11. Hai số a, b lần lượt thỏa mãn các hệ thức sau :
$a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = 0$ và $b^3 - 3b^2 + 5b + 11 = 0$. Hãy tính : $D = a + b$.

12. Cho $a^3 - 3ab^2 = 19$ và $b^3 - 3a^2b = 98$. Hãy tính : $E = a^2 + b^2$.

13. Cho $x + y = a + b$ và $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. Tính giá trị của các biểu thức sau :
a) $x^3 + y^3$; b) $x^4 + y^4$; c) $x^5 + y^5$; d) $x^6 + y^6$;
e) $x^7 + y^7$; f) $x^8 + y^8$; g) $x^{2008} + y^{2008}$.

3. Chuyên đề: Phân tích đa thức thành nhân tử

I- Phương pháp tách một hạng tử thành nhiều hạng tử khác:

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$a,\ x^2 - 5x + 6$ d, $x^2 - 13x + 36$

$b,\ 3x^2 - 8x + 4$ e, $x^2 + 3x - 18$

$c,\ x^2 + 8x + 7$ f, $x^2 - 5x - 24$

$g,\ 3x^2 - 16x + 5$ h, $8x^2 + 30x + 7$

$i,\ 2x^2 - 5x - 12$ k, $6x^2 - 7x - 20$

Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1, $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ 2, $x^3 + 2x - 3$

3, $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ 4, $x^3 - 7x + 6$

5, $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$ 6, $4x^3 - 13x^2 + 9x - 18$

7, $x^3 - 4x^2 - 8x + 8$ 8, $-x^3 - 6x^2 + 6x + 1$

9, $6x^3 - x^2 - 486x + 81$ 10, $x^3 - 7x - 6$

11, $x^3 - 3x + 2$ 12, $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$

13, $x^3 + 8x^2 + 17x + 10$ 14, $x^3 + 3x^2 + 6x + 4$

(Đa thức đã cho có nhiệm nguyên hoặc nghiệm hữu tỉ)

II- Phương pháp thêm và bớt cùng một hạng tử

1) <u>Dạng 1</u>: *Thêm bớt cùng một hạng tử làm xuất hiện hằng đẳng thức hiệu của hai bình phương: $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$*

<u>Bài 1</u>: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1, $(1+x^2)^2-4x(1-x^2)$	2, $\left(x^2-8\right)^2+36$
3, x^4+4	4, x^4+64
5, $64x^4+1$	6, $81x^4+4$
7, $4x^4+81$	8, $64x^4+y^4$
9, x^4+4y^4	10, x^4+x^2+1

2) Dạng 2: *Thêm bớt cùng một hạng tử làm xuất hiện thừa số chung*

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1, x^7+x^2+1 2, x^7+x^5+1

3, x^5+x^4+1 4, x^5+x+1

5, x^8+x^7+1 6, x^5-x^4-1

7, x^5+x-1 8, $x^{10}+x^5+1$

III- Phương pháp đổi biến

Bài 1:Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

1, $x(x+4)(x+6)(x+10)+128$ 2, $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

3, $(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2$ 4, $(x^2+x)^2+4x^2+4x-12$

5, $x^2+2xy+y^2+2x+2y-15$ 6, $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$

7, $6x^4-11x^2+3$ 8, $(x^2+x)^2+3(x^2+x)+2$

9, $x^2-2xy+y^2+3x-3y-10$ 10, $(x^2+2x)^2+9x^2+18x+20$

11, $x^2-4xy+4y^2-2x+4y-35$ 12, $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+16$

Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

1, $x^4+6x^3+7x^2-6x+1$

2, $(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2+(xy+yz+zx)^2$

IV- Phương pháp xét giá trị riêng

Phương pháp: Trước hết ta xác định dạng các thừa số chứa biến của đa thức, rồi gán cho các biến các giá trị cụ thể để xác định thừa số còn lại.

Ví dụ: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$a,\ P=x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$$
$$b,\ Q=a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2+(a+b-c)\ (b+c-a)(c+a-b)$$

Giải

a, Giả sử thay x bởi y thì P = $y^2(y-z)+y^2(z-y)=0$

Như vậy P chứa thừa số x — y

Ta lại thấy nếu thay x bởi y, thay y bởi z, thay z bởi x thì P không đổi(ta nói đa thức P có thể hoán vị vòng quanh bởi các biến x, y, z). Do đó nếu P đã chúa thùa số x — y thì cũng chúa thừa số y — z, z — x. Vậy P phải có dạng

P = k(x — y)(y — z)(z — x).Ta thấy k phải là hằng số(không chúa biến) vì P có bậc 3 đối với tập hợp các biến x, y, z còn tích (x — y)(y — z)(z — x) cũng có bậc ba đối với tập hợp các biến x, y, z. Vì đẳng thức

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=k(x-y)(y-z)(z-x)$$

đúng với mọi x, y, z nên ta gán cho các biến x, y, z các giá trị riêng, chẳng hạn x = 2, y = 1, z = 0

ta được k = -1

Vậy P =- (x — y)(y — z)(z — x) = (x — y)(y — z)(x - z)

Các bài toán

<u>Bài 1</u>: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$M=a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2+(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

$N=a(m-a)^2+b(m-b)^2+c(m-c)^2-abc$, với 2m = a+ b + c.

Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$a) A=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc.$
$b) B=a(a+2b)^3-b(2a+b)^3.$
$c) C=ab(a+b)-bc(b+c)+ac(a-c).$
$d) D=(a+b)(a^2-b^2)+(b+c)(b^2-c^2)+(c+a)(c^2-a^2)$
$e) E=a^3(c-b^2)+b^3(a-c^2)+c^3(b-a^2)+abc(abc-1).$
$f) f=a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3.$
$g) G=a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)+a^2c^2(c-a).$
$h) H=a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b).$

V-Phương pháp hệ số bất định

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$a) A=x^4-6x^3+12x^2-14x+3$
$b) B=4x^4+4x^3+5x^2+2x+1$
$c) C=3x^2+22xy+11x+37y+7y^2+10$
$d) D=x^4-7x^3+14x^2-7x+1$
$e) E=x^4-8x+63$

Bài tập:

Ví dụ . Phân tích biểu thức sau thành nhân tử :

$$A = x^3 - 3(a^2 + b^2)x + 2(a^3 + b^3)$$

Lời giải

Đặt S = a + b và P = ab, thì $a^2 + b^2 = S^2 - 2P$; $a^3 + b^3 = S^3 - 3SP$. Vì vậy :

$A = x^3 - 3(S^2 - 2P)x + 2(S^3 - 3SP) =$
$(x^3 - S^3) - (3S^2x - 3S^3) + (6Px - 6SP)$

$= (x - S)(x^2 + Sx + S^2) - 3S^2(x - S) + 6P(x - S)$

$= (x - S)(x^2 + Sx - 2S^2 + 6P)$

$= (x — a — b)[x^2 + (a + b)x — 2(a + b)^2 + 6ab]$

$= (x — a — b)[x^2 + (a + b)x — 2(a^2$

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^3 + 4x^2 — 29x + 24$;
b) $x^4 + 6x^3 + 7x^2 — 6x + 1$;
c) $(x^2 — x + 2)^2 + (x — 2)^2$;
d) $6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$;
e) $x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1$.
f) $x^8 + x^4 + 1$;

g) $x^{10} + x^5 + 1$;

h) $x^{12} + 1$;

i) $(x + y + z)^3 — x^3 — y^3 — z^3$;

k) $(x + y + z)^5 — x^5 — y^5 — z^5$.

4. Chuyên đề: Xác định đa thức

* Định lí Beout (BêZu) và ứng dụng:

1) Định lí BêZu:

Dư trong phép chia đa thức f(x) cho nhị thức x - a bằng f(a) (giá trị của f(x) tại x = a): $f(x) = (x - a)q(x) + f(a)$

(Beout, 1730 - 1783, nhà toán học Pháp)

Hệ quả: Nếu a là nghiệm của đa thừc f(x) thì f(x) chia hết cho x - a.

áp dụng: Định lí BêZu có thể dùng để phân tích một đa thức thành nhân tử. Thực hiện như sau:

Bước 1: Chọn một giá trị x = a nào đó và thử xem x = a có phải là nghiệm của f(x) không.

Bước 2: Nếu f(a) = 0, theo định lí BêZu ta có: $f(x) = (x - a)p(x)$