

Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

Bài 160: Cho ba số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng tồn tại hai số có tổng hoặc hiệu chia hết cho 12.

Bài 161: Chứng minh rằng trong ba số tự nhiên bất kỳ luôn chọn được hai số có tổng chia hết cho 4.

Bài 162: Cho bảy số tự nhiên bất kỳ, chứng minh rằng ta luôn chọn được ba số có tổng chia hết cho 4.

Bài 163: Cho năm số tự nhiên bất kỳ, chứng minh rằng ta luôn chọn được ba số có tổng chia hết cho 3.

Bài 164: Cho 5 số tự nhiên lẻ bất kỳ, chứng minh rằng ta luôn chọn được bốn số có tổng chia hết cho 4.

Bài 165*: Viết 6 số tự nhiên vào 6 mặt của một con súc sắc. Chứng minh rằng khi ta gieo súc sắc xuống mặt bàn thì trong 5 mặt có thể nhìn thấy bao giờ cũng tìm được một hay nhiều mặt để tổng các số trên đó chia hết cho 5.

Ôn tập chương I

Bài 166: Thực hiện phép tính bằng cách hợp lý nhất.

a) $\underbrace{19 + 19 + \dots + 19}_{23 \text{ số hạng}} + \underbrace{77 + 77 + \dots + 77}_{19 \text{ số hạng}}$

b) $1000! \cdot (456.789789 - 789.456456)$

Bài 167: Cho biểu thức $252 - 84 : 21 + 7$

a) Tính giá trị biểu thức đó

b) Nếu dùng dấu ngoặc thì có thể có những giá trị nào khác.

Bài 168: Tìm x biết:

a) $x + (x + 1) + (2+x) + \dots + (x+30) = 1240$

b) $1 + 2 + 3 + \dots + x = 210$

Bài 169: Chiến thắng Đống Đa vào mùa xuân năm 1978. Trong hệ đếm CAN CHI năm đó là năm nào?

Bài 170: Chứng minh:

a) $10^n + 5^3 : 9$ b) $43^{43} - 17^{17} : 10$

c) $\underbrace{555\dots5}_{2n \text{ chữ số } 5}$ chia hết cho 11 nhưng không chia hết cho 125

Bài 171: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sso cho chia nó cho 17 dư 5 ; chia nó cho 9 dư 12

Bài 172: Ngày 1 tháng 2 năm 2003 là ngày thứ 7.

a) Hỏi ngày 1 tháng 3 ; ngày 1 tháng 4 của năm này là ngày thứ mấy?

b) Ngày 1 tháng 2 năm 2004 là ngày thứ mấy?

Bài 173: Cho $A = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{23} + 4^{24}$. Chứng minh :

$$A : 20 ; A : 21 ; A : 420$$

Bài 174: Cho $n = 29k$ với $k \in \mathbb{N}$. Với giá trị nào của k thì n là :

a) Số nguyên tố.

b) Là hợp số.

Bài 175: Tìm x, y $\in \mathbb{N}$ biết $(x+1)(2y-5) = 143$.

Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

Bài 176: Cho a là hợp số, khi phân tích ra thừa số nguyên tố chỉ chứa hai số nguyên tố khác nhau p_1 và p_2 . Biết a^3 có tất cả 40 ước hỏi a^2 có bao nhiêu ước ?

Bài 177: Tìm $a \in \mathbb{N}$ biết 355 chia a dư 13 và 836 chia cho a thì dư .

Bài 178*: Một số tự nhiên chia cho 7 thì dư 5, chia cho 13 thì dư 4. Nếu đem số đó chia cho 91 thì dư bao nhiêu?

Bài 179: Cho các số 12 ; 18 ; 27

a) Tìm số lớn nhất có 3 chữ số chia hết cho các số đó?

b) Tìm số nhỏ nhất có 4 chữ số chia cho mỗi số đó đều dư 1?

Tìm số nhỏ nhất có 4 chữ số chia 12 dư 10 ; chia 18 dư 16 ; chia 27 dư 25?

Chương II. Số nguyên

Đ 1. Tập hợp Z các số nguyên. Thứ tự trong Z

Bài 183: Cho $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -9\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < -4\}$

$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -2\}$

Tìm $A \cap B$; $B \cap C$; $C \cap A$

Bài 181: Viết tập hợp ba số nguyên liên tiếp trong đó có số 0.

Bài 182: Số nguyên âm lớn nhất có 3 chữ số và số nguyên âm nhỏ nhất có 2 chữ số có phải là 2 số nguyên liên tiếp nhau không?

Bài 186: Tìm các giá trị thích hợp của a và b :

a) $\overline{a00} > -111$

b) $-\overline{a99} > -600$

c) $-\overline{cb3} < -\overline{cba}$

d) $-\overline{cba} < \overline{c85}$

Bài 187: Cho ba số nguyên $a; b; 0$, biết a là một số âm và $a < b$. Hãy sắp xếp 3 số đó theo thứ tự tăng dần.

Bài 188: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

a) Nếu $a = b$ thì $|a| = |b|$

b) Nếu $|a| = |b|$ thì $a = b$

c) Nếu $|a| < |b|$ thì $a < b$

Bài 189: Tìm x biết:

a) $|x| + |-5| = |37|$

b) $|-6| \cdot |x| = 54$

Bài 190: Tìm $x, y, z \in \mathbb{Z}$ biết : $|x| + |y| + |z| = 0$

Bài 191: Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $|x| < 10$

c) $|x| > -3$

b) $|x| > 21$

d) $|x| < -1$

Đ 2. Phép cộng hai số nguyên.

Tính chất phép cộng hai số nguyên

Ví dụ: Tính tổng $S = (-351) + (-74) + 51 + (-126) + 149$

IV. Bài tập:

192. Cho $x \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; \dots; 10\}$

$y \in \{-1; 1; 0; 1; \dots; 5\}$

Biết : $x + y = 3$.

Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

193. Tính nhanh :

- a) $-37 + 54 + (-70) + (-163) + 256$
- b) $-359 + 181 + (-123) + 350 + (-172)$
- c) $-69 + 53 + 46 + (-94) + (-14) + 78$

194. Tính tổng các số nguyên x biết:

- a) $-17 \leq x \leq 18$
- b) $|x| < 25$

195. Cho $S_1 = 1 + (-3) + 5 + (-7) + \dots + 17$

$$S_2 = -2 + 4 + (-6) + \dots + (-18)$$

Tính tổng $S_1 + S_2$

196. Cho x và y là những số nguyên tố có 3 chữ số. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tổng x + y.

197. Chứng minh rằng số đối của tổng hai số bằng tổng hai số đối của chúng.

198. Cho $|x| = 5$; $|y| = 11$. Tính x + y

199*. Cho x, y là hai số nguyên cùng dấu . Tính x + y biết $|x| + |y| = 10$.

200. Tính tổng :

- a) $S_1 = a + |a|$ với $a \in \mathbb{Z}$.
- b) $S_2 = a + |a| + a + |a| + \dots + a$ với $a \in \mathbb{Z}$ và có 101 số hạng.

201*. Cho 18 số nguyên sao cho tổng của 6 số bất kì trong các số đó đều là một số âm. Giải thích vì sao tổng của 18 số đó cũng là một số âm? Bài toán còn đúng không nếu thay 18 số bằng 19 số.

Đ 3. Phép trừ hai số nguyên

Bài tập:

202. Cho a và b các giá trị trong bảng sau. Tìm hiệu a — b. Không cần thực hiện phép tính cho biết b — a.

a	b	a-b	b-a
77	55		
-29	1		
-13	-6		
0	-19		

203. Tìm x biết $(x + 153) - (48 - 193) = 1 - 2 - 3 - 4$.

204. Cho $|x| = 7$; $|y| = 20$ với $x, y \in \mathbb{Z}$. Tính x — y

205. Cho $|x| \leq 3$; $|y| \leq 5$ với $x, y \in \mathbb{Z}$. Biết x — y = 2.

Tìm x và y ?

206. Tìm x $\in \mathbb{Z}$ biết :

- a) $|x + 8| = 6$
- b) $|x + a| = a$ với $a \in \mathbb{Z}$.

207. Tìm x $\in \mathbb{Z}$, biết:

$$1 < |x - 2| < 4.$$

208. Tìm x, y $\in \mathbb{Z}$, biết $|x + 35 - 40| + |y + 10 - 11| \leq 0$.

209*. Cho $x < y < 0$ và $|x| - |y| = 100$. Tính x — y

210. Cho $x \in \{-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; \dots ; 11\}$

$$y \in \{-89 ; -88 ; -87 ; \dots ; -1 ; 0 ; 11\}$$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của x — y.

Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

211. Cho $x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Với giá trị nào của x thì biểu thức $A = 1000 - |x + 5|$ có GTLN, tìm GTLN đó.

b) Với giá trị nào của y thì biểu thức $B = |y - 3| + 50$ có GTNN, tìm GTNN đó.

c) Với giá trị nào của x, y thì biểu thức

$C = |x - 100| + |y + 200| - 1$ có GTNN, tìm GTNN đó.

Đ 4. Quy tắc chuyển vế. Quy tắc dấu ngoặc

212. Tính hợp lý:

a) $-2003 + (-21 + 75 + 2003)$ b) $1125 - (374 + 1125) + (-65 + 374)$

213. Đặt dấu ngoặc một cách hợp lý để tính các tổng đại số sau:

a) $942 - 2567 + 2563 - 1942$

b) $12 - 12 + 11 + 10 - 9 + 8 - 7 + 5 - 4 + 3 + 2 - 1$

214. Tìm x biết:

a) $416 + (x - 45) = 387$

b) $11 - (x + 84) = 97$

c) $-(x + 84) + 213 = -16$

215. Chứng minh đẳng thức:

a) $-(-a + b + c) + (b + c - 1) = (b - c + 6) - (7 - a + b) + c$

216. Cho $A = a + b - 5$; $B = -b - c + 1$

$C = b - c - 4$; $D = b - a$

Chứng minh $A + B = C - D$

217. Cho $a > b$; Tính $|S|$ biết:

$S = -(a - b - c) + (-c + b + a) - (a + b)$

218. Cho $M = a + b - 1$ và $N = b + c - 1$. Biết $M > N$ hỏi hiệu $a - c$ dương hay âm?

219. Viết 5 số nguyên vào 5 đỉnh của một ngôi sao năm cánh sao cho tổng của hai số tại hai đỉnh liền nhau luôn bằng -6 . Tìm 5 số nguyên đó?

Đ 5. Phép nhân hai số nguyên

I/ Kiến thức cơ bản

II/ Kiến thức nâng cao.

1- Luỹ thừa bậc chẵn của một số nguyên âm là một số nguyên dương.

- Luỹ thừa bậc lẻ của một số nguyên âm là một số nguyên âm.

2. $a \geq b \Leftrightarrow ac \geq ab$ nếu $c > 0$

$a \geq b \Leftrightarrow ac \leq ab$ nếu $c < 0$

3. Giá trị tuyệt đối của một tích bằng tích các giá trị tuyệt đối:

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

4. Với $a \in \mathbb{Z}$ thì $a^2 \geq 0$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = 0$)

III/ Ví dụ: Tìm $a, b \in \mathbb{Z}$ biết $a, b = 24$ và $a + b = -10$.

Giải

Ta thấy $ab > 0$ nên a, b cùng dấu

$a + b = -10$ nên a, b cùng dấu âm

Do đó $a \cdot b = 24 = (-1) \cdot (-24) = (-2) \cdot (-12) = (-3) \cdot (-8) = (-4) \cdot (-6)$

Trong các trường hợp trên thì chỉ có $(-4) + (-6) = -10$

Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

Vậy $a = -4$; $b = -6$ hoặc $a = -6$; $b = -4$

Ví dụ 2: Tìm tất cả các cặp số nguyên sao cho tổng bằng tích

Giải

Gọi hai số cần tìm là x và y

Ta có $xy = x + y$

$$\Leftrightarrow xy - x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow xy - x - y + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x(y - 1) - (y - 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow (y - 1)(x - 1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y-1 = x-1 = 1 \\ y-1 = x-1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2; y=2 \\ x=0; y=0 \end{cases}$$

IV. Bài tập:

220. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết:

a) $x(x+3) = 0$

b) $(x - 2)(5 - x) = 0$

c) $(x-1)(x^2 + 1) = 0$

221. Thu gọn các biểu thức sau:

a) $7x - 19x + 6x$

b) $-ab - ba$

222. Cho $A = (5m^2 - 8m^2 - 9m^2)(-n^3 + 4n^3)$

Với giá trị nào của m và n thì $A \geq 0$

223. Tìm x biết:

a) $-12(x - 5) + 7(3 - x) = 5$

b) $30(x + 2) - 6(x - 5) - 24x = 100$

224. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết:

a) $|2x - 5| = 13$

b) $7x + 3| = 66$

c) $|5x - 2| \leq 0$

225. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết:

a) $(x - 3)(2y + 1) = 7$

b) $(2x + 1)(3y - 2) = -55$

226. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ sao cho :

$$(x - 7)(x + 3) < 0$$

227. Tính giá trị của biểu thức sau một cách hợp lý:

a) $125 \cdot (-61) \cdot (-2)^3 \cdot (-1)^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

b) $136 \cdot (-47) + 36 \cdot (-304)$

c) $(-48) \cdot 72 + 36 \cdot (-304)$

228. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết:

a) $(x + 1) + (x + 3) + (x + 5) + \dots + (x + 99) = 0$

b) $(x - 3) + (x - 2) + (x - 1) + \dots + 10 + 11 = 0$

229. Cho m và n các số nguyên dương:

$$A = \frac{2+4+6+\dots+2m}{m} \quad B = \frac{2+4+6+\dots+2n}{n}$$

Biết $A < B$ hãy so sánh m và n

230*. Cho 16 số nguyên. Tích của 3 số bất kì luôn là một số âm. Chứng minh rằng tích của 16 số đó là một số dương.

Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

231. Bỏ dấu ngoặc và thu gọn biểu thức:

- a) $(a + b)(a + b)$
- b) $(a - b)(a - b)$
- c) $(a + b)(a - b)$

232. Chứng minh rằng trong 3 số nguyên liên tiếp thì bình phương của số ở giữa hơn tích hai số kia đúng 1 đơn vị.

233. Cho $a = -20$; $b - c = -5$, hãy tìm A biết

$$A^2 = b(a - c) - c(a - b)$$

234. Biến đổi tổng thành tích:

- a) $ab - ac + ad$
- b) $ac + ad - bc - bd$

235. Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Biết $ab - ac + bc - c^2 = -1$

Chứng minh a và b là hai số đối nhau.

236*. Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết:

- a) $xy + 3x - 7y = 21$
- b) $xy + 3x - 2y = 11$

Đ 6. Bội và ước của một số nguyên

I/ Kiến thức cơ bản

II/ Kiến thức nâng cao.

1. Các tính chất về chia hết (hay không chia hết) đối với số tự nhiên vẫn đúng với số nguyên.

2. Nếu a là bội của b thì $-a$ cũng là bội của b. Nếu b là ước của a thì $-b$ cũng là ước của a. Do đó nếu số nguyên m có k ước tự nhiên thì có thêm k ước âm (đó là các số đối của các ước tự nhiên).

3. Chú ý:

- Trong tập hợp số \mathbb{Z} , một số chia 3 dư 1; dư 2 được biểu diễn bởi công thức $3k + 1$; $3k + 2$ hoặc gộp lại là $3k \pm 1$.

- Số lẻ được viết là $2k + 1$ hoặc $2k - 1$

IV. Bài tập:

237. Các số sau có bao nhiêu ước?

- a) 54 ;
- b) -196 .

238. Chứng minh rằng nếu $a : b$ thì $|a| : |b|$

239. Với $n \in \mathbb{Z}$, các số sau là chẵn hay lẻ?

$$A = (n - 4)(n - 15)$$

$$B = n^2 - n - 1$$

240. Cho $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$ trong đó x, y không đối nhau. Chứng minh rằng nếu $ax - by : x + y$ thì $ay - bx : x + y$

241. Tìm các giá trị nguyên dương nhỏ hơn 10 của x và y sao cho

$$3x - 4y = -21 \text{ (Phương trình Điôphăng)}$$

242. Cho $S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$.

- a) Chứng minh rằng S là bội của -20
- b) Tính S, từ đó suy ra 3^{100} chia cho 4 dư 1.

243. Tìm số nguyên dương n sao cho $n + 2$ là ước của 111 còn $n - 2$ là bội của 11.

244. Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để:

- a) $4n - 5 : n$
- b) -11 là bội của $n - 1$

Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

c) $2n - 1$ là ước của $3n + 2$.

245. Tìm $n \in \mathbb{Z}$ sao cho :

$n - 1$ là bội của $n + 5$ và $n + 5$ là bội của $n - 1$

246*. Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để:

a) $n^2 - 7$ là bội của $n + 3$

b) $n + 3$ là bội của $n^2 - 7$

Đ 7. Ôn tập chương II

Ví dụ: Tìm x, y, z biết :

$$x - y = -9 ; y - x = 10 ; z + x = 11$$

Ví dụ: Cho $x \in \mathbb{Z}$ hãy so sánh x^2 và x^3

Chú ý: để so sánh A và B ta thường xét hiệu $A - B$.

Nếu $A - B > 0$ thì $A > B$; Nếu $A - B < 0$ thì $A < B$

Bài tập:

247. Tính giá trị của biểu thức A với $x = -43; y = 17$

$$A = -125(x + x + \dots + x - y - y - \dots - y)$$

(x có 8 số hạng, y có 8 số hạng)

248. Cho biểu thức $B = \square \square 0 \square 100$. Hãy điền vào các ô trống dấu của các phép tính cộng, trừ, nhân, chia và thêm dấu ngoặc (nếu cần) để B là số nguyên lớn nhất, số nguyên nhỏ nhất.

249. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết $2 \leq |x| \leq 5$

250. Tìm $x \in \mathbb{Z}$

a) $-3x + 5 = 41$

b) $52 - |x| = 80$

c) $17x + 11$

= 20

251. Cho $A = \{6; 7; 8; 9\}$; $B = \{-1; -2; -3; 4; 8\}$

a) Có bao nhiêu hiệu dạng $a - b$ với $a \in A; b \in B$

b) Có bao nhiêu hiệu chia hết cho 5

c) Có bao nhiêu hiệu là số nguyên âm ?

252. Số $(-3)^{20}$ có phải là tích của hai số nguyên liên tiếp không ?

253. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết $(x + 5)(3x - 12) > 0$

254. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết $(x^3 + 5)(x^3 + 10)(x^3 + 30) < 0$

255. Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết $(x - 7)(xy + 1) = 9$

256. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Biết tích ab là số liền sau của tích cd và $a + b = c + d$.

Chứng minh rằng $a = b$

257. Tìm hai số nguyên mà tích của chúng bằng hiệu của chúng.

Chuyên đề Phương trình Diophant

Ví dụ: Tìm hai số tự nhiên x và y sao cho

$$2x + 5y = 19$$

Cách 1: Vì $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow 5y \leq 19 \Rightarrow y < 4$

Mặt khác vì 19 là số lẻ nên $2x + 5y$ là số lẻ

$2x$ là số chẵn và $5y$ là số lẻ:

Do đó $y = 1$ hoặc $y = 3$.

Với $y = 1$ ta có: $2x + 5.1 = 19$