171. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}$ với $0 < x < 1$.

172. Tìm GTLN của : a) $A = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2}$ biết $x + y = 4$; b) $B = \frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-2}}{y}$

173. Cho $a = \sqrt{1997} - \sqrt{1996}$; $b = \sqrt{1998} - \sqrt{1997}$. So sánh a với b, số nào lớn hơn ?

174. Tìm GTNN, GTLN của : a) $A = \frac{1}{5 + 2\sqrt{6 - x^2}}$ b) $B = \sqrt{-x^2 + 2x + 4}$.

175. Tìm giá trị lớn nhất của $A = x\sqrt{1 - x^2}$.

176. Tìm giá trị lớn nhất của $A = | x - y |$ biết $x^2 + 4y^2 = 1$.

177. Tìm GTNN, GTLN của $A = x^3 + y^3$ biết $x, y \geq 0$; $x^2 + y^2 = 1$.

178. Tìm GTNN, GTLN của $A = x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$ biết $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

179. Giải phương trình : $\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2 - 3x + 2} + (x-2)\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = 3$.

180. Giải phương trình : $x^2 + 2x - 9 = \sqrt{6 + 4x + 2x^2}$.

181. CMR, $\forall n \in \mathbf{Z}_+$, ta có : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2$.

182. Cho $A = \frac{1}{\sqrt{1.1999}} + \frac{1}{\sqrt{2.1998}} + \frac{1}{\sqrt{3.1997}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1999.1}}$. Hãy so sánh A và 1,999.

183. Cho 3 số x, y và $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ là số hữu tỉ. Chứng minh rằng mỗi số $\sqrt{x}$; $\sqrt{y}$ đều là số hữu tỉ

184. Cho $a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - 2\sqrt{6}$; $b = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$. CMR : a, b là các số hữu tỉ.

185. Rút gọn biểu thức : $P = \left(\frac{2 + \sqrt{a}}{a + 2\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} - 2}{a - 1} \right) . \frac{a\sqrt{a} + a - \sqrt{a} - 1}{\sqrt{a}}$. $(a > 0 ; a \neq 1)$

186. Chứng minh : $\left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} + 4\sqrt{a} \right)\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) = 4a$. $(a > 0 ; a \neq 1)$

187. Rút gọn : $\dfrac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}$ $\quad(0<x<2)$

188. Rút gọn : $\left(\sqrt{a}+\dfrac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\left(\dfrac{a}{\sqrt{ab}+b}+\dfrac{b}{\sqrt{ab}-a}-\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)$

189. Giải bất phương trình : $2\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\le\dfrac{5a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$ $\quad(a\ne 0)$

190. Cho $A=\left(1-a^2\right):\left[\left(\dfrac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\left(\dfrac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)\right]+1$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A với a = 9.

c) Với giá trị nào của a thì | A | = A.

191. Cho biểu thức : $B=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1}{a+\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}\left(\dfrac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}\right)$.

a) Rút gọn biểu thức B.

b) Tính giá trị của B nếu $a=6+2\sqrt{5}$.

c) So sánh B với -1.

192. Cho $A=\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}\right):\left(1+\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm b biết | A | = -A.

c) Tính giá trị của A khi $a=5+4\sqrt{2}$; $b=2+6\sqrt{2}$.

193. Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của A nếu $a=\dfrac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}}$.

c) Tìm giá trị của a để $\sqrt{A}>A$.

194. Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)\left(\dfrac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$.

a) Rút gọn biểu thức A. b) Tìm giá trị của A để A = - 4

195. Thực hiện phép tính : $A=\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right):\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right)$

196. Thực hiện phép tính : $B=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

197. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}}:\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).\frac{1}{x+y+2\sqrt{xy}}+\frac{2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^3}.\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right]$

với $x=2-\sqrt{3}$; $y=2+\sqrt{3}$.

b) $B=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}-\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}}{\sqrt{2(x-y)}}$ với $x>y>0$

c) $C=\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$ với $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}-\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)$; $0<a<1$

d) $D=(a+b)-\sqrt{\frac{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}{c^2+1}}$ với a, b, c > 0 và ab + bc + ca = 1

e) $E=\frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}.\sqrt{2x-1}$

198. Chứng minh : $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{\frac{x^2-4}{x}}}+\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{\frac{x^2-4}{x}}}=\sqrt{\frac{2x+4}{\sqrt{x}}}$ với $x\ge 2$.

199. Cho $a=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$, $b=\frac{-1-\sqrt{2}}{2}$. Tính a^7+b^7.

200. Cho $a=\sqrt{2}-1$

a) Viết a^2 ; a^3 dưới dạng $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$, trong đó m là số tự nhiên.

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, số a^n viết được dưới dạng trên.

201. Cho biết $x=\sqrt{2}$ là một nghiệm của phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0$ với các hệ số hữu tỉ. Tìm các nghiệm còn lại.

202. Chứng minh $2\sqrt{n}-3<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2$ với $n\in N$; $n\geq 2$.

203. Tìm phần nguyên của số $\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}$ (có 100 dấu căn).

204. Cho $a=2+\sqrt{3}$. Tính a) $\left[a^2\right]$ b) $\left[a^3\right]$.

205. Cho 3 số x, y, $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ là số hữu tỉ. Chứng minh rằng mỗi số $\sqrt{x},\sqrt{y}$ đều là số hữu tỉ

206. CMR, $\forall n\geq 1$, $n\in N$: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2$

207. Cho 25 số tự nhiên a_1 , a_2 , a_3 , … a_{25} thỏa đk : $\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{25}}}=9$.
Chứng minh rằng trong 25 số tự nhiên đó tồn tại 2 số bằng nhau.

208. Giải phương trình $\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{x}}}+\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{x}}}=\sqrt{2}$.

209. Giải và biện luận với tham số a $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\sqrt{a}$.

210. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x}\left(1+y\right)=2y\\ \sqrt{y}\left(1+z\right)=2z\\ \sqrt{z}\left(1+x\right)=2x\end{cases}$

211. Chứng minh rằng :

a) Số $\left(8+3\sqrt{7}\right)^7$ có 7 chữ số 9 liền sau dấu phẩy.

b) Số $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{10}$ có mười chữ số 9 liền sau dấu phẩy.

212. Kí hiệu a_n là số nguyên gần $\sqrt{n}$ nhất ($n\in N^*$), ví dụ :

$\sqrt{1}=1\Rightarrow a_1=1$; $\sqrt{2}\approx 1,4\Rightarrow a_2=1$; $\sqrt{3}\approx 1,7\Rightarrow a_3=2$; $\sqrt{4}=2\Rightarrow a_4=2$

Tính : $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_{1980}}$.

213. Tìm phần nguyên của các số (có n dấu căn) : a) $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

b) $a_n = \sqrt{4+\sqrt{4+...+\sqrt{4+\sqrt{4}}}}$ c) $a_n = \sqrt{1996+\sqrt{1996+...+\sqrt{1996+\sqrt{1996}}}}$

214. Tìm phần nguyên của A với $n \in N$: $A = \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + 8n + 3}}$

215. Chứng minh rằng khi viết số $x = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{200}$ dưới dạng thập phân, ta được chữ số liền trước dấu phẩy là 1, chữ số liền sau dấu phẩy là 9.

216. Tìm chữ số tận cùng của phần nguyên của $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{250}$.

217. Tính tổng $A = \left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + ... + \left[\sqrt{24}\right]$

218. Tìm giá trị lớn nhất của $A = x^2(3 - x)$ với $x \ge 0$.

219. Giải phương trình : a) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{7-x} = 2$ b) $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$.

220. Có tồn tại các số hữu tỉ dương a, b không nếu : **a)** $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt[4]{2}$.

221. Chứng minh các số sau là số vô tỉ : a) $\sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$

222. Chứng minh bất đẳng thức Cauchy với 3 số không âm : $\dfrac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$.

223. Cho a, b, c, d > 0. Biết $\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b} + \dfrac{c}{1+c} + \dfrac{d}{1+d} \le 1$. Chứng minh rằng : $abcd \le \dfrac{1}{81}$.

224. Chứng minh bất đẳng thức : $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{z^2} + \dfrac{z^2}{x^2} \ge \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$ với $x, y, z > 0$

225. Cho $a = \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$; $b = 2\sqrt[3]{3}$. Chứng minh rằng : $a < b$.

226. a) Chứng minh với mọi số nguyên dương n, ta có : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$.

b) Chứng minh rằng trong các số có dạng $\sqrt[n]{n}$ (n là số tự nhiên), số $\sqrt[3]{3}$ có giá trị lớn nhất

227. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}$.

228. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^2(2 - x)$ biết $x \le 4$.

229. Tìm giá trị lớn nhất của $A = x^2\sqrt{9-x^2}$.

230. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $A = x(x^2-6)$ biết $0 \le x \le 3$.

231. Một miếng bìa hình vuông có cạnh 3 dm. Ở mỗi góc của hình vuông lớn, người ta cắt đi một hình vuông nhỏ rồi gấp bìa để được một cái hộp hình hộp chữ nhật không nắp. Tính cạnh hình vuông nhỏ để thể tích của hộp là lớn nhất.

232. Giải các phương trình sau :

a) $1+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x+3}$ b) $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$

c) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$ d) $2\sqrt[3]{2x-1}=x^3+1$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x-\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-4}}{2}}=2-\sqrt{3}$ g) $\dfrac{\sqrt[3]{7-x}-\sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x}+\sqrt[3]{x-5}}=6-x$

h) $\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x^2-1}=1$ i) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$

k) $\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{1-x}=3$ l) $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x}=\sqrt[4]{a+b-2x}$ (a, b là tham số)

233. Rút gọn $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$.

234. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}$

235. Xác định các số nguyên a, b sao cho một trong các nghiệm của phương trình : $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$ là $1+\sqrt{3}$.

236. Chứng minh $\sqrt[3]{3}$ là số vô tỉ.

237. Làm phép tính : a) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}.\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$ b) $\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}.\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

238. Tính : $a=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

239. Chứng minh : $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-2\sqrt{5}}=2$.

240. Tính : $A=\left(\sqrt[4]{7+\sqrt{48}}-\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}\right).\sqrt[4]{7+\sqrt{48}}$.

241. Hãy lập phương trình f(x) = 0 với hệ số nguyên có một nghiệm là : $x=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$.

242. Tính giá trị của biểu thức : $M = x^3 + 3x - 14$ với $x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}$.

243. Giải các phương trình : a) $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{25-x} = 3$.

b) $\sqrt[3]{x-9} = (x-3)^2 + 6$ c) $\sqrt{x^2+32} - 2\sqrt[4]{x^2+32} = 3$

244. Tìm GTNN của biểu thức : $A = \sqrt{x^3 + 2\left(1+\sqrt{x^3+1}\right)} + \sqrt{x^3 + 2\left(1-\sqrt{x^3+1}\right)}$.

245. Cho các số dương a, b, c, d. Chứng minh : $a + b + c + d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$.

246. Rút gọn : $P = \dfrac{8-x}{2-\sqrt[3]{x}} : \left(2 + \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}}\right) + \left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right)\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}\right)$; $x > 0, x \neq$
8

247. CMR : $x = \sqrt[3]{5-\sqrt{17}} + \sqrt[3]{5+\sqrt{17}}$ là nghiệm của phương trình $x^3 - 6x - 10 = 0$.

248. Cho $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}} + \sqrt[3]{4-\sqrt{15}}$. Tính giá trị biểu thức $y = x^3 - 3x + 1987$.

249. Chứng minh đẳng thức : $\dfrac{a + \sqrt{2+\sqrt{5}}.\sqrt{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}}{\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.\sqrt[3]{\sqrt{9+4\sqrt{5}}} - \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}} = -\sqrt[3]{a} - 1$.

250. Chứng minh bất đẳng thức : $\left(\sqrt[3]{\sqrt{9+4\sqrt{5}}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right).\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} - 2{,}1 < 0$.

251. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A = \dfrac{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$ b) $\left(\dfrac{b}{b+8} - \dfrac{4b}{\left(\sqrt[3]{b}+2\right)^3}\right).\left(\dfrac{1+2\sqrt[3]{\dfrac{1}{b}}}{1-2.\dfrac{1}{\sqrt[3]{b}}}\right) - \dfrac{24}{b+8}$

c) $C = \left(\dfrac{a\sqrt[3]{a} - 2a\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab}} + \dfrac{\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}\right).\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$.

252. Cho $M = \sqrt{x^2 - 4a + 9} + \sqrt{x^2 - 4x + 8}$. Tính giá trị của biểu thức M biết rằng:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 9} - \sqrt{x^2 - 4x + 8} = 2.$$

253. Tìm giá trị nhỏ nhất của : $P = \sqrt{x^2 - 2ax + a^2} + \sqrt{x^2 - 2bx + b^2}$ $(a < b)$

254. Chứng minh rằng, nếu a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác thì :

$$abc \ge (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$$

255. Tìm giá trị của biểu thức $| x - y |$ biết $x + y = 2$ và $xy = -1$

256. Biết $a - b = \sqrt{2} + 1$, $b - c = \sqrt{2} - 1$, tìm giá trị của biểu thức :

$$A = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca.$$

257. Tìm x, y, z biết rằng : $x + y + z + 4 = 2\sqrt{x-2} + 4\sqrt{y-3} + 6\sqrt{z-5}$.

258. Cho $y = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$. CMR, nếu $1 \le x \le 2$ thì giá trị của y là một hằng số.

259. Phân tích thành nhân tử : $M = 7\sqrt{x-1} - \sqrt{x^3 - x^2} + x - 1$ $(x \ge 1)$.

260. Trong tất cả các hình chữ nhật có đường chéo bằng $8\sqrt{2}$, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

261. Cho tam giác vuông ABC có các cạnh góc vuông là a, b và cạnh huyền là c. Chứng minh rằng ta luôn có : $c \ge \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$.

262. Cho các số dương a, b, c, a', b', c'. Chứng minh rằng :

Nếu $\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} = \sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')}$ thì $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$.

263. Giải phương trình : $| x^2 - 1 | + | x^2 - 4 | = 3$.

264. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức C không phụ thuộc vào x, y :

$$C = \frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}} - \dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)} - \frac{x+y}{2\sqrt{x}\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{(x+y)^4}}{4xy} \quad \text{với } x > 0 \text{ ; } y > 0.$$

265. Chứng minh giá trị biểu thức D không phụ thuộc vào a:

$$D = \left(\frac{2+\sqrt{a}}{a + 2\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} - 2}{a - 1}\right)\frac{a\sqrt{a} + a - \sqrt{a} - 1}{\sqrt{a}} \quad \text{với } a > 0 \text{ ; } a \ne 1$$

266. Cho biểu thức $B = \left(\sqrt{a} + \dfrac{c-\sqrt{ac}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}\right) - \dfrac{1}{\dfrac{a}{\sqrt{ac}+c} + \dfrac{c}{\sqrt{ac}-a} - \dfrac{a+c}{\sqrt{ac}}}$.

a) Rút gọn biểu thức B.

b) Tính giá trị của biểu thức B khi c = 54 ; a = 24

c) Với giá trị nào của a và c để B > 0 ; B < 0.

267. Cho biểu thức : $A=\left(\sqrt{m+\dfrac{2mn}{1+n^2}} + \sqrt{m-\dfrac{2mn}{1+n^2}}\right)\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}$ với $m \ge 0$; $n \ge 1$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của A với $m = \sqrt{56+24\sqrt{5}}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

268. Rút gọn $D = \left(\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} - \dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x}\right)\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1} - \dfrac{1-x}{x}\right)\dfrac{x}{1-x+\sqrt{1-x^2}}$

269. Cho $P = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right):\left(1-\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)$ với $x \ge 0$; $x \ne 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x sao cho P < 0.

270. Xét biểu thức $y = \dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} + 1 - \dfrac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

a) Rút gọn y. Tìm x để y = 2.

b) Giả sử x > 1. Chứng minh rằng : y - | y | = 0

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của y ?

PHẦN II: HƯỚNG DẪN GIẢI

1. Giả sử $\sqrt{7}$ là số hữu tỉ $\Rightarrow \sqrt{7} = \dfrac{m}{n}$ (tối giản). Suy ra $7 = \dfrac{m^2}{n^2}$ hay $7n^2 = m^2$ (1). Đẳng thức này chứng tỏ $m^2 \vdots 7$ mà 7 là số nguyên tố nên m ⋮ 7. Đặt m = 7k (k ∈ Z), ta có m^2 = $49k^2$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $7n^2 = 49k^2$ nên $n^2 = 7k^2$ (3). Từ (3) ta lại có n^2 ⋮ 7 và vì 7 là số nguyên tố nên n $\vdots$ 7. m và n cùng chia hết cho 7 nên phân số $\frac{m}{n}$ không tối giản, trái giả thiết.

Vậy $\sqrt{7}$ không phải là số hữu tỉ; do đó $\sqrt{7}$ là số vô tỉ.

2. Khai triển vế trái và đặt nhân tử chung, ta được vế phải. Từ a) $\Rightarrow$ b) vì $(ad - bc)^2 \geq 0$.

3. *Cách 1* : Từ x + y = 2 ta có y = 2 – x. Do đó : $S = x^2 + (2 - x)^2 = 2(x - 1)^2 + 2 \geq 2$.

Vậy min S = 2 $\Leftrightarrow$ x = y = 1.

Cách 2 : Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki với a = x, c = 1, b = y, d = 1, ta có :

$(x + y)^2 \leq (x^2 + y^2)(1 + 1) \Leftrightarrow 4 \leq 2(x^2 + y^2) = 2S \Leftrightarrow S \geq 2. \Rightarrow$ mim S = 2 khi x = y = 1

4. b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các cặp số dương

$\frac{bc}{a}$ và $\frac{ca}{b}$; $\frac{bc}{a}$ và $\frac{ab}{c}$; $\frac{ca}{b}$ và $\frac{ab}{c}$, ta lần lượt có:

$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{a}.\frac{ca}{b}} = 2c$; $\frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{a}.\frac{ab}{c}} = 2b$; $\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2\sqrt{\frac{ca}{b}.\frac{ab}{c}} = 2a$ cộng từng vế ta được bất đẳng thức cần chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi a = b = c.

c) Với các số dương 3a và 5b , theo bất đẳng thức Cauchy ta có : $\frac{3a + 5b}{2} \geq \sqrt{3a.5b}$.

$\Leftrightarrow (3a + 5b)^2 \geq 4.15P$ (vì P = a.b) $\Leftrightarrow 12^2 \geq 60P \Leftrightarrow P \leq \frac{12}{5} \Rightarrow \max P = \frac{12}{5}$.

Dấu bằng xảy ra khi 3a = 5b = 12 : 2 $\Leftrightarrow$ a = 2 ; b = 6/5.

5. Ta có b = 1 – a, do đó $M = a^3 + (1 - a)^3 = 3(a - ½)^2 + ¼ \geq ¼$. Dấu "=" xảy ra khi a = ½ .

Vậy min M = ¼ $\Leftrightarrow$ a = b = ½ .

6. Đặt a = 1 + x $\Rightarrow b^3 = 2 - a^3 = 2 - (1 + x)^3 = 1 - 3x - 3x^2 - x^3 \leq 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = (1 - x)^3$.

Suy ra : $b \leq 1 - x$. Ta lại có a = 1 + x, nên : $a + b \leq 1 + x + 1 - x = 2$.

Với a = 1, b = 1 thì $a^3 + b^3 = 2$ và a + b = 2. Vậy max N = 2 khi a = b = 1.

7. Hiệu của vế trái và vế phải bằng $(a - b)^2(a + b)$.

8. Vì $|a + b| \geq 0$, $|a - b| \geq 0$, nên : $|a + b| > |a - b| \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq a^2 - 2ab + b^2$

$\Leftrightarrow 4ab > 0 \Leftrightarrow ab > 0$. Vậy a và b là hai số cùng dấu.

9. a) Xét hiệu : $(a + 1)^2 - 4a = a^2 + 2a + 1 - 4a = a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 \geq 0$.

b) Ta có : $(a + 1)^2 \geq 4a$; $(b + 1)^2 \geq 4b$; $(c + 1)^2 \geq 4c$ và các bất đẳng thức này có hai vế đều dương, nên : $[(a + 1)(b + 1)(c + 1)]^2 \geq 64abc = 64.1 = 8^2$. Vậy $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 8$.

10. a) Ta có : $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$. Do $(a - b)^2 \geq 0$, nên $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.

b) Xét : $(a + b + c)^2 + (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2$. Khai triển và rút gọn, ta được : $3(a^2 + b^2 + c^2)$. Vậy : $(a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

11. a) $|2x-3| = |1-x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3 = 1-x \\ 2x-3 = x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 4 \\ x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{4}{3} \\ x = 2 \end{array}\right.$

b) $x^2 - 4x \le 5 \Leftrightarrow (x-2)^2 \le 3^3 \Leftrightarrow |x-2| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x - 2 \le 3 \Leftrightarrow -1 \le x \le 5$.

c) $2x(2x-1) \le 2x - 1 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \le 0$. Nhưng $(2x-1)^2 \ge 0$, nên chỉ có thể : $2x - 1 = 0$

Vậy : $x = ½$.

12. Viết đẳng thức đã cho dưới dạng : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ac - ad = 0$ (1). Nhân hai vế của (1) với 4 rồi đưa về dạng : $a^2 + (a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 = 0$ (2). Do đó ta có :

$$a = a - 2b = a - 2c = a - 2d = 0 \text{ . Suy ra : } a = b = c = d = 0.$$

13. $2M = (a + b - 2)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + 2.1998 \ge 2.1998 \Rightarrow M \ge 1998$.

Dấu " = " xảy ra khi có đồng thời : $\begin{cases} a+b-2=0 \\ a-1=0 \\ b-1=0 \end{cases}$ Vậy min M = 1998 $\Leftrightarrow$ a = b = 1.

14. Giải tương tự bài 13.

15. Đưa đẳng thức đã cho về dạng : $(x - 1)^2 + 4(y - 1)^2 + (x - 3)^2 + 1 = 0$.

16. $A = \dfrac{1}{x^2-4x+9} = \dfrac{1}{(x-2)^2+5} \le \dfrac{1}{5}$. max $A = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow x = 2$.

17. a) $\sqrt{7} + \sqrt{15} < \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. Vậy $\sqrt{7} + \sqrt{15} < 7$

b) $\sqrt{17} + \sqrt{5} + 1 > \sqrt{16} + \sqrt{4} + 1 = 4 + 2 + 1 = 7 = \sqrt{49} > \sqrt{45}$.

c) $\dfrac{23-2\sqrt{19}}{3} < \dfrac{23-2\sqrt{16}}{3} = \dfrac{23-2.4}{3} = 5 = \sqrt{25} < \sqrt{27}$.

d) Giả sử

$$\sqrt{3\sqrt{2}} > \sqrt{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{3\sqrt{2}}\right)^2 > \left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^2 \Leftrightarrow 3\sqrt{2} > 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{18} > \sqrt{12} \Leftrightarrow 18 > 12.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng, nên : $\sqrt{3\sqrt{2}} > \sqrt{2\sqrt{3}}$.

18. Các số đó có thể là 1,42 và $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

19. Viết lại phương trình dưới dạng : $\sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+16}=6-(x+1)^2$.

Vế trái của phương trình không nhỏ hơn 6, còn vế phải không lớn hơn 6. Vậy đẳng thức chỉ xảy ra khi cả hai vế đều bằng 6, suy ra x = -1.

20. Bất đẳng thức Cauchy $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ viết lại dưới dạng $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (*) $(a, b\ge 0)$.

Áp dụng bất dẳng thức Cauchy dưới dạng (*) với hai số dương 2x và xy ta được :

$$2x.xy\le\left(\frac{2x+xy}{2}\right)^2=4$$

Dấu " = " xảy ra khi : $2x = xy = 4 : 2$ tức là khi x = 1, y = 2. $\Rightarrow$ max A = 2 $\Leftrightarrow$ x = 2, y = 2.

21. Bất đẳng thức Cauchy viết lại dưới dạng : $\frac{1}{\sqrt{ab}}>\frac{2}{a+b}$. Áp dụng ta có $S > 2.\frac{1998}{1999}$.

22. Chứng minh như bài 1.

23. a) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2=\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}=\frac{(x-y)^2}{xy}\ge 0$. Vậy $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$

b) Ta có : $A=\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$. Theo câu a :

$$A\ge\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+2=\left(\frac{x}{y}-1\right)^2+\left(\frac{y}{x}-1\right)^2\ge 0$$

c) Từ câu b suy ra : $\left(\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}\right)-\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)\ge 0$. Vì $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$ (câu a). Do đó :

$$\left(\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}\right)-\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\ge 2.$$

24. a) Giả sử $\sqrt{1+\sqrt{2}}=m$ (m : số hữu tỉ) $\Rightarrow\sqrt{2}=m^2-1\Rightarrow\sqrt{2}$ là số hữu tỉ (vô lí)

b) Giả sử $m+\frac{\sqrt{3}}{n}=a$ (a : số hữu tỉ) $\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{n}=a-m\Rightarrow\sqrt{3}=n(a-m)\Rightarrow\sqrt{3}$ là số hữu tỉ, vô lí.

25. Có, chẳng hạn $\sqrt{2}+(5-\sqrt{2})=5$

26. Đặt $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = a \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 = a^2$. Dễ dàng chứng minh $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq 2$ nên $a^2 \geq 4$, do đó

$|a| \geq 2$ (1). Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với : $a^2 - 2 + 4 \geq 3a$

$$\Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)(a-2) \geq 0 \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $a \geq 2$ hoặc $a \leq -2$. Nếu $a \geq 2$ thì (2) đúng. Nếu $a \leq -2$ thì (2) cũng đúng. Bài toán được chứng minh.

27. Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với :

$$\frac{x^4z^2 + y^4x^2 + z^4x^2 - \left(x^2z + y^2x + z^2y\right)xyz}{x^2y^2z^2} \geq 0.$$

Cần chứng minh tử không âm, tức là : $x^3z^2(x-y) + y^3x^2(y-z) + z^3y^2(z-x) \geq 0$. (1)

Biểu thức không đổi khi hoán vị vòng $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ nên có thể giả sử x là số lớn nhất. Xét hai trường hợp :

a) $x \geq y \geq z > 0$. Tách $z - x$ ở (1) thành $-(x - y + y - z)$, (1) tương đương với :

$$x^3z^2(x-y) + y^3x^2(y-z) - z^3y^2(x-y) - z^3y^2(y-z) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow z^2(x-y)(x^3 - y^2z) + y^2(y-z)(yx^2 - z^3) \geq 0$$

Dễ thấy $x - y \geq 0$, $x^3 - y^2z \geq 0$, $y - z \geq 0$, $yx^2 - z^3 \geq 0$ nên bất đẳng thức trên đúng.

b) $x \geq z \geq y > 0$. Tách $x - y$ ở (1) thành $x - z + z - y$, (1) tương đương với :

$$x^3z^2(x-z) + x^3z^2(z-y) - y^3x^2(z-y) - z^3y^2(x-z) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow z^2(x-z)(x^3 - zy^2) + x^2(xz^2 - y^3)(z-y) \geq 0$$

Dễ thấy bất đẳng thức trên đúng.

Cách khác : Biến đổi bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với :

$$\left(\frac{x}{y} - 1\right)^2 + \left(\frac{y}{z} - 1\right)^2 + \left(\frac{z}{x} - 1\right)^2 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) \geq 3.$$

28. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tổng của số hữu tỉ a với số vô tỉ b là số hữu tỉ c. Ta có : $b = c - a$. Ta thấy, hiệu của hai số hữu tỉ c và a là số hữu tỉ, nên b là số hữu tỉ, trái với giả thiết. Vậy c phải là số vô tỉ.

29. a) Ta có : $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2) \Rightarrow (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.

b) Xét : $(a+b+c)^2 + (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2$. Khai triển và rút gọn ta được :

$3(a^2 + b^2 + c^2)$. Vậy : $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

c) Tương tự như câu b

30. Giả sử $a + b > 2 \Rightarrow (a+b)^3 > 8 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a+b) > 8 \Leftrightarrow 2 + 3ab(a+b) > 8$

$\Rightarrow ab(a+b) > 2 \Rightarrow ab(a+b) > a^3 + b^3$. Chia hai vế cho số dương a + b : $ab > a^2 - ab + b^2$

$\Rightarrow (a-b)^2 < 0$, vô lí. Vậy $a + b \le 2$.

31. *Cách 1*: Ta có : $[x] \le x$; $[y] \le y$ nên $[x] + [y] \le x + y$. Suy ra $[x] + [y]$ là số nguyên không vượt quá $x + y$ (1). Theo định nghĩa phần nguyên, $[x+y]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá $x + y$ (2). Từ (1) và (2) suy ra : $[x] + [y] \le [x+y]$.

Cách 2 : Theo định nghĩa phần nguyên : $0 \le x - [x] < 1$; $0 \le y - [y] < 1$.

Suy ra : $0 \le (x+y) - ([x] + [y]) < 2$. Xét hai trường hợp :

- Nếu $0 \le (x+y) - ([x] + [y]) < 1$ thì $[x+y] = [x] + [y]$ (1)
- Nếu $1 \le (x+y) - ([x] + [y]) < 2$ thì $0 \le (x+y) - ([x] + [y] + 1) < 1$ nên $[x+y] = [x] + [y] + 1$ (2). Trong cả hai trường hợp ta đều có : $[x] + [y] \le [x+y]$

32. Ta có $x^2 - 6x + 17 = (x-3)^2 + 8 \ge 8$ nên tử và mẫu của A là các số dương , suy ra A > 0 do đó : A lớn nhất $\Leftrightarrow \dfrac{1}{A}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 17$ nhỏ nhất.

Vậy max $A = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow x = 3$.

33. Không được dùng phép hoán vị vòng quanh x → y → z → x và giả sử $x \ge y \ge z$.

Cách 1 : Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương x, y, z :

$$A = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \ge 3\sqrt[3]{\frac{x}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{x}} = 3$$

Do đó $\min\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}\right) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{z} = \dfrac{z}{x} \Leftrightarrow x = y = z$

Cách 2 : Ta có : $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} = \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) + \left(\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} - \dfrac{y}{x}\right)$. Ta đã có $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \ge 2$ (do x, y > 0)

nên để chứng minh $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} \ge 3$ ta chỉ cần chứng minh : $\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} - \dfrac{y}{x} \ge 1$ (1)

(1) $\Leftrightarrow xy + z^2 - yz \ge xz$ (nhân hai vế với số dương xz)