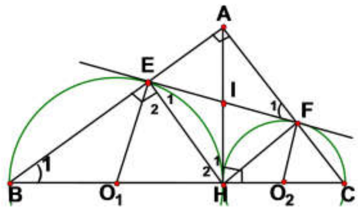
2. BEFC là tứ giác nội tiếp.
3. AE. AB = AF. AC.
4. Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn .

Lời giải:



1. Ta có : éBEH = 90^0 (nội tiếp chắn nửc đường tròn)
=> éAEH = 90^0 (vì là hai góc kề bù). (1)
éCFH = 90^0 (nội tiếp chắn nửc đường tròn)
=> éAFH = 90^0 (vì là hai góc kề bù).(2)
éEAF = 90^0 (Vì tam giác ABC vuông tại A) (3)
Từ (1), (2), (3) => tứ giác AFHE là hình chữ nhật (vì có ba góc vuông).

2. Tứ giác AFHE là hình chữ nhật nên nội tiếp được một đường tròn =>éF_1=éH_1 (nội tiếp chắn cung AE) . Theo giả thiết AH ⊥BC nên AH là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2)
=> éB_1 = éH_1 (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HE) => éB_1= éF_1 => éEBC+éEFC = éAFE + éEFC mà éAFE + éEFC = 180^0 (vì là hai góc kề bù) => éEBC+éEFC = 180^0 mặt khác éEBC và éEFC là hai góc đối của tứ giác BEFC do đó BEFC là tứ giác nội tiếp.

3. Xét hai tam giác AEF và ACB ta có éA = 90^0 là góc chung; éAFE = éABC (theo Chứng minh trên)

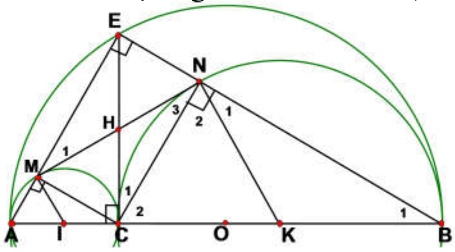
=> ΔAEF ~ΔACB => $\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AB}$ => AE. AB = AF. AC.

* ***HD cách 2***: *Tam giác AHB vuông tại H có HE ⊥ AB => AH^2 = AE.AB (*)*
Tam giác AHC vuông tại H có HF ⊥ AC => AH^2 = AF.AC (**)
Từ (*) và (**) => AE. AB = AF. AC

4. Tứ giác AFHE là hình chữ nhật => IE = EH => ΔIEH cân tại I => éE_1 = éH_1 .
ΔO_1EH cân tại O_1 (vì có O_1E vàO_1H cùng là bán kính) => éE_2 = éH_2.
=> éE_1 + éE_2 = éH_1 + éH_2 mà éH_1 + éH_2 = éAHB = 90^0 => éE_1 + éE_2 = éO_1EF = 90^0
=> O_1E ⊥EF .
Chứng minh tương tự ta cũng có O_2F ⊥ EF. Vậy EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn .

Bài 14 Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho AC = 10 Cm, CB = 40 Cm. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC, CB và có tâm theo thứ tự là O, I, K.
Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn (O) tại E. Gọi M. N theo thứ tự là giao điểm của EA, EB với các nửa đường tròn (I), (K).

1.Chứng minh EC = MN.
2.Ch/minh MN là tiếp tuyến chung của các nửa đ/tròn (I), (K).
3.Tính MN.
4.Tính diện tích hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn



Lời giải:

1. Ta có: éBNC= 90^0(nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm K)
=> éENC = 90^0 (vì là hai góc kề bù). (1)
éAMC = 90^0 (nội tiếp chắn nửc đường tròn tâm I) => éEMC = 90^0 (vì là hai góc kề bù).(2)
éAEB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O) hay éMEN = 90^0 (3)
Từ (1), (2), (3) => tứ giác CMEN là hình chữ nhật => EC = MN (tính chất đường chéo hình chữ nhật)

2. Theo giả thiết EC ⊥AB tại C nên EC là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (I) và (K)
=> éB_1 = éC_1 (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CN). Tứ giác CMEN là hình chữ nhật nên => éC_1= éN_3
=> éB_1 = éN_3.(4) Lại có KB = KN (cùng là bán kính) => tam giác KBN cân tại K => éB_1 = éN_1 (5)
Từ (4) và (5) => éN_1 = éN_3 mà éN_1 + éN_2 = ∠CNB = 90^0 => éN_3 + éN_2 = ∠MNK = 90^0 hay MN ⊥ KN tại N => MN là tiếp tuyến của (K) tại N.
Chứng minh tương tự ta cũng có MN là tiếp tuyến của (I) tại M,
Vậy MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn (I), (K).

3. Ta có éAEB = 90^0 (nội tiếp chắn nửc đường tròn tâm O) => ΔAEB vuông tại A có EC ⊥ AB (gt)
=> $EC^2 = AC.\ BC$ ⇔ $EC^2 = 10.40 = 400$ => EC = 20 cm. Theo trên EC = MN => MN = 20 cm.

4. Theo giả thiết AC = 10 Cm, CB = 40 Cm => AB = 50cm => OA = 25 cm

Ta có $S_{(o)} = \pi.OA^2 = \pi 25^2 = 625\pi$; $S_{(I)} = \pi.\ IA^2 = \pi.5^2 = 25\pi$; $S_{(k)} = \pi.KB^2 = \pi.\ 20^2 = 400\pi$.

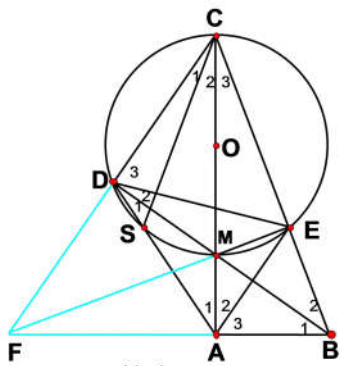
Ta có diện tích phần hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn là $S = \frac{1}{2}\ (S_{(o)} - S_{(I)} - S_{(k)})$

$$S = \frac{1}{2}(625\pi - 25\pi - 400\pi) = \frac{1}{2}.200\ \pi = 100\pi \ \approx 314\ (cm^2)$$

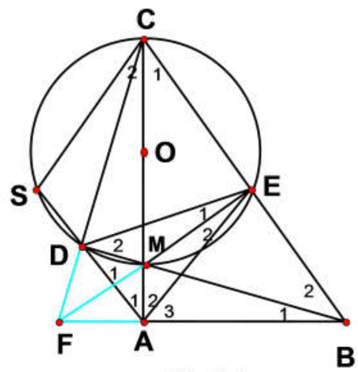
<u>Bài 15</u> Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy điểm M, dựng đường tròn (O) có đường kính MC. đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại D. đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại S.

1. Chứng minh ABCD là tứ giác nội tiếp .
2. Chứng minh CA là tia phân giác của góc SCB.
3. Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh rằng các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.
4. Chứng minh DM là tia phân giác của góc ADE.
5. Chứng minh điểm M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

<u>Lời giải:</u>



Hình a



Hình b

1. Ta có éCAB = 90^0 (vì tam giác ABC vuông tại A); éMDC = 90^0 (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) => ∠CDB = 90^0 như vậy D và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên A và D cùng nằm trên đường tròn đường kính BC => ABCD là tứ giác nội tiếp.

2. ABCD là tứ giác nội tiếp => $\angle D_1 = \angle C_3$(nội tiếp cùng chắn cung AB).

$\angle D_1 = \angle C_3$ => $\overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{EM}$ => $\angle C_2 = \angle C_3$ (hai góc nội tiếp đường tròn (O) chắn hai cung bằng nhau)

=> CA là tia phân giác của góc SCB.

3. Xét ΔCMB Ta có BA⊥CM; CD ⊥ BM; ME ⊥ BC như vậy BA, EM, CD là ba đường cao của tam giác CMB nên BA, EM, CD đồng quy.

4. Theo trên Ta có $\overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{EM}$ => $\angle D_1 = \angle D_2$ => DM là tia phân giác của góc ADE.(1)

5. Ta có ∠MEC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) => ∠MEB = 90^0.

Tứ giác AMEB có ∠MAB = 90^0 ; ∠MEB = 90^0 => ∠MAB + ∠MEB = 180^0 mà đây là hai góc đối nên tứ giác AMEB nội tiếp một đường tròn => $\angle A_2 = \angle B_2$.

Tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp => $\angle A_1 = \angle B_2$(nội tiếp cùng chắn cung CD)

=> $\angle A_1 = \angle A_2$ => AM là tia phân giác của góc DAE (2)

Từ (1) và (2) Ta có M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE

<u>TH2</u> ***(Hình b)***

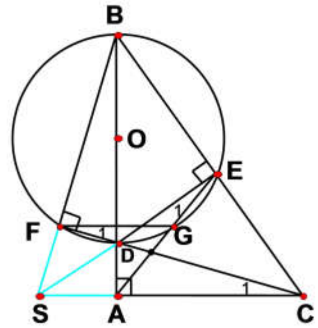
Câu 2 : ∠ABC = ∠CME (cùng phụ ∠ACB); ∠ABC = ∠CDS (cùng **<u>bù</u>** ∠ADC) => ∠CME = ∠CDS

=> $\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{CS}$ => $\overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{EM}$ => ∠SCM = ∠ECM => CA là tia phân giác của góc SCB.

Bài 16 Cho tam giác ABC vuông ở A.và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại F, G.

Chứng minh :

1. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EBD.
2. Tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp .
3. AC // FG.
4. Các đường thẳng AC, DE, FB đồng quy.



Lời giải:

1. Xét hai tam giác ABC và EDB Ta có ∠BAC = 90^0 (vì tam giác ABC vuông tại A); ∠DEB = 90^0 (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
=> ∠DEB = ∠BAC = 90^0 ; lại có ∠ABC là góc chung => ΔDEB ~ Δ CAB .

2. Theo trên ∠DEB = 90^0 => ∠DEC = 90^0 (vì hai góc kề bù); ∠BAC = 90^0 (vì ΔABC vuông tại A) hay ∠DAC = 90^0 => ∠DEC + ∠DAC = 180^0 mà đây là hai góc đối nên ADEC là tứ giác nội tiếp .

* ∠BAC = 90^0 (vì tam giác ABC vuông tại A); ∠DFB = 90^0 (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay ∠BFC = 90^0 như vậy F và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên A và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC => AFBC là tứ giác nội tiếp.

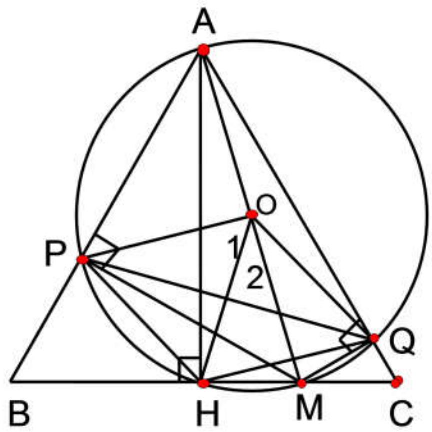
3. Theo trên ADEC là tứ giác nội tiếp => ∠E_1 = ∠C_1 lại có ∠E_1 = ∠F_1 => ∠F_1 = ∠C_1 mà đây là hai góc so le trong nên suy ra AC // FG.

4. (HD) Dễ thấy CA, DE, BF là ba đường cao của tam giác DBC nên CA, DE, BF đồng quy tại S.

Bài 17. Cho tam giác đều ABC có đường cao là AH. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì (M không trùng B. C, H) ; từ M kẻ MP, MQ vuông góc với các cạnh AB. AC.

1. Chứng minh APMQ là tứ giác nội tiếp và hãy xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.
2. Chứng minh rằng MP + MQ = AH.
3. Chứng minh OH ⊥ PQ.

Lời giải:



1. Ta có MP ⊥ AB (gt) => ∠APM = 90^0; MQ ⊥ AC (gt)
=> ∠AQM = 90^0 như vậy P và Q cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên P và Q cùng nằm trên đường tròn đường kính AM => APMQ là tứ giác nội tiếp.

* Vì AM là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ là trung điểm của AM.

2. Tam giác ABC có AH là đường cao => $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH$.

Tam giác ABM có MP là đường cao => $S_{ABM} = \frac{1}{2}AB.MP$

Tam giác ACM có MQ là đường cao => $S_{ACM} = \frac{1}{2}AC.MQ$

Ta có $S_{ABM} + S_{ACM} = S_{ABC}$ => $\frac{1}{2}AB.MP + \frac{1}{2}AC.MQ = \frac{1}{2}BC.AH$ => AB.MP + AC.MQ = BC.AH

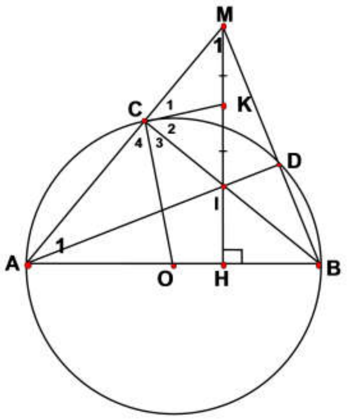
Mà AB = BC = CA (vì tam giác ABC đều) => MP + MQ = AH.

3. Tam giác ABC có AH là đường cao nên cũng là đường phân giác => ∠HAP = ∠HAQ => $\widehat{HP} = \widehat{HQ}$ (tính chất góc nội tiếp) => ∠HOP = ∠HOQ (t/c góc ở tâm) => OH là tia phân giác góc POQ. Mà tam giác POQ cân tại O (vì OP và OQ cùng là bán kính) nên suy ra OH cũng là đường cao => OH ⊥ PQ

Bài 18 Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đoạn thẳng OB lấy điểm H bất kì (H không trùng O, B) ; trên đường thẳng vuông góc với OB tại H, lấy một điểm M ở ngoài đường tròn ; MA và MB thứ tự cắt đường tròn (O) tại C và D. Gọi I là giao điểm của AD và BC.

1. Chứng minh MCID là tứ giác nội tiếp .
2. Chứng minh các đường thẳng AD, BC, MH đồng quy tại I.
3. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCID, Chứng minh KCOH là tứ giác nội tiếp .

Lời giải:



1. Ta có : éACB = 90^0 (nội tiếp chắn nửc đường tròn)
=> éMCI = 90^0 (vì là hai góc kề bù).
éADB = 90^0 (nội tiếp chắn nửc đường tròn)
=> éMDI = 90^0 (vì là hai góc kề bù).
=> éMCI + éMDI = 180^0 mà đây là hai góc đối của tứ giác MCID nên MCID là tứ giác nội tiếp.

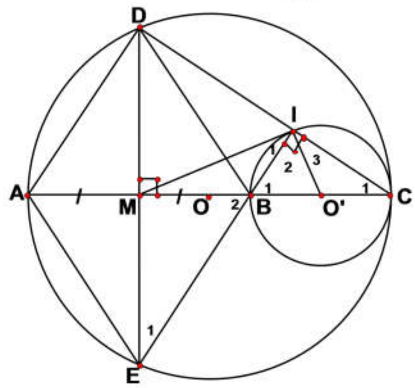
2. Theo trên Ta có BC ⊥ MA; AD ⊥ MB nên BC và AD là hai đường cao của tam giác MAB mà BC và AD cắt nhau tại I nên I là trực tâm của tam giác MAB. Theo giả thiết thì MH ⊥ AB nên MH cũng là đường cao của tam giác MAB => AD, BC, MH đồng quy tại I.

3. ΔOAC cân tại O (vì OA và OC là bán kính) => $\angle A_1 = \angle C_4$
ΔKCM cân tại K (vì KC và KM là bán kính) => $\angle M_1 = \angle C_1$.
Mà $\angle A_1 + \angle M_1 = 90^0$ (do tam giác AHM vuông tại H) => $\angle C_1 + \angle C_4 = 90^0$ => $\angle C_3 + \angle C_2 = 90^0$ (vì góc ACM là góc bẹt) hay ∠OCK = 90^0 .
Xét tứ giác KCOH Ta có ∠OHK = 90^0; ∠OCK = 90^0 => ∠OHK + ∠OCK = 180^0 mà ∠OHK và ∠OCK là hai góc đối nên KCOH là tứ giác nội tiếp.

Bài 19. Cho đường tròn (O) đường kính AC. Trên bán kính OC lấy điểm B tuỳ ý (B khác O, C). Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Qua M kẻ dây cung DE vuông góc với AB. Nối CD, Kẻ BI vuông góc với CD.

1. Chứng minh tứ giác BMDI nội tiếp .
2. Chứng minh tứ giác ADBE là hình thoi.
3. Chứng minh BI // AD.
4. Chứng minh I, B, E thẳng hàng.
5. Chứng minh MI là tiếp tuyến của (O').

Lời giải:



1. éBIC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => éBID = 90^0 (vì là hai góc kề bù); DE ⊥ AB tại M => éBMD = 90^0
=> éBID + éBMD = 180^0 mà đây là hai góc đối của tứ giác MBID nên MBID là tứ giác nội tiếp.

2. Theo giả thiết M là trung điểm của AB; DE ⊥ AB tại M nên M cũng là trung điểm của DE (quan hệ đường kính và dây cung)
=> Tứ giác ADBE là hình thoi vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường .

3. éADC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => AD ⊥ DC; theo trên BI ⊥ DC => BI // AD. (1)

4. Theo giả thiết ADBE là hình thoi => EB // AD (2).
Từ (1) và (2) => I, B, E thẳng hàng (vì qua B chỉ có một đường thẳng song song với AD mà thôi.)

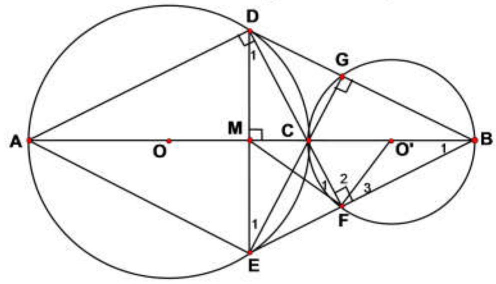
5. I, B, E thẳng hàng nên tam giác IDE vuông tại I => IM là trung tuyến (vì M là trung điểm của DE) =>MI = ME => ΔMIE cân tại M => $\angle I_1 = \angle E_1$; ΔO'IC cân tại O' (vì O'C và O'I cùng là bán kính)

=> $\angle I_3 = \angle C_1$ mà $\angle C_1 = \angle E_1$ (Cùng phụ với góc EDC) => $\angle I_1 = \angle I_3$ => $\angle I_1 + \angle I_2 = \angle I_3 + \angle I_2$. Mà $\angle I_3 + \angle I_2 = \angle BIC = 90^0$ => $\angle I_1 + \angle I_2 = 90^0 = \angle MIO'$ hay MI $\perp$ O'I tại I => MI là tiếp tuyến của (O').

Bài 20. Cho đường tròn (O; R) và (O'; R') có R > R' tiếp xúc ngoài nhau tại C. Gọi AC và BC là hai đường kính đi qua điểm C của (O) và (O'). DE là dây cung của (O) vuông góc với AB tại trung điểm M của AB. Gọi giao điểm thứ hai của DC với (O') là F, BD cắt (O') tại G. Chứng minh rằng:

1. Tứ giác MDGC nội tiếp .
2. Bốn điểm M, D, B, F cùng nằm trên một đường tròn
3. Tứ giác ADBE là hình thoi.
4. B, E, F thẳng hàng
5. DF, EG, AB đồng quy.
6. MF = 1/2 DE.
7. MF là tiếp tuyến của (O').

éCGD = 90^0 (vì là hai góc kề bù)



Lời giải:

1. éBGC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Theo giả thiết DE $\perp$ AB tại M => éCMD = 90^0

=> éCGD + éCMD = 180^0 mà đây là hai góc đối của tứ giác MCGD nên MCGD là tứ giác nội tiếp

2. éBFC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => éBFD = 90^0; éBMD = 90^0 (vì DE $\perp$ AB tại M) như vậy F và M cùng nhìn BD dưới một góc bằng 90^0 nên F và M cùng nằm trên đường tròn đường kính BD => M, D, B, F cùng nằm trên một đường tròn .

3. Theo giả thiết M là trung điểm của AB; DE $\perp$ AB tại M nên M cũng là trung điểm của DE (quan hệ đường kính và dây cung)

=> Tứ giác ADBE là hình thoi vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường .

4. éADC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => AD $\perp$ DF ; theo trên tứ giác ADBE là hình thoi => BE // AD mà AD $\perp$ DF nên suy ra BE $\perp$ DF .

Theo trên éBFC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => BF $\perp$ DF mà qua B chỉ có một đường thẳng vuông góc với DF do đo B, E, F thẳng hàng.

5. Theo trên DF $\perp$ BE; BM $\perp$ DE mà DF và BM cắt nhau tại C nên C là trực tâm của tam giác BDE => EC cũng là đường cao => EC$\perp$BD; theo trên CG$\perp$BD => E,C,G thẳng hàng. Vậy DF, EG, AB đồng quy

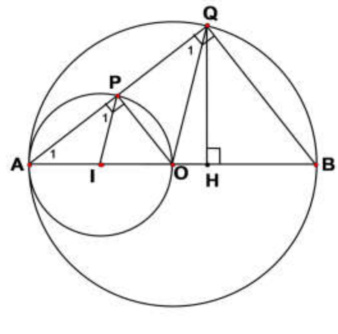
6. Theo trên DF $\perp$ BE => ΔDEF vuông tại F có FM là trung tuyến (vì M là trung điểm của DE) suy ra MF = 1/2 DE (vì trong tam giác vuông trung tuyến thuộc cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền).

7. (HD) theo trên MF = 1/2 DE => MD = MF => ΔMDF cân tại M => $\angle D_1 = \angle F_1$

ΔO'BF cân tại O' (vì O'B và O'F cùng là bán kính) => $\angle F_3 = \angle B_1$ mà $\angle B_1 = \angle D_1$ (Cùng phụ với $\angle DEB$) => $\angle F_1 = \angle F_3$ => $\angle F_1 + \angle F_2 = \angle F_3 + \angle F_2$. Mà $\angle F_3 + \angle F_2 = \angle BFC = 90^0$ => $\angle F_1 + \angle F_2 = 90^0 = \angle MFO'$ hay MF $\perp$ O'F tại F => MF là tiếp tuyến của (O').

Bài 21. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi I là trung điểm của OA . Vẽ đường tron tâm I đi qua A, trên (I) lấy P bất kì, AP cắt (O) tại Q.

1. Chứng minh rằng các đường tròn (I) và (O) tiếp xúc nhau tại A.
2. Chứng minh IP // OQ.
3. Chứng minh rằng AP = PQ.
4. Xác định vị trí của P để tam giác AQB có diện tích lớn nhất.



Lời giải:

1. Ta có OI = OA – IA mà OA và IA lần lượt là các bán kính của đ/ tròn (O) và đường tròn (I) . Vậy đ/ tròn (O) và đường tròn (I) tiếp xúc nhau tại A .

2. ΔOAQ cân tại O (vì OA và OQ cùng là bán kính) => $\angle A_1 = \angle Q_1$

ΔIAP cân tại I (vì IA và IP cùng là bán kính) => $\angle A_1 = \angle P_1$

=> $\angle P_1 = \angle Q_1$ mà đây là hai góc đồng vị nên suy ra IP // OQ.

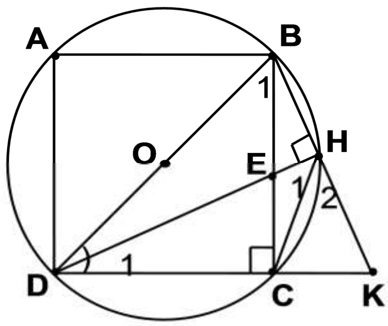
3. $\angle APO = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $OP \perp AQ$ => OP là đường cao của ΔOAQ mà ΔOAQ cân tại O nên OP là đường trung tuyến => AP = PQ.

4. (***HD***) Kẻ $QH \perp AB$ ta có $S_{AQB} = \frac{1}{2}AB.QH$. mà AB là đường kính không đổi nên S_{AQB} lớn nhất khi QH lớn nhất. QH lớn nhất khi Q trùng với trung điểm của cung AB. Để Q trùng với trung điểm của cung AB thì P phải là trung điểm của cung AO.

Thật vậy P là trung điểm của cung AO => $PI \perp AO$ mà theo trên PI // QO => $QO \perp AB$ tại O => Q là trung điểm của cung AB và khi đó H trung với O; OQ lớn nhất nên QH lớn nhất.

<u>Bài 22.</u> Cho hình vuông ABCD, điểm E thuộc cạnh BC. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với DE, đường thẳng này cắt các đường thẳng DE và DC theo thứ tự ở H và K.

1. Chứng minh BHCD là tứ giác nội tiếp .
2. Tính góc CHK.
3. Chứng minh KC. KD = KH.KB
4. Khi E di chuyển trên cạnh BC thì H di chuyển trên đường nào?



<u>Lời giải:</u>

1. Theo giả thiết ABCD là hình vuông nên $\angle BCD = 90^0$; $BH \perp DE$ tại H nên $\angle BHD = 90^0$ => như vậy H và C cùng nhìn BD dưới một góc bằng 90^0 nên H và C cùng nằm trên đường tròn đường kính BD => BHCD là tứ giác nội tiếp.

2. BHCD là tứ giác nội tiếp => $\angle BDC + \angle BHC = 180^0$. (1)

$\angle BHK$ là góc bẹt nên $\angle KHC + \angle BHC = 180^0$ (2).

Từ (1) và (2) => $\angle CHK = \angle BDC$ mà $\angle BDC = 45^0$ (vì ABCD là hình vuông) => $\angle CHK = 45^0$.

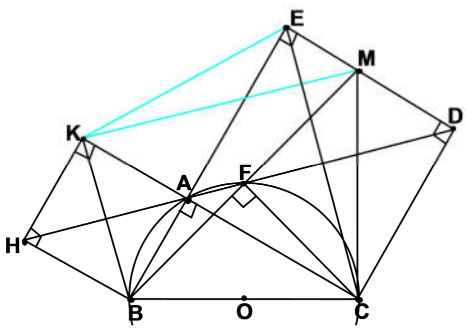
3. Xét ΔKHC và ΔKDB ta có $\angle CHK = \angle BDC = 45^0$; $\angle K$ là góc chung

=> $\Delta KHC \sim \Delta KDB$ => $\frac{KC}{KB} = \frac{KH}{KD}$ => KC. KD = KH.KB.

4. (*HD*) Ta luôn có $\angle BHD = 90^0$ và BD cố định nên khi E chuyển động trên cạnh BC cố định thì H chuyển động trên cung BC ($E \equiv B$ thì $H \equiv B$; $E \equiv C$ thì $H \equiv C$).

<u>Bài 23.</u> Cho tam giác ABC vuông ở A. Dựng ở miền ngoài tam giác ABC các hình vuông ABHK, ACDE.

1. Chứng minh ba điểm H, A, D thẳng hàng.
2. Đường thẳng HD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại F, chứng minh FBC là tam giác vuông cân.
3. Cho biết $\angle ABC > 45^0$; gọi M là giao điểm của BF và ED, Chứng minh 5 điểm B, K, E, M, C cùng nằm trên một đường tròn.
4. Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



<u>Lời giải:</u>

1. Theo giả thiết ABHK là hình vuông => $\angle BAH = 45^0$

Tứ giác AEDC là hình vuông => $\angle CAD = 45^0$; tam giác ABC vuông ở A => $\angle BAC = 90^0$

=> $\angle BAH + \angle BAC + \angle CAD = 45^0 + 90^0 + 45^0 = 180^0$ => ba điểm H, A, D thẳng hàng.

2. Ta có $\angle BFC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên tam giác BFC vuông tại F. (1).

$\angle FBC = \angle FAC$ (nội tiếp cùng chắn cung FC) mà theo trên $\angle CAD = 45^0$ hay $\angle FAC = 45^0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra ΔFBC là tam giác vuông cân tại F.

3. Theo trên $\angle BFC = 90^0$ => $\angle CFM = 90^0$ (vì là hai góc kề bù); $\angle CDM = 90^0$ (t/c hình vuông).

=> $\angle CFM + \angle CDM = 180^0$ mà đây là hai góc đối nên tứ giác CDMF nội tiếp một đường tròn suy ra $\angle CDF = \angle CMF$, mà $\angle CDF = 45^0$ (vì AEDC là hình vuông) => $\angle CMF = 45^0$ hay $\angle CMB = 45^0$.

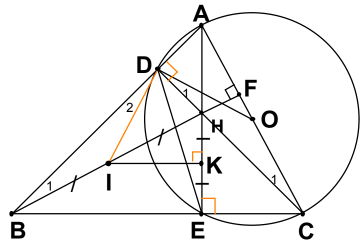
Ta cũng có $\angle CEB = 45^0$ (vì AEDC là hình vuông); $\angle BKC = 45^0$ (vì ABHK là hình vuông).

Như vậy K, E, M cùng nhìn BC dưới một góc bằng 45^0 nên cùng nằm trên cung chứa góc 45^0 dựng trên BC => 5 điểm B, K, E, M, C cùng nằm trên một đường tròn.

4. ΔCBM có $\angle B = 45^0$; $\angle M = 45^0$ => $\angle BCM = 45^0$ hay MC $\perp$ BC tại C => MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 24. Cho tam giác nhọn ABC có $\angle B = 45^0$. Vẽ đường tròn đường kính AC có tâm O, đường tròn này cắt BA và BC tại D và E.

1. Chứng minh AE = EB.
2. Gọi H là giao điểm của CD và AE, Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn HE đi qua trung điểm I của BH.
3. Chứng minh OD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp Δ BDE.



Lời giải:

1. $\angle AEC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> $\angle AEB = 90^0$ (vì là hai góc kề bù); Theo giả thiết $\angle ABE = 45^0$

=> ΔAEB là tam giác vuông cân tại E => EA = EB.

2. Gọi K là trung điểm của HE (1) ; I là trung điểm của HB => IK là đường trung bình của tam giác HBE => IK // BE mà $\angle AEC = 90^0$ nên BE $\perp$ HE tại E => IK $\perp$ HE tại K (2).

Từ (1) và (2) => IK là trung trực của HE . Vậy trung trực của đoạn HE đi qua trung điểm I của BH.

3. theo trên I thuộc trung trực của HE => IE = IH mà I là trung điểm của BH => IE = IB.

$\angle ADC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\angle BDH = 90^0$ (kề bù $\angle ADC$) => tam giác BDH vuông tại D có DI là trung tuyến (do I là trung điểm của BH) => ID = 1/2 BH hay ID = IB => IE = IB = ID => I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE bán kính ID.

Ta có ΔODC cân tại O (vì OD và OC là bán kính) => $\angle D_1 = \angle C_1$. (3)

ΔIBD cân tại I (vì ID và IB là bán kính) => $\angle D_2 = \angle B_1$. (4)

Theo trên ta có CD và AE là hai đường cao của tam giác ABC => H là trực tâm của tam giác ABC => BH cũng là đường cao của tam giác ABC => BH $\perp$ AC tại F => ΔAEB có $\angle AFB = 90^0$.

Theo trên ΔADC có $\angle ADC = 90^0$ => $\angle B_1 = \angle C_1$ (cùng phụ $\angle BAC$) (5).

Từ (3), (4), (5) =>$\angle D_1 = \angle D_2$ mà $\angle D_2 + \angle IDH = \angle BDC = 90^0$=> $\angle D_1 + \angle IDH = 90^0 = \angle IDO$ => OD $\perp$ ID tại D => OD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.

Bài 25. Cho đường tròn (O), BC là dây bất kì (BC< 2R). Kẻ các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C chúng cắt nhau tại A. Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M rồi kẻ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, AC, AB. Gọi giao điểm của BM, IK là P; giao điểm của CM, IH là Q.

1. Chứng minh tam giác ABC cân. **2**. Các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp .

3. Chứng minh $MI^2 = MH.MK$. **4**. Chứng minh PQ $\perp$ MI.

Lời giải:

1. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có AB = AC => ΔABC cân tại A.

2. Theo giả thiết MI $\perp$ BC => $\angle MIB = 90^0$; MK $\perp$ AB => $\angle MKB = 90^0$.

=> $\angle MIB + \angle MKB = 180^0$ mà đây là hai góc đối => tứ giác BIMK nội tiếp

**** (Chứng minh tứ giác CIMH nội tiếp tương tự tứ giác BIMK)***

3. Theo trên tứ giác BIMK nội tiếp => $\angle KMI + \angle KBI = 180^0$; tứ giác CHMI nội tiếp => $\angle HMI + \angle HCI = 180^0$. mà $\angle KBI = \angle HCI$ (vì tam giác ABC cân tại A) => $\angle KMI = \angle HMI$ (1).

Theo trên tứ giác BIMK nội tiếp => $\angle B_1 = \angle I_1$ (nội tiếp cùng chắn cung KM); tứ giác CHMI nội tiếp => $\angle H_1 = \angle C_1$ (nội tiếp cùng chắn cung IM). Mà $\angle B_1 = \angle C_1$ (= 1/2 sđ $\overset{\frown}{BM}$) => $\angle I_1 = \angle H_1$ (2).

1) và (2) => ΔMKI ΔMIH

$\frac{MI}{MH} = \frac{MK}{MI}$ => MI^2 =

.MK