2} + 1)^{2n} - (-\frac{1}{2})^{2n} - 2.(-\frac{1}{2}) - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ là nghiệm của C(x)

Mọi nghiệm của đa thức chia là nghiệm của đa thức bị chia $\Rightarrow$đpcm

6. Ví dụ 6:

Cho f(x) là đa thức có hệ số nguyên. Biết f(0), f(1) là các số lẻ. Chứng minh rằng f(x) không có nghiệm nguyên

Giả sử x = a là nghiệm nguyên của f(x) thì f(x) = (x – a). Q(x). Trong đó Q(x) là đa thức có hệ số nguyên, do đó f(0) = - a. Q(0), f(1) = (1 – a). Q(1)

Do f(0) là số lẻ nên a là số lẻ, f(1) là số lẻ nên 1 – a là số lẻ, mà 1 – a là hiệu của 2 số lẻ không thể là số lẻ, mâu thuẩn

Vậy f(x) không có nghiệm nguyên

Bài tập về nhà:

Bài 1: Tìm số dư khi

a) x^{43} chia cho $x^2 + 1$

b) $x^{77} + x^{55} + x^{33} + x^{11} + x + 9$ cho $x^2 + 1$

Bài 2: Tính giá trị của đa thức $x^4 + 3x^3 - 8$ tại $x = 2009$

Bài 3: Chứng minh rằng

a) $x^{50} + x^{10} + 1$ chia hết cho $x^{20} + x^{10} + 1$

b) $x^{10} - 10x + 9$ chia hết cho $x^2 - 2x + 1$

c) $x^{4n+2} + 2x^{2n+1} + 1$ chia hết cho $x^2 + 2x + 1$

d) $(x + 1)^{4n + 2} + (x - 1)^{4n + 2}$ chia hết cho $x^2 + 1$

e) $(x^n - 1)(x^{n + 1} - 1)$ chia hết cho $(x + 1)(x - 1)^2$

CHUYÊN ĐỀ 11 – CÁC BÀI TOÁN VỀ BIỂU THỨC HỮU TỈ

A. Nhắc lại kiến thức:

Các bước rút gọn biểu thức hửu tỉ

a) Tìm ĐKXĐ: Phân tích mẫu thành nhân tử, cho tất cả các nhân tử khác 0

b) Phân tích tử thành nhân , chia tử và mẫu cho nhân tử chung

B. Bài tập:

Bài 1: Cho biểu thức A = $\frac{x^4-5x^2+4}{x^4-10x^2+9}$

a) Rút gọn A

b) tìm x để A = 0

c) Tìm giá trị của A khi $|2x-1|=7$

Giải

a)Đkxđ :

$$x^4 - 10x^2 + 9 \neq 0 \Leftrightarrow [(x^2)^2 - x^2] - (9x^2 - 9) \neq 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) - 9(x^2 - 1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 9) \neq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \\ x \neq 3 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq \pm 3 \end{cases}$$

Tử : $x^4 - 5x^2 + 4 = [(x^2)^2 - x^2] - (x^2 - 4) = x^2(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1)$

$= (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$

Với $x \neq \pm 1$; $x \neq \pm 3$ thì

$$A = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+3)}$$

b) $A = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

c) $|2x-1|=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=7 \\ 2x-1=-7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=8 \\ 2x=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-3 \end{array}\right.$

* Với x = 4 thì A = $\frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{(4 - 2)(4 + 2)}{(4 - 3)(4 + 3)} = \frac{12}{7}$

* Với x = - 3 thì A không xác định

2. Bài 2:

Cho biểu thức B = $\frac{2x^3 - 7x^2 - 12x + 45}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$

a) Rút gọn B

b) Tìm x để B > 0

Giải

a) Phân tích mẫu: $3x^3 - 19x^2 + 33x - 9 = (3x^3 - 9x^2) - (10x^2 - 30x) + (3x - 9)$

$= (x - 3)(3x^2 - 10x + 3) = (x - 3)[(3x^2 - 9x) - (x - 3)] = (x - 3)^2(3x - 1)$

Đkxđ: $(x - 3)^2(3x - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ và $x \neq \frac{1}{3}$

b) Phân tích tử, ta có:

$2x^3 - 7x^2 - 12x + 45 = (2x^3 - 6x^2) - (x^2 - 3x) - (15x - 45) = (x - 3)(2x^2 - x - 15)$

$= (x - 3)[(2x^2 - 6x) + (5x - 15)] = (x - 3)^2(2x + 5)$

Với $x \neq 3$ và $x \neq \frac{1}{3}$

Thì $B = \frac{2x^3 - 7x^2 - 12x + 45}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9} = \frac{(x - 3)^2(2x + 5)}{(x - 3)^2(3x - 1)} = \frac{2x + 5}{3x - 1}$

c) $B > 0 \Leftrightarrow \frac{2x + 5}{3x - 1} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ 2x + 5 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x - 1 < 0 \\ 2x + 5 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x > -\frac{5}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x < -\frac{5}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \frac{1}{3} \\ x < -\frac{5}{2} \end{array}\right.$

3. Bài 3

Cho biểu thức $C = \left(\frac{1}{1 - x} + \frac{2}{x + 1} - \frac{5 - x}{1 - x^2}\right) : \frac{1 - 2x}{x^2 - 1}$

a) Rút gọn biểu thức C

b) Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức B là số nguyên

Giải

a) Đkxđ: x $\neq \pm$ 1

$$C = \left(\frac{1}{1-x}+\frac{2}{x+1}-\frac{5-x}{1-x^2}\right):\frac{1-2x}{x^2-1}=\left[\frac{1+x+2(1-x)-5}{(1-x)(1+x)}\right].\frac{(x-1)(x+1)}{1-2x}=\frac{-2}{2x-1}$$

b) B có giá trị nguyên khi x là số nguyên thì $\frac{-2}{2x-1}$ có giá trị nguyên

$$\Leftrightarrow 2x-1 \text{ là Ư}(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=1 \\ 2x-1=-1 \\ 2x-1=2 \\ 2x-1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \\ x=1,5 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Đối chiếu Đkxđ thì chỉ có x = 0 thoả mãn

4. Bài 4

Cho biểu thức $D = \frac{x^3+x^2-2x}{x|x+2|-x^2+4}$

a) Rút gọn biểu thức D

b) Tìm x nguyên để D có giá trị nguyên

c) Tìm giá trị của D khi x = 6

Giải

a) Nếu x + 2 > 0 thì $|x+2|$ = x + 2 nên

$$D = \frac{x^3+x^2-2x}{x|x+2|-x^2+4} = \frac{x^3+x^2-2x}{x(x+2)-x^2+4}=\frac{x(x-1)(x+2)}{x(x+2)-(x-2)(x+2)}=\frac{x^2-x}{2}$$

Nếu x + 2 < 0 thì $|x+2|$ = - (x + 2) nên

$$D = \frac{x^3+x^2-2x}{x|x+2|-x^2+4} = \frac{x^3+x^2-2x}{-x(x+2)-x^2+4}=\frac{x(x-1)(x+2)}{-x(x+2)-(x-2)(x+2)}=\frac{-x}{2}$$

Nếu x + 2 = 0 $\Leftrightarrow$ x = -2 thì biểu thức D không xác định

b) Để D có giá trị nguyên thì $\frac{x^2-x}{2}$ hoặc $\frac{-x}{2}$ có giá trị nguyên

+) $\dfrac{x^2-x}{2}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \vdots 2 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) \vdots 2 \\ x > -2 \end{cases}$

Vì x(x – 1) là tích của hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 với mọi x > - 2

+) $\dfrac{-x}{2}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \begin{cases} x \vdots 2 \\ x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2k\ (k \in Z; k < -1)$

c) Khia x = 6 $\Rightarrow$ x > - 2 nên D = $\dfrac{x^2-x}{2} = \dfrac{6(6-1)}{2} = 15$

Bài tập về nhà

Bài 1:

Cho biểu thức A = $\left(\dfrac{2-x}{x+3} - \dfrac{3-x}{x+2} + \dfrac{2-x}{x^2+5x+6}\right) : \left(1 - \dfrac{x}{x-1}\right)$

a) Rút gọn A

b) Tìm x để A = 0; A > 0

Bài 2:

Cho biểu thức B = $\dfrac{3y^3-7y^2+5y-1}{2y^3-y^2-4y+3}$

a) Rút gọn B

b) Tìm số nguyên y để $\dfrac{2D}{2y+3}$ có giá trị nguyên

c) Tìm số nguyên y để B $\geq$ 1

CHUYÊN ĐỀ 12 – CÁC BÀI TOÁN VỀ BIỂU THỨC (TIẾP)

*** Dạng 2: Các biểu thức có tính quy luật**

Bài 1: Rút gọn các biểu thức

a) A = $\dfrac{3}{(1.2)^2}+\dfrac{5}{(2.3)^2}+......+\dfrac{2n+1}{\left[n(n+1)\right]^2}$

Phương pháp: Xuất phát từ hạng tử cuối để tìm ra quy luật

Ta có $\dfrac{2n+1}{\left[n(n+1)\right]^2}=\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$ Nên

A = $\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^2}-......-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{(n+1)^2}=\dfrac{n(n+1)}{(n+1)^2}$

b) B = $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right).\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right).\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)........\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

Ta có $1-\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{k^2-1}{k^2}=\dfrac{(k+1)(k-1)}{k^2}$ Nên

B = $\dfrac{1.3}{2^2}.\dfrac{2.4}{3^2}.\dfrac{3.5}{4^2}...\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\dfrac{1.3.2.4...(n-1)(n+1)}{2^2.3^2.4^2...n^2}=\dfrac{1.2.3...(n-1)}{2.3.4...(n-1)n}.\dfrac{3.4.5...(n+1)}{2.3.4....n}=\dfrac{1}{n}.\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{n+1}{2n}$

c) C = $\dfrac{150}{5.8}+\dfrac{150}{8.11}+\dfrac{150}{11.14}+......+\dfrac{150}{47.50}=150.\dfrac{1}{3}.\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{11}+......+\dfrac{1}{47}-\dfrac{1}{50}\right)$

$=50.\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{50}\right)=50.\dfrac{9}{10}=45$

d) D = $\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+\dfrac{1}{3.4.5}+......+\dfrac{1}{(n-1)n(n+1)}=\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{1}{1.2}-\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{2.3}-\dfrac{1}{3.4}+......+\dfrac{1}{(n-1)n}-\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1.2}-\dfrac{1}{n(n+1)}\right]=\dfrac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}$

Bài 2:

a) Cho A = $\dfrac{m-1}{1}+\dfrac{m-2}{2}+...+\dfrac{2}{m-2}+\dfrac{1}{n-1}$; B = $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+......+\dfrac{1}{n}$. Tính $\dfrac{A}{B}$

Ta có

$$A=\left(\frac{n}{1}+\frac{n}{2}+...+\frac{n}{n-2}+\frac{n}{n-1}\right)-\left(\underbrace{1+1+...+1}_{n-1}\right)=n\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)-(n-1)$$

$$=n\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)+1=n\left(\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)=nB\ \Rightarrow\ \frac{A}{B}=n$$

b) $A=\frac{1}{1.(2n-1)}+\frac{1}{3.(2n-3)}+......+\frac{1}{(2n-3).3}+\frac{1}{(2n-1).1}$; $B=1+\frac{1}{3}+......+\frac{1}{2n-1}$

Tính A : B

Giải

$$A=\frac{1}{2n}\left[\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n-3}\right)+...+\left(\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}+1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2n}\left[\left(1+\frac{1}{3}+......+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-3}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-3}+......+\frac{1}{3}+1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2n}.2.\left(1+\frac{1}{3}+......+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-3}\right)=\frac{1}{2n}.2.B\ \Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{1}{n}$$

Bài tập về nhà

Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+......+\frac{1}{(n-1)n}$ b) $\frac{1^2}{2^2-1}.\frac{3^2}{4^2-1}.\frac{5^2}{6^2-1}......\frac{n^2}{(n+1)^2-1}$

c) $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+......+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

*** Dạng 3: Rút gọn; tính giá trị biểu thức thoả mãn điều kiện của biến**

Bài 1: Cho $x+\frac{1}{x}=3$. Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $A=x^2+\frac{1}{x^2}$; b) $B=x^3+\frac{1}{x^3}$; c) $C=x^4+\frac{1}{x^4}$; d) $D=x^5+\frac{1}{x^5}$.

Lời giải

a) $A=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=9-2=7$;

b) $B=x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=27-9=18$;

c) $C = x^4 + \dfrac{1}{x^4} = \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 49 - 2 = 47$;

d) $A.B = \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \dfrac{1}{x^3}\right) = x^5 + \dfrac{1}{x} + x + \dfrac{1}{x^5} = D + 3 \Rightarrow D = 7.18 – 3 = 123.$

Bài 2: Cho $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 2$ (1); $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = 2$ (2).

Tính giá trị biểu thức $D = \left(\dfrac{a}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{y}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{z}\right)^2$

Từ (1) suy ra $bcx + acy + abz = 0$ (3)

Từ (2) suy ra

$$\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{b}{y}\right)^2 + \left(\frac{c}{z}\right)^2 + 2.\left(\frac{ab}{xy} + \frac{ac}{xz} + \frac{bc}{yz}\right) = 4 \Rightarrow \left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{b}{y}\right)^2 + \left(\frac{c}{z}\right)^2 = 4 - 2.\left(\frac{ab}{xy} + \frac{ac}{xz} + \frac{bc}{yz}\right) \quad (4)$$

Thay (3) vào (4) ta có $D = 4 – 2.0 = 4$

Bài 3

a) Cho $abc = 2$; rút gọn biểu thức $A = \dfrac{a}{ab + a + 2} + \dfrac{b}{bc + b + 1} + \dfrac{2c}{ac + 2c + 2}$

Ta có :

$$A = \frac{a}{ab + a + 2} + \frac{ab}{abc + ab + a} + \frac{2c}{ac + 2c + 2} = \frac{a}{ab + a + 2} + \frac{ab}{2 + ab + a} + \frac{2c}{ac + 2c + abc}$$

$$= \frac{a}{ab + a + 2} + \frac{ab}{2 + ab + a} + \frac{2c}{c(a + 2 + ab)} = \frac{a}{ab + a + 2} + \frac{ab}{2 + ab + a} + \frac{2}{a + 2 + ab} = \frac{ab + a + 2}{ab + a + 2} = 1$$

b) Cho $a + b + c = 0$; rút gọn biểu thức $B = \dfrac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \dfrac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \dfrac{c^2}{c^2 - b^2 - a^2}$

Từ $a + b + c = 0 \Rightarrow a = -(b + c) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \Rightarrow a^2 - b^2 - c^2 = 2bc$

Tương tự ta có: $b^2 - a^2 - c^2 = 2ac$; $c^2 - b^2 - a^2 = 2ab$ (Hoán vị vòng quanh), nên

$$B = \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ac} + \frac{c^2}{2ab} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} \quad (1)$$

$a + b + c = 0 \Rightarrow -a = (b + c) \Rightarrow -a^3 = b^3 + c^3 + 3bc(b + c) \Leftrightarrow -a^3 = b^3 + c^3 – 3abc$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (2)

Thay (2) vào (1) ta có $B = \dfrac{a^3+b^3+c^3}{2abc} = \dfrac{3abc}{2abc} = \dfrac{3}{2}$ (Vì $abc \neq 0$)

c) Cho a, b, c từng đôi một khác nhau thoả mãn: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Rút gọn biểu thức $C = \dfrac{a^2}{a^2+2bc} + \dfrac{b^2}{b^2+2ac} + \dfrac{c^2}{c^2+2ab}$

Từ $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow ab + ac + bc = 0$

$\Rightarrow a^2 + 2bc = a^2 + 2bc – (ab + ac + bc) = a^2 – ab + bc – ac = (a – b)(a – c)$

Tương tự: $b^2 + 2ac = (b – a)(b – c)$; $c^2 + 2ab = (c – a)(c – b)$

$$C = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} - \frac{b^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{c^2}{(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{a^2(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} - \frac{b^2(a-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} + \frac{c^2(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1$$

*** Dạng 4: Chứng minh đẳng thức thoả mãn điều kiện của biến**

1. Bài 1: Cho $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 2$ (1); $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = 2$ (2).

Chứng minh rằng: a + b + c = abc

Từ (1) suy ra $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} + 2.\left(\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ac}\right) = 4 \Rightarrow 2.\left(\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ac}\right) = 4 - \left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ac} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{a+b+c}{abc} = 1 \Leftrightarrow a + b + c = abc$

2. Bài 2: Cho a, b, c ≠ 0 và a + b + c ≠ 0 thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a+b+c}$.

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c có hai số đối nhau.

Từ đó suy ra rằng : $\dfrac{1}{a^{2009}} + \dfrac{1}{b^{2009}} + \dfrac{1}{c^{2009}} = \dfrac{1}{a^{2009} + b^{2009} + c^{2009}}$.

Ta có : $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a+b+c} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a+b}{ab} + \dfrac{a+b}{c(a+b+c)} = 0$

$$\Leftrightarrow (a+b).\frac{c(a+b+c)+ab}{abc(a+b+c)} = 0 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right.$$

Từ đó suy ra : $\frac{1}{a^{2009}}+\frac{1}{b^{2009}}+\frac{1}{c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}}+\frac{1}{(-c)^{2009}}+\frac{1}{c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}}$

$$\frac{1}{a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}+(-c)^{2009}+c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^{2009}}+\frac{1}{b^{2009}}+\frac{1}{c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}}.$$

3. Bài 3: Cho $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$ (1)

chứng minh rằng : trong ba số a, b, c tồn tại hai số bằng nhau

Từ (1) $\Rightarrow a^2c+ab^2+bc^2=b^2c+ac^2+a^2b \Rightarrow a^2(b-c)-a(c^2-b^2)+bc(c-b)=0$

$\Rightarrow (c-b)(a^2-ac=ab+bc)=0 \Rightarrow (c-b)(a-b)(a-c)=0 \Rightarrow$ đpcm

4. Bài 4: Cho $(a^2-bc)(b-abc)=(b^2-ac)(a-abc)$; $abc \neq 0$ và $a \neq b$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$

Từ GT $\Rightarrow a^2b-b^2c-a^3bc+ab^2c^2=ab^2-a^2c-ab^3c+a^2bc^2$

$\Leftrightarrow (a^2b-ab^2)+(a^2c-b^2c)=abc^2(a-b)+abc(a-b)(a+b)$

$\Leftrightarrow (a-b)(ab+ac+bc)=abc(a-b)(a+b+c)$

$\Leftrightarrow \frac{ab+ac+bc}{abc}=a+b+c \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$

5. Bài 5: Cho $a+b+c=x+y+z=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$; Chứng minh rằng: $ax^2+by^2+cz^2=0$

Từ $x+y+z=0 \Rightarrow x^2=(y+z)^2$; $y^2=(x+z)^2$; $z^2=(y+x)^2$

$\Rightarrow ax^2+by^2+cz^2=a(y+z)^2+b(x+z)^2+c(y+x)^2=\ldots$

$=(b+c)x^2+(a+c)y^2+(a+b)z^2+2(ayz+bxz+cxy)$ (1)

Từ $a+b+c=0 \Rightarrow -a=b+c$; $-b=a+c$; $-c=a+b$ (2)

Từ $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0 \Rightarrow ayz+bxz+cxy=0$ (3). Thay (2), (3) vào (1); ta có:

$ax^2+by^2+cz^2=-(ax^2+by^2+cz^2) \Rightarrow ax^2+by^2+cz^2=0$

6. Bài 6: Cho $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$; chứng minh: $\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$

Từ $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0 \Rightarrow \frac{a}{b-c}=\frac{b}{a-c}+\frac{c}{b-a}=\frac{b^2-ab+ac-c^2}{(a-b)(c-a)}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{(b-c)^2}=\frac{b^2-ab+ac-c^2}{(a-b)(c-a)(b-c)}$ (1) (Nhân hai vế với $\frac{1}{b-c}$)

Tương tự, ta có: $\frac{b}{(c-a)^2}=\frac{c^2-bc+ba-a^2}{(a-b)(c-a)(b-c)}$ (2) ; $\frac{c}{(a-b)^2}=\frac{a^2-ac+cb-b^2}{(a-b)(c-a)(b-c)}$ (3)

Cộng từng vế (1), (2) và (3) ta có đpcm

7. Bài 7:

Cho a + b + c = 0; chứng minh: $\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9$ (1)

Đặt $\frac{a-b}{c}=x$; $\frac{b-c}{a}=y; \frac{c-a}{b}=z \Rightarrow \frac{c}{a-b}=\frac{1}{x}$ $\frac{a}{b-c}=\frac{1}{y}; \frac{b}{c-a}=\frac{1}{z}$

(1) $\Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=9$

Ta có: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\left(\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}\right)$ (2)

Ta lại có: $\frac{y+z}{x}=\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right).\frac{c}{a-b}=\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}.\frac{c}{a-b}=\frac{c(a-b)(c-a-b)}{ab(a-b)}=\frac{c(c-a-b)}{ab}$

$=\frac{c\left[2c-(a+b+c)\right]}{ab}=\frac{2c^2}{ab}$ (3)

Tương tự, ta có: $\frac{x+z}{y}=\frac{2a^2}{bc}$ (4) ; $\frac{x+y}{z}=\frac{2b^2}{ac}$ (5)

Thay (3), (4) và (5) vào (2) ta có:

$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{2c^2}{ab}+\frac{2a^2}{bc}+\frac{2b^2}{ac}=3+\frac{2}{abc}(a^3+b^3+c^3)$ (6)

Từ $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$ (7) ?

Thay (7) vào (6) ta có: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{2}{abc}.3abc=3+6=9$

Bài tập về nhà:

1) cho $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$; tính giá trị biểu thức $A = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

HD: $A = \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3}$; vận dụng $a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

2) Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$; Tính giá trị biểu thức $A = \left(\frac{a}{b} + 1\right)\left(\frac{b}{c} + 1\right)\left(\frac{c}{a} + 1\right)$

3) Cho $x + y + z = 0$; chứng minh rằng: $\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}+3=0$

4) Cho $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = 1$; $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$. Chứng minh $xy + yz + xz = 0$

CHUYÊN ĐỀ 13 – CÁC BÀI TOÁN VỀ TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

A. Kiến thức:

* Tam giác đồng dạng:

a) trường hợp thứ nhất: (c.c.c)

$\Delta ABC \backsim A'B'C' \Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

b) trường hợp thứ nhất: (c.g.c)

$\Delta ABC \backsim A'B'C' \Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$; $\hat{A} = \hat{A'}$

c. Trường hợp đồng dạng thứ ba (g.g)

$\Delta ABC \backsim A'B'C' \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{A'}$; $\hat{B} = \hat{B'}$

AH; A'H'là hai đường cao tương ứng thì: $\frac{A'H'}{AH} = k$ (Tỉ số đồng dạng); $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = K^2$

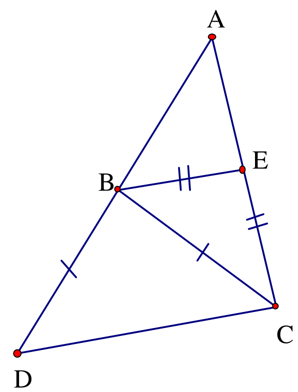
B. Bài tập áp dụng

Bài 1:

Cho ΔABC có $\hat{B} = 2\hat{C}$, AB = 8 cm, BC = 10 cm.

a)Tính AC

b)Nếu ba cạnh của tam giác trên là ba số tự nhiên liên tiếp thì mỗi cạnh là bao nhiêu?



Giải

Cách 1:

Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho:BD = BC

$\Delta ACD \backsim \Delta ABC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$

$\Rightarrow AC^2 = AB.\ AD = AB.(AB + BD) = AB(AB + BC)$

$= 8(10 + 8) = 144 \Rightarrow AC = 12$ cm

Cách 2:

Vẽ tia phân giác BE của $\widehat{ABC} \Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta ACB$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{BE}{CB} = \frac{AE + BE}{AB + CB} = \frac{AC}{AB + CB} \Rightarrow AC^2 = AB(AB + CB) = 8(8 + 10) = 144$$

$\Rightarrow AC = 12$ cm

b) Gọi AC = b, AB = a, BC = c thì từ câu a ta có $b^2 = a(a + c)$ (1)

Vì b > anên có thể b = a + 1 hoặc b = a + 2

+ Nếu b = a + 1 thì $(a + 1)^2 = a^2 + ac \Leftrightarrow 2a + 1 = ac \Leftrightarrow a(c - 2) = 1$

$\Rightarrow a = 1; b = 2; c = 3$(loại)

+ Nếu b = a + 2 thì $a(c - 4) = 4$

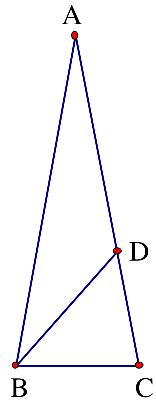
- Với a = 1 thì c = 8 (loại)

- Với a = 2 thì c = 6 (loại)

- với a = 4 thì c = 6 ; b = 5

Vậy a = 4; b = 5; c = 6

Bài 2:



Cho ΔABC cân tại A, đường phân giác BD; tính BD

biết BC = 5 cm; AC = 20 cm

Giải

Ta có $\frac{CD}{AD} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{4} \Rightarrow CD = 4$ cm và BC = 5 cm

Bài toán trở về bài 1

Bài 3:

Cho ΔABC cân tại A và O là trung điểm của BC. Một điểm O di động trên AB, lấy điểm E trên AC sao cho $CE = \frac{OB^2}{BD}$. Chứng minh rằng

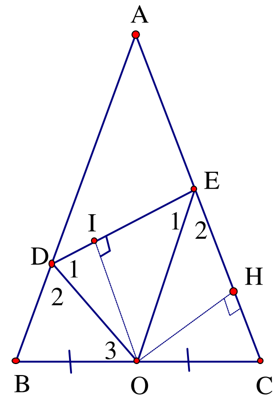
a) $\Delta DBO \backsim \Delta OCE$

b) $\Delta DOE \backsim \Delta DBO \backsim \Delta OCE$

c) DO, EO lần lượt là phân giác của các góc BDE, CED

d) khoảng cách từ O đến đoạn ED không đổi khi D di động trên AB

Giải



a) Từ $CE = \dfrac{OB^2}{BD} \Rightarrow \dfrac{CE}{OB} = \dfrac{OB}{BD}$ và $\widehat{B} = \widehat{C}$ (gt) $\Rightarrow \Delta DBO \backsim \Delta OCE$

b) Từ câu a suy ra $\widehat{O}_3 = \widehat{E}_2$ (1)

Vì B, O ,C thẳng hàng nên $\widehat{O}_3 + \widehat{DOE} + \widehat{EOC} = 180^0$ (2)

trong tam giác EOC thì $\widehat{E}_2 + \widehat{C} + \widehat{EOC} = 180^0$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{DOE} = \widehat{B} = \widehat{C}$

ΔDOE và ΔDBO có $\dfrac{DO}{DB} = \dfrac{OE}{OC}$ (Do $\Delta DBO \backsim \Delta OCE$)

và $\dfrac{DO}{DB} = \dfrac{OE}{OB}$ (Do OC = OB) và $\widehat{DOE} = \widehat{B} = \widehat{C}$

nên $\Delta DOE \backsim \Delta DBO \backsim \Delta OCE$

c) Từ câu b suy ra $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 \Rightarrow$ DO là phân giác của các góc BDE

Củng từ câu b suy ra $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$ EO là phân giác của các góc CED

c) Gọi OH, OI là khoảng cách từ O đến DE, CE thì OH = OI, mà O cố định nên OH không đổi $\Rightarrow$ OI không đổi khi D di động trên AB

Bài 4: (Đề HSG huyện Lộc hà – năm 2007 – 2008)

Cho ΔABC cân tại A, có BC = 2a, M là trung điểm BC, lấy D, E thuộc AB, AC sao cho $\widehat{DME} = \widehat{B}$

a) Chứng minh tích BD. CE không đổi

b)Chứng minh DM là tia phân giác của $\widehat{BDE}$

c) Tính chu vi của ΔAED nếu ΔABC là tam giác đều

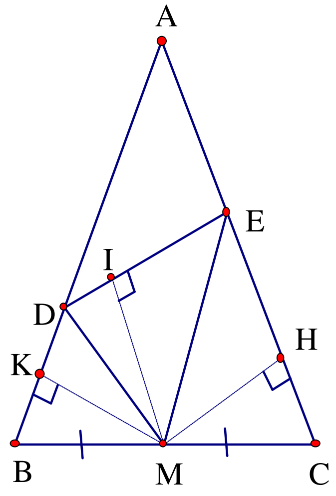
Giải

a) Ta có $\widehat{DMC} = \widehat{DME} + \widehat{CME} = \widehat{B} + \widehat{BDM}$, mà $\widehat{DME} = \widehat{B}$ (gt)

nên $\widehat{CME} = \widehat{BDM}$, kết hợp với $\widehat{B} = \widehat{C}$ (ΔABC cân tại A)

suy ra $\Delta BDM \backsim \Delta CME$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BD}{CM} = \dfrac{BM}{CE} \Rightarrow BD.\ CE = BM.\ CM = a^2$ không đổi



b) $\Delta BDM \backsim \Delta CME \Rightarrow \dfrac{DM}{ME} = \dfrac{BD}{CM} \Rightarrow \dfrac{DM}{ME} = \dfrac{BD}{BM}$

(do BM = CM)$\Rightarrow$ $\Delta DME \backsim \Delta DBM$ (c.g.c) $\Rightarrow$ $\widehat{MDE} = \widehat{BMD}$ hay

DM là tia phân giác của $\widehat{BDE}$

c) chứng minh tương tự ta có EM là tia phân giác của $\widehat{DEC}$

kẻ $MH \perp CE$, $MI \perp DE$, $MK \perp DB$ thì MH = MI = MK $\Rightarrow$ Δ DKM = ΔDIM

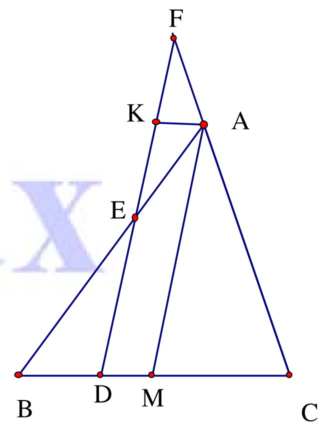
$\Rightarrow$DK =DI $\Rightarrow$ $\Delta EIM = \Delta EHM$ $\Rightarrow$EI = EH

Chu vi ΔAED là P_{AED} = AD + DE + EA = AK +AH = 2AH (Vì AH = AK)

ΔABC là tam giác đều nên suy ra ΔCME củng là tam giác đều CH = $\dfrac{MC}{2} = \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow$ AH = 1,5a $\Rightarrow$ P_{AED} = 2 AH = 2. 1,5 a = 3a

Bài 5:



Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Qua điểm D thuộc cạnh BC, vẽ đường thẳng song song với AM, cắt AB, AC tại E và F

a) chứng minh DE + DF không đổi khi D di động trên BC

b) Qua A vẽ đường thẳng song song với BC, cắt FE tại K. Chứng minh rằng K là trung điểm của FE

Giải

a) DE // AM $\Rightarrow \dfrac{DE}{AM} = \dfrac{BD}{BM} \Rightarrow DE = \dfrac{BD}{BM}.AM$ (1)

DF // AM $\Rightarrow \dfrac{DF}{AM} = \dfrac{CD}{CM} \Rightarrow DF = \dfrac{CD}{CM}.AM = \dfrac{CD}{BM}.AM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

DE + DF = $\dfrac{BD}{BM}.AM + \dfrac{CD}{BM}.AM = \left(\dfrac{BD}{BM} + \dfrac{CD}{BM}\right).AM = \dfrac{BC}{BM}.AM = 2AM$ không đổi

b) AK // BC suy ra $\Delta FKA \backsim \Delta AMC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{FK}{AM} = \dfrac{KA}{CM}$ (3)

$\frac{EK}{ED} = \frac{KA}{BD} \Rightarrow \frac{EK}{ED+EK} = \frac{KA}{BD+KA} \Rightarrow \frac{EK}{KD} = \frac{KA}{BD+DM} \Rightarrow \frac{EK}{AM} = \frac{KA}{BM} \Rightarrow \frac{EK}{AM} = \frac{KA}{CM}$ (2)

(Vì CM = BM)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{FK}{AM} = \frac{EK}{AM}$ $\Rightarrow$ FK = EK hay K là trung điểm của FE

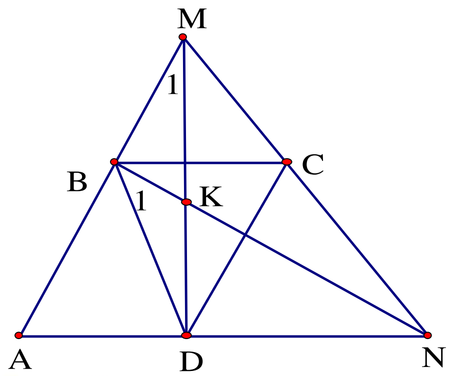
Bài 6: (Đề HSG huyện Thạch hà năm 2003 – 2004)

Cho hình thoi ABCD cạnh a có $\widehat{A} = 60^0$, một đường thẳng bất kỳ qua C cắt tia đối của các tia BA, DA tại M, N

a) Chứng minh rằng tích BM. DN có giá trị không đổi

b) Gọi K là giao điểm của BN và DM. Tính số đo của góc BKD

Giải



a) BC // AN $\Rightarrow \frac{MB}{BA} = \frac{CM}{CN}$ (1)

CD// AM $\Rightarrow \frac{CM}{CN} = \frac{AD}{DN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\frac{MB}{BA} = \frac{AD}{DN} \Rightarrow MB.DN = BA.AD = a.a = a^2$

b) ΔMBD và ΔBDN có $\widehat{MBD} = \widehat{BDN} = 120^0$

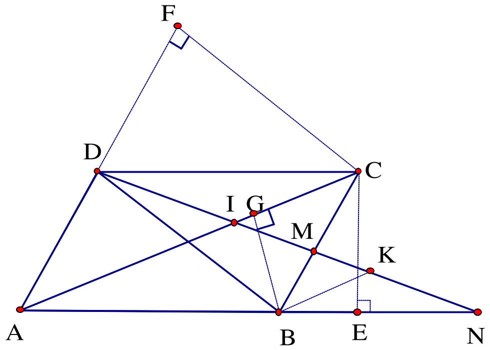
$\frac{MB}{BD} = \frac{MB}{BA} = \frac{CM}{CN} = \frac{AD}{DN} = \frac{BD}{DN}$(Do ABCD là hình thoi có $\widehat{A} = 60^0$ nên AB = BC = CD = DA)

$\Rightarrow \Delta MBD \backsim \Delta BDN$

Suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{B_1}$. ΔMBD và ΔBKD có $\widehat{BDM} = \widehat{BDK}$ và $\widehat{M_1} = \widehat{B_1}$ nên $\widehat{BKD} = \widehat{MBD} = 120^0$

Bài 7:

Cho hình bình hành ABCD có đường chéo lớn AC,tia Dx cắt SC, AB, BC lần lượt tại I, M, N. Vẽ CE vuông góc với AB, CF vuông góc với AD, BG vuông góc với AC. Gọi K là điểm đối xứng với D qua I. Chứng minh rằng



a) $IM.\ IN = ID^2$

b) $\dfrac{KM}{KN} = \dfrac{DM}{DN}$

c) $AB.\ AE + AD.\ AF = AC^2$

Giải

a) Từ AD // CM $\Rightarrow \dfrac{IM}{ID} = \dfrac{CI}{AI}$ (1)

Từ CD // AN $\Rightarrow \dfrac{CI}{AI} = \dfrac{ID}{IN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{IM}{ID} = \dfrac{ID}{IN}$ hay $ID^2 = IM.\ IN$

b) Ta có $\dfrac{DM}{MN} = \dfrac{CM}{MB} \Rightarrow \dfrac{DM}{MN + DM} = \dfrac{CM}{MB + CM} \Rightarrow \dfrac{DM}{DN} = \dfrac{CM}{CB}$ (3)

Từ $ID = IK$ và $ID^2 = IM.\ IN$ suy ra $IK^2 = IM.\ IN$

$\Rightarrow \dfrac{IK}{IM} = \dfrac{IN}{IK} \Rightarrow \dfrac{IK - IM}{IM} = \dfrac{IN - IK}{IK} \Rightarrow \dfrac{KM}{IM} = \dfrac{KN}{IK} \Rightarrow \dfrac{KM}{KN} = \dfrac{IM}{IK} \Rightarrow \dfrac{KM}{KN} = \dfrac{IM}{ID} = \dfrac{CM}{AD} = \dfrac{CM}{CB}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{KM}{KN} = \dfrac{DM}{DN}$

c) Ta có $\Delta AGB \backsim \Delta AEC \Rightarrow \dfrac{AE}{AG} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow AB.AE = AC.AG \Rightarrow AB.\ AE = AG(AG + CG)$ (5)

$\Delta CGB \backsim \Delta AFC \Rightarrow \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{CG}{CB} = \dfrac{CG}{AD}$ (vì CB = AD)

$\Rightarrow AF\ .\ AD = AC.\ CG \Rightarrow AF\ .\ AD = (AG + CG)\ .CG$ (6)

Cộng (5) và (6) vế theo vế ta có: $AB.\ AE + AF.\ AD = (AG + CG)\ .AG + (AG + CG)\ .CG$

$\Leftrightarrow AB.\ AE + AF.\ AD = AG^2 + 2.AG.CG + CG^2 = (AG + CG)^2 = AC^2$

Vậy: $AB.\ AE + AD.\ AF = AC^2$

Bài tập về nhà

Bài 1

Cho Hình bình hành ABCD, một đường thẳng cắt AB, AD, AC lần lượt tại E, F, G

Chứng minh: $\frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}=\frac{AC}{AG}$

HD: Kẻ DM // FE, BN // FE (M, N thuộc AC)

Bài 2:

Qua đỉnh C của hình bình hành ABCD, kẻ đường thẳng cắt BD, AB, AD ở E, G, F

chứng minh:

a) $DE^2=\frac{FE}{EG}.BE^2$

b) $CE^2 = FE.GE$

(Gợi ý: Xét các tam giác DFE và BCE, DEC và BEG)

Bài 3

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, trung tuyến BM, phân giác CD cắt nhau tại một điểm. Chứng minh rằng

a) $\frac{BH}{HC}.\frac{CM}{MA}.\frac{AD}{BD}=1$

b) BH = AC

CHUYÊN ĐỀ 14 – PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

A.Mục tiêu:

* Củng cố, ôn tập kiến thức và kỹ năng giải các Pt bậc cao bằng cách phân tích thành nhân tử

* Khắc sâu kỹ năng phân tích đa thức thành nhân tử và kỹ năng giải Pt

B. Kiến thức và bài tập:

I. Phương pháp:

* Cách 1: Để giải các Pt bậc cao, ta biến đổi, rút gọn để dưa Pt về dạng Pt có vế trái là một đa thức bậc cao, vế phải bằng 0, vận dụng các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử để đưa Pt về dạng pt tích để giải

* Cách 2: Đặt ẩn phụ

II. Các ví dụ:

1.Ví dụ 1: Giải Pt

a) $(x + 1)^2(x + 2) + (x – 1)^2(x – 2) = 12$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 2x^3 + 10x = 12 \Leftrightarrow x^3 + 5x – 6 = 0 \Leftrightarrow (x^3 – 1) + (5x – 5) \Leftrightarrow (x – 1)(x^2 + x + 6) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x^2 + x + 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1$ (Vì $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} = 0$ vô nghiệm)

b) $x^4 + x^2 + 6x – 8 = 0$ (1)

Vế phải của Pt là một đa thức có tổng các hệ số bằng 0, nên có một nghiệm x = 1 nên có nhân tử là x – 1, ta có

(1) $\Leftrightarrow (x^4 – x^3) + (x^3 – x^2) + (2x^2 – 2x) + (8x – 8) = 0$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x – 1)(x^3 + x^2 + 2x + 8) \Leftrightarrow (x – 1)[(x^3 + 2x^2) – (x^2 + 2x) + (4x – 8)] = 0$

$\Leftrightarrow (x – 1)[x^2(x + 2) – x(x + 2) + 4(x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x – 1)(x + 2)(x^2 – x + 4) = 0$ ....

c) $(x – 1)^3 + (2x + 3)^3 = 27x^3 + 8$

$\Leftrightarrow x^3 – 3x^2 + 3x – 1 + 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 – 27x^3 – 8 = 0$

$\Leftrightarrow - 18x^3 + 33x^2 + 57 x + 18 = 0 \Leftrightarrow 6x^3 - 11x^2 - 19x - 6 = 0$ (2)

Ta thấy Pt có một nghiệm x = 3, nên vế trái có nhân tử x – 3:

(2) $\Leftrightarrow (6x^3 - 18x^2) + (7x^2 - 21x) + (2x - 6) = 0$

$\Leftrightarrow 6x^2(x - 3) + 7x(x - 3) + 2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(6x^2 + 7x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)[(6x^2 + 3x) + (4x + 2)] = 0 \Leftrightarrow (x - 3)[3x(2x + 1) + 2(2x + 1)] = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(2x + 1)(3x + 2)$ .....

d) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24 \Leftrightarrow [(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) + 1] - 25 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 5x - 1)^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 5x - 1 + 5)(x^2 + 5x - 1 - 5) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x - 6) = 0 \Leftrightarrow [(x^2 + x) + (4x + 4)][(x^2 - x) + (6x - 6)] = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x + 4)(x - 1)(x + 6) = 0$ ....

e) $(x^2 + x + 1)^2 = 3(x^4 + x^2 + 1) \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^2 - 3(x^4 + x^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^2 - 3(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)[x^2 + x + 1 - 3(x^2 - x + 1)] = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(-2x^2 + 4x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x - 1)^2 = 0$...

f) $x^5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 \Leftrightarrow (x^5 - 1) - (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$

+) $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

+) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^4 + x^3) + (x + 1) + x^2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^3 + 1) + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2(x^2 - x + 1) + x^2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2[(x^2 - 2.x.\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) + \frac{3}{4}] + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] + x^2 = 0$ Vô nghiệm vì $(x + 1)^2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \geq 0$ nhưng

không xẩy ra dấu bằng

Bài 2:

a) $(x^2 + x - 2)(x^2 + x - 3) = 12 \Leftrightarrow (x^2 + x - 2)[(x^2 + x - 2) - 1] - 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + x - 2)^2 - (x^2 + x - 2) - 12 = 0$

Đặt $x^2 + x - 2 = y$ Thì

$(x^2 + x - 2)^2 - (x^2 + x - 2) - 12 = 0 \Leftrightarrow y^2 - y - 12 = 0 \Leftrightarrow (y - 4)(y + 3) = 0$

* $y - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3x) - (2x + 6) = 0$