8. Biết rằng bất đẳng thức :

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \geq (x_1 + x_2 + ... + x_{n-1})x_n$$

thỏa mãn với mọi số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ $(n \geq 1)$. Hỏi n phải bằng bao nhiêu.

Giải

Giả sử bất đẳng thức :

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \geq (x_1 + x_2 + ... + x_{n-1})x_n \quad (1)$$

thỏa mãn với mọi số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ $(n \geq 1)$

Khi đó nó cũng xảy ra với $\begin{cases} x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = 1 \\ x_n = 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad (n - 1) + 4 \geq (n - 1)2$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq n \leq 5$$

Đảo lại, giả sử $1 \leq n \leq 5$, ta sẽ chứng minh rằng (1) được thỏa mãn với mọi bộ số thực $x_1, x_2, ..., x_n$.

Quả vậy, xét tam thức :

$$f(x_n) = x_n^2 - (x_1 + x_2 + ... + x_{n-1})x_n + x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2$$

Đây là tam thức bậc 2 đối với x_n, và ta có :

$$\Delta = (x_1 + ... + x_{n-1})^2 - 4(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2)$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski :

$$4(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2) \geq (n - 1)(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2)$$

$$\geq (x_1 + x_2 + ... + x_{n-1})^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x_n) \geq 0, \forall x_n \in R$$

Vậy kết quả cần tìm là $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

9. Xác định số hạng tổng quát của dãy số $\{u_n\}$, biết rằng :

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 9u_n^3 + 3u_n \ (n = 1, 2, 3, ...) \end{cases}$$

Giải

Đặt : $V_n = 3u_n$ ($n = 1, 2, \ldots$). Ta có : $\begin{cases} V_1 = 6 \\ V_{n+1} = V_n^3 + 3V_n \end{cases}$

Chọn x_1, x_2 sao cho : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$

- Với $n = 1$, ta có :

$$V_1 = 6 = x_1 + x_2 = x_1^{3^{1-1}} + x_2^{3^{1-1}}$$

- Với $n = k$ ($k \in N$) ta giả sử :

$$V_k = x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}}$$

- Với $n = k + 1$, ta có :

$$V_{k+1} = V_k^3 + 3V_k$$

$$= \left(x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}}\right)^3 + 3\left(x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}}\right)$$

$$= x_1^{3^k} + x_2^{3^k} + 3(x_1x_2)^{3^{k-1}}\left(x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}}\right) + 3\left(x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}}\right)$$

$$= x_1^{3^k} + x_2^{3^k} \quad (\text{vì } (x_1x_2)^{3^{k-1}} = (-1)^{3^{k-1}} = -1)$$

Theo nguyên lí quy nạp thì :

$$V_n = x_1^{3^{n-1}} + x_2^{3^{n-1}}, \forall n \in N$$

Vậy : $u_n = \dfrac{1}{3}\left[(3 - \sqrt{10})^{3^{n-1}} + (3 + \sqrt{10})^{3^{n-1}}\right]$

(Vì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 6x - 1 = 0$).

10. Cho dãy $\{x_n\}$ xác định như sau : $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \left[\dfrac{3}{2}x_n\right] & \forall n \geq 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có vô hạn các số chẵn, có vô hạn các số lẻ. (Kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của x).

Giải

- Giả sử dãy $\{x_n\}$" chỉ có hữu hạn các số chẵn, suy ra có ít nhất một số $n \in N$ sao cho x_k lẻ, $\forall k \geq n$.

Đặt : $x_k = 2^{\alpha}.\beta + 1$ (với $\begin{cases} \alpha, \beta \in N \\ \beta \text{ lẻ} \end{cases}$)

Ta suy ra : $x_{k+1} = 2^{\alpha-1}.3\beta + 1$

$x_{k+2} = 2^{\alpha-2}.3^2\beta + 1$

. . . .

$x_{k+\alpha} = 3^{\alpha}\beta + 1$

$\Rightarrow$ $x_{k+\alpha}$ là số chẵn $\Rightarrow$ vô lí.

Từ đó suy ra rằng dãy đã cho phải có vô hạn các số chẵn.

- Giả sử dãy $\{x_n\}^{\infty}$ chỉ có hữu hạn các số lẻ, suy ra có ít nhất một số $n \in N$ sao cho x_k chẵn, $\forall k \geq n$.

Đặt : $x_k = 2^{\alpha}\beta$ (với $\begin{cases} \alpha, \beta \in N \\ \beta \text{ lẻ} \end{cases}$)

Ta suy ra : $x_{k+1} = 3.2^{\alpha-1}\beta$

$x_{k+2} = 3^2.2^{\alpha-2}\beta$

. . . .

$x_{k+\alpha} = 3^{\alpha}.\beta$

$\Rightarrow$ $x_{k+\alpha}$ là số lẻ $\Rightarrow$ vô lí

Từ đó suy ra dãy đã cho phải có vô hạn các số lẻ.

11. Cho n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ $(n \geq 2)$ thỏa :

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = 1.$$

Chứng minh rằng : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}} \geq (n-1)\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}$

Giải

Ta có : $$f = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}} - (n-1)\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n}a_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}}\right) - \left(\sum_{j=1}^{n}(1-a_j)\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_j\sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}} - (1-a_j)\sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}\right)$$

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j(1-a_i)-(1-a_j)a_i}{\sqrt{a_i(1-a_i)}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j-a_i}{\sqrt{a_i(1-a_i)}}$$

$$= \sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{a_j-a_i}{\sqrt{a_i(1-a_i)}}+\frac{a_i-a_j}{\sqrt{a_j(1-a_j)}}\right) \ge 0$$

(Vì $\dfrac{a_j-a_i}{\sqrt{a_i(1-a_i)}}+\dfrac{a_i-a_j}{\sqrt{a_j(1-a_j)}} = \dfrac{(a_j-a_i)\left[\sqrt{a_j(1-a_j)}-\sqrt{a_i(1-a_i)}\right]}{\sqrt{a_ia_j(1-a_i)(1-a_j)}}$

$$= \frac{(a_i-a_j)^2(1-a_i-a_j)}{\sqrt{a_ia_j(1-a_i)(1-a_j)}\left[\sqrt{a_j(1-a_j)}+\sqrt{a_i(1-a_i)}\right]} \ge 0).$$

12. Cho dãy $\{x_n\}$ với $x_1 = a \neq -2$ và $x_{n+1} = \dfrac{3\sqrt{2x_n^2+2}-2}{2x_n+\sqrt{2x_n^2+2}}$, $\forall n \in N$.

Xét tính hội tụ của dãy và tìm giới hạn của dãy (nếu có) tùy theo trường hợp của a.

Giải

1. Đặt : $f(x) = \dfrac{3\sqrt{2x^2+2}-2}{2x+\sqrt{2x^2+2}}$

và $g(x) = f(x) - x = \dfrac{-2x^2+(3-x)\sqrt{2x^2+2}-2}{2x+\sqrt{2x^2+2}}$ $\quad(x \neq -1)$

Giải phương trình g(x) = 0 ta được hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -7 \end{array}\right.$

Để ý rằng, trên mỗi khoảng $(-\infty, -7)$, $(1, +\infty)$ thì g đều liên tục vì không có nghiệm nên dấu của g trên mỗi khoảng này không đổi.

Hơn nữa :

- $g(-8) = \dfrac{-128+11\sqrt{130}-2}{-16+\sqrt{130}} = \dfrac{\sqrt{130}(\sqrt{130}-11)}{16-\sqrt{130}} > 0$

$\Rightarrow g(x) > 0, \forall x < -7 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > x, \forall x < -7$

- $g(2) = \dfrac{-10 + \sqrt{10}}{\sqrt{10} + 4} < 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) < 0, \forall x > 1$

$$\Rightarrow \quad f(x) < x, \ \forall x > 1.$$

2. Đặt : $h(x) = f(x) - 1, \quad x \neq -1$

$$= \frac{2\sqrt{2x^2 + 2} - 2(x + 1)}{2x + \sqrt{2x^2 + 2}}$$

Phương trình $h(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lí luận tương tự như trên, ta suy ra h không đổi dấu trên mỗ khoảng $(-1, 1), (1, +\infty)$.

Hơn nữa :

$$\begin{cases} h(0) = \dfrac{2\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2} > 0 \\ h(2) = \dfrac{2\sqrt{10} - 6}{4 + \sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10} - 3}{2 + \sqrt{10}} > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad h(x) \geq 0, \ \forall x > -1.$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq 1, \ \forall x > -1$

3. Đặt : $k(x) = f(x) - (-7)$

$$= \frac{14x - 2 + 10\sqrt{2x^2 + 2}}{2x + \sqrt{2x^2 + 2}} \qquad x \neq -1$$

Phương trình $k(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = -7$.

Lí luận tương tự như ở 1., ta suy ra k(x) không đổi dấu trên mỗ khoảng $(-\infty, -7), (-7, -1)$.

Hơn nữa :

$$\begin{cases} k(-8) = \dfrac{10\sqrt{130} - 114}{\sqrt{130} - 16} < 0 \\ k(-6) = \dfrac{10\sqrt{74} - 86}{\sqrt{74} - 12} < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k(x) \leq 0, \forall x < -1$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \quad x = -7 \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq -7, \ \forall x < -1$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \quad x = -7$.

Từ các kết quả trên ta thu được :

a) Nếu $x_1 = a > -1$ thì theo 2, ta có :

$$x_2 = f(x_1) \geq 1$$

Từ đó suy ra $x_n \geq 1, \forall n \geq 2$

(Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $a = 1$)

Kết hợp với 1, ta được :

$$x_{n+1} = f(x_n) \leq x_n, \forall n \geq 2$$

(Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $a = 1$).

Vậy dãy $\{x_n\}$ là dãy giảm (nếu $a = 1$ thì $\{x_n\}$ là dãy hằng) và bị chặn dưới. Do đó dãy $\{x_n\}$ hội tụ.

Dễ dàng chứng minh được $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$.

b) Nếu $x_1 = a < -1$, tương tự trường hợp trên, theo 3, ta được :

$$x_2 = f(x_1) \leq -7.$$

Từ đó suy ra $x_n \leq -7, \forall n \in N$

(Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $a = -7$).

Kết hợp với 1, ta được :

$$x_{n+1} = f(x_n) \geq x_n, \forall x \geq 2$$

(Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $a = -7$).

Vậy dãy $\{x_n\}$ là dãy tăng (nếu $a = -7$ thì $\{x_n\}$ là dãy hằng) vì bị chặn trên.

Do đó dãy $\{x_n\}$ hội tụ và $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -7$.

3. Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau :

$$u_1 = 1 \ ; \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{1999}$$

Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{u_1}{u_2} + \dfrac{u_2}{u_3} + \ldots + \dfrac{u_2}{u_{n+1}} \right)$.

Giải

Ta có : $$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_n^2}{u_{n+1}u_n} = \frac{1999(u_{n+1} - u_n)}{u_{n+1}u_n}$$

$$= 1999\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \ldots + \frac{u_k}{u_{k+1}} = 1999\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{k+1}}\right)$$

$$= 1999\left(1 - \frac{1}{u_{k+1}}\right)$$

Hơn nữa :

$$u_{n+1} > u_n \geq 1, \quad \forall n \in N$$

$\Rightarrow$ $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu tăng.

Do đó, nếu dãy $\{u_n\}$ bị chặn trên thì nó hội tụ về a hữu hạn. Suy ra

$$a = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(u_n + \frac{u_n^2}{1999}\right) = a + \frac{a^2}{1999}$$

$\Rightarrow$ $a = 0$

$\Rightarrow$ vô lí (vì $u_n \geq 1, \forall n \in N \Rightarrow a \geq 1$)

Vậy dãy $\{u_n\}$ không bị chặn trên. Do đó :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \ldots + \frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = 1999.$$

14. Cho p là số nguyên tố.

Chứng minh rằng $\dfrac{C_{2p}^{p} - 2}{p^2}$ là số nguyên.

Giải

- Nếu $p = 2$ thì $\dfrac{C_4^2 - 2}{4} = 1$
- Nếu $p > 2$ thì :

$$C_{2p}^{p} = \frac{(2p)!}{(p!)^2} = \frac{(2p).(2p-1)!}{p.(p-1)!p!} = 2.C_{2p-1}^{p-1}$$

Hơn nữa :

$$(2p - k)(p + k) \equiv k(p - k) \pmod{p^2}$$

$\forall k = 1, 2, \ldots, \dfrac{p-1}{2}$)

$$\Rightarrow \quad [(2p-1)(p+1)].[(2p-2)(p+2)]\ldots\left[\left(2p-\frac{p-1}{2}\right)\left(p+\frac{p-1}{2}\right)\right]$$

$$\equiv [1(p-1)].[2(p-2)]\ldots\left[\frac{p-1}{2}.\frac{p+1}{2}\right] \pmod{p^2}$$

$$\Rightarrow \quad (p+1)(p+2)\ldots(2p-1) \equiv (p-1)! \pmod{p^2}$$

$$\Rightarrow \quad C_{2p-1}^{p-1} = \frac{(p+1)(p+2)\ldots(2p-2)(2p-1)}{(p-1)!}$$

$$= \frac{m.p^2 + (p-1)!}{(p-1)!} \quad (\text{với } m \in Z)$$

$$= \frac{mp^2}{(p-1)!} + 1$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{mp^2}{(p-1)!} = C_{2p-1}^{p-1} - 1$ là số nguyên

$\Rightarrow \quad m \vdots (p-1)!$ (Vì p^2 và $(p-1)!$ là hai số nguyên tố cùng nhau)

$\Rightarrow \quad m = n.(p-1)!$ (với $n \in Z$)

$$\Rightarrow \quad C_{2p-1}^{p-1} - 1 = np^2$$

$$\Rightarrow \quad C_{2p}^{p} - 2 = 2\left(C_{2p-1}^{p-1} - 1\right) = 2np^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{C_{2p}^{p} - 2}{p^2} = 2n \in Z.$$

15. Cho dãy số dương $u_0, u_1, \ldots, u_{1999}$ thỏa mãn các điều kiện :

$$\begin{cases} u_0 = u_{1999} = 1 & (1) \\ u_i = 2\sqrt[4]{u_{i-1}.u_{i+1}} \ ; \ i = 1,2,\ldots,1998 & (2) \end{cases}$$

Chứng minh rằng :

a) $1 \le u_i < 4; \ \forall i = 0, 2, \ldots, 1999$

b) $u_0 = u_{1999}, \ u_1 = u_{1998}, \ldots, \ u_{999} = u_{1000}$

c) $u_0 < u_1 < \ldots < u_{999}$.

Giải

a) Đặt : $\alpha = \underset{i=\overline{0,1999}}{\text{Max}}\, u_i$, $\beta = \underset{i=\overline{0,1999}}{\text{Min}}\, u_i$ $(\alpha, \beta > 0)$

Nếu $\alpha = \beta$ thì $u_0 = u_1 = ... = u_{1999} = 1$, nhưng điều kiện (2) cho ta thấy điều này vô lí.

Như vậy $\alpha > \beta$.

Mặt khác theo định nghĩa, ta có :

$$\alpha \geq u_i \geq \beta, \quad \forall i = \overline{1,1999}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \geq 1 \geq \beta \qquad (3)$$

Nếu $\beta = u_k$ ($k \in \{1, 2, ..., 1998\}$), theo (2) thì

$$\beta = u_k = 2\sqrt[4]{u_{k-1}.u_{k+1}} \geq 2\sqrt[4]{\beta^2}$$

$$\Rightarrow \quad \beta^4 \geq 16\beta^2$$

$$\Rightarrow \quad \beta \geq 4$$

$\Rightarrow$ vô lí (vì mâu thuẫn với (3))

Như vậy $\beta \neq u_k, \ \forall k = \overline{1,1998}$

Suy ra $\beta = u_1 = u_{1999} = 1$

Vậy ta đã chứng minh được $u_i \geq 1, \ \forall i = \overline{0,1999}$

Do $\alpha > \beta = 1$ nên ta có $\alpha = u_k$ nào đó (với $k \in \{1, 2, ..., 1998\}$)

$$\Rightarrow \quad \alpha = u_k = 2\sqrt[4]{u_{k-1}.u_{k+1}} \leq 2\sqrt[4]{\alpha^2}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \leq 4$$

Nếu như $\alpha = 4$ thì $u_{k-1} = u_{k+1} = 4$. Tương tự dãy liên tiếp (2) ta suy ra :

$$u_0 = u_1 = u_2 = ... = u_{1999} = 4$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết (1), suy ra $\alpha < 4$.

Điều đó có nghĩa là $u_i < 4, \ \forall i = \overline{0,1999}$.

Tóm lại ta đi đến kết luận rằng :

$$1 \leq u_i < 4, \ \forall i = \overline{0,1999}.$$

b) Dễ dàng chứng minh được rằng dãy số thỏa (1), (2) là duy nhất.

Xét dãy $u_{1999}, u_{1998}, ..., u_1, u_0$

Rõ ràng dãy này cũng thỏa mãn điều kiện (1) và (2). Do tính duy nhất suy ra :

$$u_0 = u_{1999}, \quad u_1 = u_{1998}, ..., \quad u_{999} = u_{1000}.$$

c) Theo điều kiện (2), ta suy ra :

$$u_{999} = 2\sqrt[4]{u_{998}\,u_{1000}}$$

Theo chứng minh trên ta có $0 < u_{999} = u_{1000} < 4$

$$\Rightarrow \quad u_{999}^2 = 4\sqrt{u_{998}.u_{999}} < 4u_{999}$$

$$\Rightarrow \quad u_{998}.u_{999} < u_{999}^2$$

$$\Rightarrow \quad u_{998} < u_{999}$$

Lí luận tương tự ta có điều phải chứng minh.

16. Từ dãy $\{u_n\}$ được xác định bởi :

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1999u_n}{2000}, \quad n \in N \end{cases}$$

ta thành lập dãy $\{S_n\}$ với $\quad S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{u_i}{u_{i+1} - 1}$

Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Giải

Từ giả thiết ta suy ra :

$$u_{n+1} = \frac{u_n(u_n - 1)}{2000} + u_n, \forall n \in N$$

Vì $u_1 = 2$ nên ta có :

$$2 = u_1 < u_2 < \ldots < u_n < \ldots$$

có nghĩa rằng $\{u_n\}$ là một dãy tăng. Giả sử dãy này bị chặn trên, lúc đó tồn tại $L \in [2, +\infty)$ sao cho $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$

Từ đó : $L = \dfrac{L^2 + 1999L}{2000} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} L = 0 \\ L = 1 \end{array}\right.$

Điều này vô lí (vì $L \geq 2$).

Như vậy dãy $\{u_n\}$ không bị chặn trên.

Do đó : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Mặt khác, cũng từ giả thiết :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1999u_n}{2000}$$

$$\Rightarrow \quad u_n(u_n - 1) = 2000(u_{n+1} - u_n)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} = \frac{u_n(u_n - 1)}{(u_{n+1} - 1)(u_n - 1)} = \frac{2000(u_{n+1} - u_n)}{(u_{n+1} - 1)(u_n - 1)}$$

$$= 2000\left(\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{u_{n+1} - 1} = 2000\left(\frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}\right)$$

$$= 2000\left(1 - \frac{1}{u_{n+1} - 1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} S_n = 2000.$$

17. Cho dãy số $\{a_n\}$ với $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \ \forall n \in N \end{cases}$

Tìm tất cả các giá trị của n để $a_n - 1$ là một số chính phương.

Giải

Xét phương trình đặc trưng :

$$t^2 = 4t - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad t = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \alpha(2 + \sqrt{3})^n + \beta(2 - \sqrt{3})^n \ (\alpha, \beta \in R)$$

Hơn nữa : $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2(\alpha + \beta) + \sqrt{3}(\alpha - \beta) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{2}(t_1^n + t_2^n)$$

Do : $\quad 2 \pm \sqrt{3} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3} \pm 1)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$$\Rightarrow \quad a_n - 1 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}\right] - 1$$

$$= \left[\frac{(\sqrt{3}+1)^n . (\sqrt{3}-1)^n}{(\sqrt{2})^{n+1}}\right]^2$$

Vì $a_n - 1$ là số chính phương nên :

$$A = \frac{(\sqrt{3}+1)^n - (\sqrt{3}-1)^n}{(\sqrt{2})^{n+1}} \in Z$$

Ta lần lượt xét các trường hợp :

- Nếu $n = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \in Z$
- Nếu $n = 1 \quad \Rightarrow \quad A = 1 \in Z$
- Nếu $n = 2k,\ k \in N^*$

Xét dãy $\{b_k\}$, với :

$$b_k = \frac{(2+\sqrt{3})^k - (2-\sqrt{3})^k}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+1)^n - (\sqrt{3}-1)^n}{(\sqrt{2})^{n+1}} = A$$

Ta lại có $2 \pm \sqrt{3}$ là các nghiệm của phương trình đặc trưng $x^2 = 4x -$ [illegible]
nên $\{b_k\}$ thỏa :

$$b_{k+2} = 4b_{k+1} - b_k$$

Mà $\begin{cases} b_0 = 0 \\ b_1 = \sqrt{6} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b_k \notin Q,\ \forall k \in N^*$

$\Rightarrow \quad a_n - 1$ không phải là số chính phương.

- Nếu $n = 2k + 1,\ k \in N^*$:

Ta có :

$$\frac{(\sqrt{3}+1)^n - (\sqrt{3}-1)^n}{(\sqrt{2})^{n+1}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^{2k} - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^{2k}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^k - (2-\sqrt{3})^k\right]$$

Đặt : $C_k = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}[(2+\sqrt{3})^k - (2-\sqrt{3})^k]$, $k \in N^*$

thì dãy $\{C_k\}$ thỏa mãn $C_{k+1} = 4C_{k+1} - C_k$

Mà $\begin{cases} C_0 = 0 \\ C_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \quad C_k \in Z, \forall k \in N^*$

Vậy : $a_n - 1$ là số chính phương $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 0 \\ n \text{ nguyên dương lẻ} \end{array}\right.$

18. Cho $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos^2\alpha\sqrt[n]{\cos\alpha} + \sin^2\alpha\sqrt[n]{\sin\alpha})^n$.

Giải

Đặt : $\quad x_n = \cos^2\alpha\sqrt[n]{\cos\alpha} + \sin^2\alpha\sqrt[n]{\sin\alpha}$, $n \in N$

$\Rightarrow \quad x_n \to 1, \qquad$ khi $n \to +\infty$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\ln x_n}{x_n - 1} \to n$, khi $n \to +\infty$

$\left(\text{Để ý : } \begin{cases} 0 < x_n < 1, \forall n \in N \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} \to 1, \text{ khi } x \to 0 \end{cases} \right)$

$\Rightarrow \quad \dfrac{n\ln x_n}{n(x_n - 1)} \to 1$, khi $n \to +\infty$

Mà $\quad n(x_n - 1) = \cos^2\alpha\dfrac{\sqrt[n]{\cos\alpha} - 1}{\dfrac{1}{n}} + \sin^2\alpha\dfrac{\sqrt[n]{\sin\alpha} - 1}{\dfrac{1}{n}}$

$\longrightarrow \cos^2\alpha\ln\cos\alpha + \sin^2\alpha\ln\sin\alpha$

(Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \ln x$ (với $x > 0$))

$\Rightarrow \quad (x_n)^n \to (\cos\alpha)^{\cos^2\alpha}.(\sin\alpha)^{\sin^2\alpha}$.

19. Cho dãy số $\{u_n\}$ với :

$$\begin{cases} u_1 \in R \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\ln(1 + u_n^2) - 1999, \ n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ hội tụ.

Giải

Ta có $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) - 1999$ là hàm số khả vi trên R và

$$f'(x) = \frac{x}{1 + x^2} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad (\forall x \in R)$$

Mặt khác, đặt :

$$g(x) = x + 1999 - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) = x - f(x)$$

thì g cũng khả vi trên R và

$$g'(x) = 1 - \frac{x}{1 + x^2} > 0 \quad (\forall x \in R)$$

Hơn nữa :

$$g(0).g(-1999) = -\frac{1999}{2}\ln(1 + 1999^2) < 0$$

Từ đó suy ra tồn tại $L \in (-1999, 0)$ sao cho :

$$g(L) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(L) = L$$

Áp dụng định lí Lagrange, ta có $C \in E$ sao cho :

$$|u_{n+1} - L| = |f(n_1) - f(L)| = |f'(C)|.|u_n - L|$$

$$\leq \frac{1}{2}|u_n - L|$$

Từ đó ta được :

$$|u_n - L| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - L|, \ \forall n \in N$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = L.$$

20. Cho $\begin{cases} n \in N \\ n \geq 3 \end{cases}$.

Hãy xác định giá trị lớn nhất của G và giá trị nhỏ nhất của K sao cho với n số dương tùy ý $a_1, a_2, ..., a_n$ thì bất đẳng thức sau đây luôn luôn đúng :

$$K < \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + ... + \frac{a_n}{a_n + a_1} < G.$$

Giải

Đặt : $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$

$$T = T(a_1, a_2, ..., a_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + a_{i+1}} \quad \text{(trong đó : } a_{n+1} = a_1\text{)}$$

Ta có : $T > \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S} = 1 \quad \Rightarrow \quad K \geq 1.$

Mặt khác :

$$n - T = \frac{a_2}{a_1 + a_2} + \frac{a_3}{a_2 + a_3} + ... + \frac{a_n}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_1}{a_n + a_1}$$

$$= T(a_n, a_{n-1}, ..., a_1) > 1$$

$$\Rightarrow \quad T < n - 1$$

$$G \leq n - 1$$

Với $x > 0$, ta có

$$T(1, x, ..., x^{n-1}) = \frac{1}{1+x} + \frac{x}{x + x^2} + ... + \frac{x^{n-1}}{x^{n-1} + 1}$$

$$= \frac{n-1}{1+x} + \frac{x^{n-1}}{1 + x^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} T(1, x, ..., x^{n-1}) = n - 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} T(1, x, ..., x^{n-1}) = 1 \end{cases}$$

Như vậy : MaxG $= n - 1$, MinK $= 1$.

2. CÁC BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ TRONG CÁC ĐỀ THI OLYMPIC 30-4 LẦN VI. NĂM 2000

1. Cho dãy $\{u_n\}$ được xác định như sau :

$$\begin{cases} u_0 = 2000 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2} \ ; \ n = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n^3}{n}$.

Giải

Ta có : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2}$, $\forall n \geq 0$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1}^3 = u_n^3 + \frac{1}{u_n^6} + 3 + \frac{3}{u_n^3}, \qquad (1)$$

$$> u_n^3 + 3, \forall n \geq 0 \quad (\text{Do } u_n > 0, \forall n \geq 0)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} u_1^3 > u_0^3 + 3 \\ u_2^3 > u_1^3 + 3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ u_n^3 > u_{n-1}^3 + 3 \end{cases}, \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad u_n^3 > 3n + u_0^3, \ \forall n \geq 1 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$u_{n+1}^3 < u_n^3 + 3 + \frac{1}{u_0^3 + 3n} + \frac{1}{(u_0^3 + 3n)^2}$$

$$< u_n^3 + 3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{9n^2}, \ \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad u_n^3 < u_1^3 + 3(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}, \quad \forall n \geq 2 \qquad (3)$$

Mặt khác, ta có :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\leq 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$< 2, \forall n \geq 1 \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2 \leq n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 2n, \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < \sqrt{2n}, \quad \forall n \geq 1 \qquad (5)$$

Từ (2), (3), (4) và (5) suy ra :

$$3 + \frac{u_0^3}{n} < \frac{u_n^3}{n} < \frac{u_1^3}{n} + 3 + \sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{2}{gn}, \quad \forall n \geq 2$$

Vì $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 + \frac{u_0^3}{n}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{u_1^3}{n} + 3 + \sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{2}{gn}\right) = 3$

Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n^3}{n} = 3$.

2. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ u_{n+2} = u_n + 2u_{n+1}, \ n \in N^* \end{cases}$$

Đặt $a = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Tính a.

Giải

- Với n = 1, ta có :

$$u_2^2 - u_1u_3 = 4 - 1.5 = (-1)^1.$$

- Với n = k ∈ N, giả sử :

$$u_{k+1}^2 - u_k.u_{k+2} = (-1)^k.$$

- Với n = k + 1, ta có :

$$\begin{aligned} u_{k+2}^2 - u_{k+1}.u_{k+3} &= u_{k+2}(u_k + 2u_{k+1}) - u_{k+1}(u_{k+1} + 2u_{k+2}) \\ &= u_{k+2}.u_k - u_{k+1}^2 \\ &= -(-1)^k \\ &= (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

Như vậy : $u_{n+1}^2 - u_n.u_{n+2} = (-1)^n, \forall n \in N$

Để ý rằng : $u_n \geq 1, \forall n \in N$, nên :

$$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 - \frac{u_{n+2}}{u_n} = \frac{(-1)^n}{u_n^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 - \frac{u_n + 2u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^n}{u_n^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 - 2\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{(-1)^n}{u_n^2} \qquad (*)$$

Hơn nữa, cũng từ : $u_{n+2} = u_n + 2u_{n+1}, \forall n \in N$

$\Rightarrow \quad u_{n+2} - u_{n+1} = u_n + u_{n+1} > 0, \forall n \in N$

$\Rightarrow \quad u_{n+2} > u_{n+1}, \forall n \in N$

$\Rightarrow \quad \{u_n\}$ là dãy tăng

Do đó, nếu $\{u_n\}$ bị chặn thì $\{u_n\}$ hội tụ về $b \in R$.

Lúc đó, từ : $u_{n+2} = u_n + 2u_{n+1}, \forall n \in N$

$\Rightarrow \quad b = b + 2b$

$\Rightarrow \quad b = 0$

$\Rightarrow$ vô lí (Vì $u_n \geq 1, \forall n \in N \Rightarrow b \geq 1$)

$\Rightarrow \quad \{u_n\}$ không bị chặn trên

Như vậy $\{u_n\}$ tăng và không bị chặn trên, nên :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Cùng với (*), suy ra : $a^2 - 2a - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad a = 1 + \sqrt{2}$ (vì $a \geq 1$)

Vậy $a = 1 + \sqrt{2}$.

3. Cho $f : N \to Z$

$n \mapsto f(n)$ thỏa :

$$\begin{cases} f(m+n) - f(m) - f(n) \in \{0,1\}, \forall m, n \in N \\ f(n) \geq 0, \forall n \in N \\ f(2) = 0 < f(3), f(9999) = 3333 \end{cases}$$

Tính f(2000) ?

Giải

Do $f(m+n) - f(m) - f(n) \in \{0, 1\}, \forall m, n \in N$

$\Rightarrow \quad f(m+n) \geq f(m) + f(n), \forall m, n \in N$

- Lấy $m = n = 1$, ta có : $0 = f(2) \geq 2f(1)$

$\Rightarrow \quad f(1) \leq 0$

Mà $\quad f(1) \geq 0$ (Do giả thiết)

$\Rightarrow \quad f(1) = 0$

- Lấy m = 2, n = 1, ta có :

$$f(3) - \underbrace{f(2)}_{0} - \underbrace{f(1)}_{1} \in \{0, 1\}$$

$\Rightarrow \quad f(3) \in \{0, 1\}$

Mà $\quad f(3) > 0$

$\Rightarrow \quad f(3) = 1$

$\Rightarrow \quad f(2.3) = f(3 + 3) \geq f(3) + f(3) = 2$

$\Rightarrow \quad f(2.3) \geq 2$

Giả sử $\quad f(k.3) \geq k \quad (k \in N)$

Khi đó $\quad f((k + 1)3) = f(k.3 + 3) \geq f(k.3) + f(3)$

$$\geq k + 1$$

Như thế ta có : $\quad f(3.n) \geq n, \forall n \in N$

Hơn nữa, nếu $\begin{cases} n \in N \\ f(3n) > n \end{cases}$

thì $\quad f(3(n + 1)) = f(3n + 3) \geq f(3n) + f(3)$

$$> n + 1$$

Như thế ta có : $\quad f(3m) > m, \forall m \geq n$

Nhưng vì $\quad f(9999) = f(3.3333) = 3333$

$\Rightarrow \quad f(3.n) = n, \forall n \in \{1, 2, ..., 3333\}$

$\Rightarrow \quad f(3.2000) = 2000 = f(3.2000)$

$$\geq f(2.2000) + f(2000) \geq 3f(2000)$$

$\Rightarrow \quad f(2000) \leq \dfrac{2000}{3} < 667$

Mặt khác : $f(2000) \geq f(1998) + \underbrace{f(2)}_{0}$

$$\geq f(3.666) = 666$$

$\Rightarrow \quad f(2000) \geq 666$

Như vậy $\quad 666 \leq f(2000) < 667$

$\Rightarrow \quad f(2000) = 666$ (vì $f(2000) \in Z$).

4. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi :

$$\begin{cases} u_0 > 0,\ u_1 > 0 \\ u_{n+2} = (u_{n+1}.u_n^2)^{\frac{1}{3}},\ \forall n \in N \end{cases}$$

Tìm số hạng tổng quát của u_n.

Giải

+ Bằng quy nạp, ta có : $u_n > 0,\ \forall n \in N$

+ $$u_{n+2} = (u_{n+1}.u_n^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \ln u_{n+2} = \frac{1}{3}\ln u_{n+1} + \frac{2}{3}\ln u_n$$

Đặt : $V_n = \ln u_n,\ \forall n \geq 0$

$$\Rightarrow \quad V_{n+2} = \frac{1}{3}V_{n+1} + \frac{2}{3}V_n$$

$$\Leftrightarrow \quad 3V_{n+2} = V_{n+1} + 2V_n$$

Xét phương trình đặc trưng :

$$3x^2 - x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad V_n = \lambda_1 + \lambda_2\left(-\frac{2}{3}\right)^n \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in R)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = V_0 \\ \lambda_1 - \frac{2}{3}\lambda_2 = V_1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{5}(2V_0 + 3V_1) \\ \lambda_2 = \frac{3}{5}(V_0 - V_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad V_n = \frac{1}{5}(2V_0 + 3V_1) + \frac{1}{5}(3V_0 - 3V_1)\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad u_n = e^{\frac{1}{5}(2V_0 + 3V_1) + \frac{1}{5}(3V_0 - 3V_1)\left(-\frac{2}{3}\right)^n} = e^{\frac{1}{5}\ln(u_0^2 u_1^3) + \frac{1}{5}\left(\ln\frac{u_0^3}{u_1^3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$= \left(u_0^2.u_1^3\right)^{\frac{1}{5}}.u_0^{-\frac{3}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n}.u_1^{-\frac{3}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n} = u_0^{\frac{3}{5}+\frac{(-2)^n}{5.3^{n-1}}}.u_1^{\frac{3}{5}-\frac{(-2)^n}{5.3^{n-1}}}.$$

5. Cho a > 2. Định nghĩa bằng quy nạp :

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a, \quad a_{n+1} = \left(\frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} - 2\right)a_n, \ \forall n \in N.$$

Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{2}\left(2 + a - \sqrt{a^2 - 4}\right), \ \forall n \in N.$$

Giải

Vì a > 2, nên luôn chọn được số b > 1 sao cho :

$$a = b + \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad a^2 - 2 = b^2 + \frac{1}{b^2}$$

Theo cách xác định của dãy số, ta có :

$$a_2 = \left(\frac{a_1^2}{a_0^2} - 2\right)a_1 = \left(\frac{a^2}{1} - 2\right)a = \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)$$

Giả sử $a_k = \left(b^{2^{k-1}} + \frac{1}{b^{2^{k-1}}}\right)\ldots\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)$ (k ∈ N)

Khi đó :

$$a_{k+1} = \left(\frac{a_k^2}{a_{k-1}^2} - 2\right)a_k$$

$$= \left[\left(b^{2^{k-1}} + \frac{1}{b^{2^{k-1}}}\right)^2 - 2\right]a_k$$

$$= \left(b^{2^k} + \frac{1}{b^{2^k}}\right)\ldots\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)$$

Như vậy :

$$a_n = \left(b^{2^{n-1}} + \frac{1}{b^{2^{n-1}}}\right)\ldots\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right), \ \forall n \in N$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{a_k} = 1 + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{b^3}{(b^2 + 1)(b^4 + 1)} + \ldots +$$

$$+ \frac{b^{2^n - 1}}{(b^2 + 1)(b^4 + 1)\ldots(b^{2^n} + 1)}.$$

Ta lại thấy:

$$\frac{1}{2}\left(2 + a - \sqrt{a^2 - 4}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + b + \frac{1}{b} - \sqrt{\left(b + \frac{1}{b}\right)^2 - 4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 + b + \frac{1}{b} - b + \frac{1}{b}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{b}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\frac{b^2}{b^2 + 1} + \frac{b^4}{(b^2 + 1)(b^4 + 1)} + \dots + \frac{b^{2^n}}{(b^2 + 1)\dots(b^{2^n} + 1)} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{(b^2 + 1)(b^4 + 1)\dots(b^{2^n} + 1)} < 1$$

Bất đẳng thức này luôn đúng.

6. Dãy số $u_0, u_1, \dots, u_n$ xác định bởi :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_k = u_{k-1} + \dfrac{1}{n}u_{k-1}^2;\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Chứng minh rằng : $1 - \dfrac{1}{n} < u_n < 1$.

Giải

Ta có : $u_k = u_{k-1} + \dfrac{1}{n}u_{k-1}^2 \quad \left(\text{Với } \begin{cases} n \in N \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad n(u_k - u_{k-1}) = u_{k-1}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad nu_k - nu_{k-1} + u_k.u_{k-1} - u_{k-1}^2 = u_k.u_{k-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_k(n + u_{k-1}) - u_{k-1}(n + u_{k-1}) = u_k.u_{k-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad (u_k - u_{k-1})(n + u_{k-1}) = u_k.u_{k-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} = \frac{1}{n + u_{k-1}}$$

Do : $\frac{1}{2} = u_0 < u_1 < \ldots < u_n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k}\right) < n.\frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_n} < 1$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{u_n} > \frac{1}{u_0} - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} < u_n < 1$ (1)

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \le u_{k-1} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} = \frac{1}{n + u_{k-1}} > \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k}\right) > \frac{n}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_n} > \frac{n}{n+1}$

$\Rightarrow \quad 2 - \frac{n}{n+1} > \frac{1}{u_n} \quad \Rightarrow \quad \frac{n+2}{n+1} > \frac{1}{u_n}$

$\Rightarrow \quad u_n > \frac{n+1}{n+2} > \frac{n-1}{n} \quad \Rightarrow \quad u_n > 1 - \frac{1}{n}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{n} < u_n < 1.$

7. Cho dãy số (u_n) thỏa :

$$u_n = \sqrt[4]{a_1 + \sqrt[4]{a_2 + \ldots + \sqrt[4]{a_n}}}\ ,\ 0 < a_n < 2000.30^{4^n}\ ,\ n \in N$$

Chứng minh (u_n) hội tụ.

Giải

* Đặt : $b_n = \frac{a_n}{30^{4^n}}$, $n \in N \quad \Rightarrow \quad 0 < b_n < 2000$

* Xét $\left\{V_n = \sqrt[4]{b_1 + \sqrt[4]{b_2 + \ldots + \sqrt[4]{b_n}}}\right\}$

$\Rightarrow \quad u_n = 30V_n, \forall n \in N$ và (V_n) là dãy tăng.

* Xét dãy (W_n) : $\begin{cases} W_1 = \sqrt[4]{2000} \\ W_n = \sqrt[4]{2000 + u_{n-1}},\ n \ge 2 \end{cases}$

+ (W_n) dãy tăng

+ Xét $f(x) = x^4 - x - 2000, \quad x \ge \sqrt[4]{2000}$

$$f'(x) = 4x^3 - 1 > 0, \forall x \geq \sqrt[4]{2000}$$

$\Rightarrow$ f đồng biến trên $\left[\sqrt[4]{2000}, +\infty\right)$

Hơn nữa :

$$f(\sqrt[4]{2000}).f(\sqrt{2000}) = -\sqrt[4]{2000}(2000^2 - 2000 - \sqrt{2000}) < 0$$

$\Rightarrow$ $\exists!\ c \in (\sqrt[4]{2000}, \sqrt{2000})$: $f(c) = 0$

$\Leftrightarrow$ $c^4 = c + 2000$

$\Rightarrow$ $W_n < c, \forall n \in N$

$\Rightarrow$ $\{W_n\}$ hội tụ

* $W_n = \sqrt[4]{2000 + \sqrt[4]{2000 + \ldots + \sqrt[4]{2000}}}$ (n dấu $\sqrt[4]{\ }$)

$> V_n, \forall n \in R$

$\Rightarrow$ $\{V_n\}$ là dãy tăng và bị chặn trên.

$\Rightarrow$ $\{u_n\}$ là dãy tăng và bị chặn trên nên hội tụ.

8. Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + \sqrt{8u_n^2 + 1}, n \in N \end{cases}$$

Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n.

Giải

Ta có : $u_{n+1} = 3u_n + \sqrt{8u_n^2 + 1}$

$\Rightarrow$ $(u_{n+1} - 3u_n)^2 = 8u_n^2 + 1$

$\Rightarrow$ $u_{n+1}^2 - 6u_{n+1}.u_n + 9u_n^2 = 8u_n^2 + 1$

$\Rightarrow$ $u_{n+1}^2 - 6u_{n+1}.u_n + u_n^2 = 1$ (1)

Thay n + 1 bởi n ta có :

$u_n^2 - 6u_n.u_{n-1} + u_{n-1}^2 = 1$ (2)

Lấy (1) trừ (2) vế với vế :

$$\left(u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2\right) - 6u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) = 0$$

$\Rightarrow$ $(u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} + u_{n-1} - 6u_n) = 0$ (3)

Vì $\quad u_{n+1} = 3u_n + \sqrt{8u_n^2 + 1} > 3u_n > 0, \forall n \geq 0$

$\Rightarrow \quad u_n > u_{n-1} > 0, \forall n \geq 1$

Từ (3) $\Rightarrow \quad u_{n+1} - 6u_n + u_{n-1} = 0$

Do đó dãy $\{u_n\}$ được xác định như sau :

$$\begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = 6 + \sqrt{33} \\ u_{n+1} = 6u_n - u_{n-1},\ n \geq 1 \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng là :

$$x^2 - 6x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 3 + \sqrt{8} \\ x = 3 - \sqrt{8} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad u_n = \alpha(3 + \sqrt{8})^n + \beta(3 - \sqrt{8})^n$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} u_0 = \alpha + \beta = 2 \\ u_1 = \alpha(3 + \sqrt{8}) + \beta(3 - \sqrt{8}) = 6 + \sqrt{33} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{8 + \sqrt{66}}{8} \\ \beta = \dfrac{8 - \sqrt{66}}{8} \end{cases}$$

Vậy : $\quad u_n = \dfrac{8 + \sqrt{66}}{8}(3 + \sqrt{8})^n + \dfrac{8 - \sqrt{66}}{8}(3 - \sqrt{8})^n.$

9. Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi :

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$$

Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln x_n)$.

Giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x, \forall x > 0$$

Xét $\begin{cases} f(x) = \ln(1 + x) - x + \dfrac{x^2}{2} \\ g(x) = x - \ln(1 + x) \end{cases} \quad (x > 0)$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{x^2}{x+1} > 0 \\ g'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} > 0 \end{cases} \qquad (\forall x > 0)$$

$\Rightarrow$ f, g đều đồng biến trên $(0, +\infty)$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) > f(0) = 0 \\ g(x) > g(0) = 0 \end{cases} \quad (\forall x > 0)$$

Vậy : $\quad x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x, \ \forall x > 0$

Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln x_n)$:

Ta có : $\ln x_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \dfrac{n}{n^2}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức trên với $\begin{cases} x = \dfrac{i}{n^2} \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$

Ta có : $\dfrac{i}{n^2} - \dfrac{i^2}{2n^4} < \ln\left(1 + \dfrac{i}{n^2}\right) < \dfrac{i}{n^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) - \frac{1}{2n^4}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) <$$

$$< \ln x_n < \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2n^4} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{V_n} < \underbrace{\ln x_n}_{u_n}$$

$$< \underbrace{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}}_{W_n}$$

Vì $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} W_n = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

10. Cho dãy $\{u_n\}$: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 8 \\ u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2} > 0,\ n \geq 3 \end{cases}$

và $S_n = \sum_{i=1}^{n} \text{arc cotg}(u_i^2)$.

Tìm $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

Giải

Trước hết ta chứng minh $u_n^2 - u_{n+1}.u_{n-1} = 4, \quad \forall n \geq 2$

Quả vậy, ta có :

$$u_n(4u_{n-1}) = u_{n-1}(4u_n)$$

$$\Rightarrow \quad u_n(u_n + u_{n-2}) = u_{n-1}(u_{n+1} + u_{n-1})$$

$$\Rightarrow \quad u_n^2 - u_{n+1}.u_{n-1} = u_{n-1}^2 - u_n.u_{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad u_n^2 - u_{n+1}.u_{n-1} = u_{n-1}^2 - u_n.u_{n-2}$$

$$= \ldots = u_2^2 - u_3.u_1$$

$$= 8^2 - (4.8 - 2)2 = 4$$

$$\Rightarrow \quad \text{arc cotg}\, u_n^2 = \text{arc cotg}\left[u_n\left(\frac{4u_n}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{u_n(u_{n+1} + u_{n-1})}{u_n^2 - u_{n+1}.u_{n-1}}$$

$$= \text{arc cotg}\frac{\dfrac{u_{n+1}}{u_n}.\dfrac{u_n}{u_{n-1}} + 1}{\dfrac{u_n}{u_{n-1}} - \dfrac{u_{n+1}}{u_n}}$$

$$= \text{arc cotg}\frac{u_{n+1}}{u_n} - \text{arctg}\frac{u_n}{u_{n-1}}$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} \text{arc cotg}(u_i^2) = \text{arc cotg}(u_1^2)$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} \text{arc cotg}(u_i^2) = \text{arc cotg}\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Hơn nữa :

$$u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{4u_{n-1}}{u_n} - \frac{u_{n-2}}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = 4x - x^2 \quad \left(\text{với } x = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n-1}}{u_n} \le 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 2 - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} S_n = \operatorname{arctg}(2 + \sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}$$

(Dãy $\left\{\dfrac{u_{n-1}}{u_n}\right\}$ có giới hạn, vì : $\begin{cases} 0 < \dfrac{u_{n-1}}{u_n} < 1 \\ \dfrac{u_n}{u_{n+1}} > \dfrac{u_{n-1}}{u_n} \end{cases}$).

11. Cho hai dãy số thực thỏa : $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và $y_1, y_2, \ldots, y_n$

$$\begin{cases} y_i \in (a, b);\ i = \overline{1, n} \\ 0 < x_i \notin (a, b),\ i = \overline{1, n} \\ a > 0 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n \end{cases}$$

Chứng minh rằng : $x_1x_2 \ldots x_n \le y_1y_2 \ldots y_n$.

Giải

Ta có : $x_1x_2 \ldots x_n \le y_1y_2 \ldots y_n$

$$\Leftrightarrow \quad n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i}} \le n$$

Theo BĐT Cauchy : $n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{y_i}} < \sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{y_i}$

Ta chỉ cần chứng minh : $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{y_i} \le n \qquad (*)$

Quả vậy : (*) $\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i} - n \le 0 \qquad (**)$

Hơn nữa, ta có thể xem

$$0 < x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_k < y_1 \le \ldots \le y_n < x_{k+1} \le \ldots \le x_n$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - y_i}{y_i} \le \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i - y_i}{y_k} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{x_j - y_j}{y_k}$$

$$\le \frac{1}{y_k}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i\right) = 0$$

$\Rightarrow$ (**) đúng $\Rightarrow$ (*) đúng $\Rightarrow$ (ĐPCM).

12. Cho a, b $\in$ (0, 1). Xét dãy $\{u_n\}$ xác định bởi

$$u_0 = a, \quad u_1 = b, \quad u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1}^2 + \frac{2}{3}\sqrt{u_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$ và tìm giới hạn đó.

Giải

* Xét dãy $\{V_n\}$ định bởi $\begin{cases} V_0 = \text{Min}\{a, b\} \\ V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n^2 + \frac{2}{3}\sqrt{V_n},\ n \ge 0 \end{cases}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $\quad 0 < V_n < 1 \qquad (1)$

Mặt khác :

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{3}V_n^2 + \frac{2}{3}\sqrt{V_n} - V_n$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{V_n}(\sqrt{V_n} - 1)^2(\sqrt{V_n} + 2) > 0,\ \forall n \ge 0$$

$\Rightarrow \quad \{V_n\}$ tăng $\qquad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $\{V_n\}$ có giới hạn hữu hạn.

Đặt $c = \lim\limits_{n \to +\infty} V_n$, ta có :

$$\begin{cases} c = \frac{1}{3}c^2 + \frac{2}{3}\sqrt{c} \\ 0 < V_1 \le c \le 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad c = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} V_n = 1.$$

* + $n = 1 \quad \Rightarrow \quad u_0 = a \in (0, 1)$

+ $n = k \in N$: Giả sử $u_k \in (0, 1)$

+ $n = k + 1$: Ta có : $u_{k+1} = \underbrace{\frac{1}{3}u_k^2}_{\in(0,1)} + \underbrace{\frac{2}{3}\sqrt{u_{k-1}}}_{\in(0,1)} \in (0, 1)$

$\Rightarrow$ Theo nguyên lí quy nạp ta có : $u_n \in (0, 1), \forall n \geq 0$

* Chứng minh $V_n \leq \text{Min}\{u_{2n}, u_{2n+1}\}, \forall n \geq 0$

Quả vậy :

+ $n = 0$: $V_0 \leq \text{Min}\{u_0, u_1\} \Leftrightarrow \text{Min}\{a, b\} \leq \text{Min}\{a, b\}$ (Đúng)

+ $n = k \in N$: Giả sử $V_k \leq \text{Min}\{u_{2k}, u_{2k+1}\}$

+ $n = k + 1$:

Ta có: $\begin{cases} V_k \leq u_{2k} \\ V_k \leq u_{2k+1} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{2k+2} = \frac{1}{3}u_{2k+1}^2 + \frac{2}{3}\sqrt{u_{2k}} \\ \qquad \geq \frac{1}{3}V_k^2 + \frac{2}{3}\sqrt{V_k} = V_{k+1} \\ u_{2k+3} = \frac{1}{3}u_{2k+2}^2 + \frac{2}{3}\sqrt{u_{2k+1}} \\ \qquad \geq \frac{1}{3}V_{k+1}^2 + \frac{2}{3}\sqrt{V_k} \\ \qquad \geq \frac{1}{3}V_k^2 + \frac{2}{3}\sqrt{V_k} = V_{k+1} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $V_{k+1} \leq \text{Min}\{u_{2k+2}, u_{2k+3}\}$

$\Rightarrow$ Theo nguyên lí quy nạp, ta có

$V_n \leq \text{Min}\{u_{2n}, u_{2n+1}\}, \forall n \geq 0$

Từ các kết quả trên, ta suy ra : $\begin{cases} V_n \leq u_{2n} < 1 \\ V_n \leq u_{2n+1} < 1 \quad (\forall n \geq 0) \\ \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 1 \end{cases}$

Do đó : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} = 1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

3. CÁC BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ TRONG CÁC ĐỀ THI OLYMPIC 30-4 LẦN VI NĂM 2001

1. Cho dãy số $\{u_n\}$ biết :

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)...(i+2001)}, \ n \in N$$

Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Giải

* $n = 1$: $u_1 = \dfrac{1}{1.2...(a+1)}$ (với a = 2001)

$$= \frac{1}{(a+1)!} = \frac{1}{a}\left[\frac{(a+1)-1}{(a+1)!}\right] = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a!} - \frac{1}{(a+1)!}\right]$$

* $n = k \in N$: Giả sử

$$u_k = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a!} - \frac{k!}{(a-k)!}\right]$$

* $n = k + 1$: Ta có :

$$u_{k+1} = u_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)...(k+1+a)}$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a!} - \frac{k!}{(a+k)!}\right] + \frac{1}{(k+1)(k+2)...(k+1+a)}$$

$$= \frac{1}{a.a!} - \frac{k!}{a.(a+k)!} + \frac{1}{(k+1)(k+2)...(k+1+a)}$$

$$= \frac{1}{a.a!} - \frac{k!}{a(a+k)!} + \frac{k!}{(k+1+a)!}$$

$$= \frac{1}{a.a!} + \frac{k!(a-k-1-a)}{a.(k+1+a)!}$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a!} - \frac{(k+1)!}{(a+k+1)!}\right]$$

Như vậy $u_n = \dfrac{1}{a}\left[\dfrac{1}{a!} - \dfrac{n!}{(a+n)!}\right], \forall n \in N$

Do đó $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{a.a!} = \dfrac{1}{2001.2001!}$.

2. Cho S_n = Tổng các chữ số của $\left[5 + \sum_{k=0}^{1000} C_{2001}^{2k+1} 8^k\right]^n$

Chứng minh rằng $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

Giải

* Chứng minh $\sum_{k=0}^{1000} C_{2001}^{2k+1} 8^k \,\vdots\!\!/\, 5$

• Xét khai triển Newton :

$$(1 \pm \sqrt{8})^{2001} = \sum_{k=0}^{2001} C_{2001}^{k}(-\sqrt{8})^k$$

$$= \sum_{k=0}^{1000} C_{2001}^{2k} 8^k \pm \sum_{k=0}^{1000} C_{2001}^{2k+1} 8^{k+\frac{1}{2}}$$

$$= A \pm \sqrt{8}B \qquad (A, B \in N)$$

$\Rightarrow \quad A^2 - 8B^2 = (-7)^{2001} = -7^{2001}$

• Giả sử $B = 5m \quad (m \in N)$

$\Rightarrow \quad A^2 + 7^{2001} = 200m^2$

$\Rightarrow \quad A^2 \equiv -7^{2001} \pmod{10}$

$\Rightarrow \quad A^2 \equiv -(49)^{1000}.7 \pmod{10}$

$\Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A^2 \equiv 3 \pmod{10} \\ A^2 \equiv 7 \pmod{10} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \quad A \notin N$

$\Rightarrow \quad$ vô lí

* Suy ra $N = 5 + \sum_{k=0}^{1000} C_{2001}^{2k+1} 8^k$ là số chẵn và không chia hết cho 5

* Giả sử $N^n = \overline{\ldots a_k \ldots a_3 a_2 a_1} \quad (a_1 \neq 0,\ a_k = 0$ với k đủ lớn)

Ta chứng minh : nếu $1 \le k \le \dfrac{n}{4}$ thì tồn tại (ít nhất) một số trong dãy $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{4k}$ khác 0.

* Giả sử tất cả bằng 0, đặt $C = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1} > 0$

$\Rightarrow \quad N^n - C = \overline{...a_{4k+2}a_{4k+1}0...0}$ (4k chữ số 0 tận cùng)

$\Rightarrow \quad N^n \equiv C \pmod{10^{4k}}$

$\Rightarrow \quad N^n \equiv C \pmod{2^{4k}}$

N chẵn $\Rightarrow \quad N^n \equiv 0 \pmod{2^n}$

Mà $n \geq 4k \Rightarrow N^n \equiv 0 \pmod{2^{4k}}$

$\Rightarrow C \equiv 0 \pmod{2^{4k}}$

Mà $C < 10^k < 2^{4k} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow$ vô lí

* Suy ra : Với $i = 4^k$ thỏa $1 \leq i \leq \dfrac{n}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 1 \leq \log_4^n \\ 0 \leq k \in Z \end{cases}$

Chọn $k = [\log_4^n] - 1$

thì tồn tại (ít nhất) một số khả vi trong mỗi dãy số sau :

a_2, a_3, a_4

$a_5, a_6, a_7, ..., a_{16}$

. . . . (k + 1 dãy)

$a_{4^k+1}, a_{4^k+2}, ..., a_{4^{k+1}}$

$\Rightarrow \quad S_n \geq k + 1 = [\log_4^n] \longrightarrow +\infty$ (khi $n \to +\infty$)

$\Rightarrow \quad S_n \longrightarrow +\infty$ (khi $n \to +\infty$).

3. Cho dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn

$$x_1 = -\frac{5}{2} \quad \text{và} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n^2 + x_n - 2, \ \forall n \in N.$$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ. Tìm giới hạn đó.

Giải

Từ công thức xác định dãy, ta có :

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}x_{n+1}^2 + x_{n+1} - 2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x_n^2 + x_n - 2\right)^2 + \frac{1}{2}x_n^2 + x_n - 2 - 2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x_n^4 + x_n^2 + 4 + x_n^3 - 2x_n^2 - 4x_n\right) + \frac{1}{2}x_n^2 + x_n - 4$$

$$x_{n+2} = \frac{1}{8}x_n^4 + \frac{1}{2}x_n^3 - x_n - 2$$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^8 - x - 2\ ,\ x \in (-2, -1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x = \frac{3}{2}x(x+2) < 0,\ \forall x \in (-2, -1)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) > f'(-1) = 0,\ \forall x \in (-2, -1)$$

(Do f' nghịch biến trên (–2, –1))

$\Rightarrow$ f đồng biến trên (–2, –1)

$$\Rightarrow \quad f(-2) < f(x) < f(-1),\ \forall x \in (-2, -1)$$

$$\Rightarrow \quad -2 < f(x) < -\frac{11}{8} < -1,\ \forall x \in (-2, -1)$$

Nhưng $x_{2n+2} = f(x_{2n})$

- Với n = 1 $\Rightarrow$ $x_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1 - 2$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} - 2 = -\frac{11}{8}$$

$$\Rightarrow \quad -2 < x_2 < -1$$

- Với $n = k \in N$: Giả sử $-2 < x_{2k} < -1$
- Với $n = k + 1$: Ta có $-2 < x_{2k} < -1$ (Giả thiết quy nạp)

$$\Rightarrow \quad -2 < f(x_{2k}) < -1$$

$$\Rightarrow \quad -2 < x_{2k+2} < -1$$

Như vậy $-2 < x_{2n} < -1,\ \forall n \in N$

Hơn nữa : $x_2 > x_4$ (?)

$$\Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_4)$$

$$\Rightarrow \quad x_4 > x_6 \ \ldots$$

Hoàn toàn tương tự $-1 > x_2 > x_4 > \dots > x_{2n} > \dots > -2$

Vậy dãy $\{x_{2n}\}$ giảm và bị chặn dưới nên hội tụ.

Đặt $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{2n} = a \in [-2, -1]$, ta có :

$$a = \frac{1}{8}a^4 + \frac{1}{2}a^3 - a - 2$$

$$\Leftrightarrow \quad (a - 2)(a + 2)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a = -2$$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được dãy $\{x_{2n+1}\}$ tăng và bị chặn trên bởi -1 và $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{2n+1} = -2$. Như vậy dãy $\{x_n\}$ hội tụ và có giới hạn bằng -2.

4. Cho dãy số $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ thỏa $1 = a_0 \le a_1 \le \dots \le a_n \le \dots$

Chứng minh rằng :

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_k}}\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) < 2, \forall n \in N.$$

Giải

Vì $1 = a_0 \le a_1 \le \dots \le a_n \le \dots \Rightarrow \dfrac{a_{k-1}}{a_k} \le 1, \ \forall k \in N$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{a_{k-1}}{a_k} \ge 0, \forall k \in N$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_k}}\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \ge 0, \forall n \in N$$

Mặt khác :

$$\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}} = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k\sqrt{a_k}} = \frac{2(a_k - a_{k-1})}{a_k . 2\sqrt{a_k}} \le \frac{2(a_k - a_{k-1})}{a_k\left(\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k-1}}\right)}$$

$$\le \frac{2\left(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}}\right)}{a_k} \le 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_k}} - \frac{\sqrt{a_{k-1}}}{a_k}\right)$$

$$\le 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$$

(Vì theo BĐT Cauchy :

$$\frac{\sqrt{a_{k-1}}}{a_k} + \frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a_k}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{\sqrt{a_{k-1}}}{a_k} \leq \frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\Bigg)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_k}}\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \leq 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) < 2, \forall n \in N.$$

5. Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_k = u_{k-1} + \dfrac{1}{n}u_{k-1}^2 \end{cases} \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Giải

Từ điều kiện đề bài, ta có :

$$n(u_k - u_{k-1}) = u_{k-1}^2$$

$$\Rightarrow \quad nu_k - nu_{k-1} + u_k.u_{k-1} - u_{k-1}^2 = u_k.u_{k-1}$$

$$\Rightarrow \quad (u_k - u_{k-1})(n + u_{k-1}) = u_k.u_{k-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} = \frac{1}{n + u_{k-1}} \qquad (1)$$

Do $\dfrac{1}{2} = u_0 < u_1 < u_2 < ...$

nên từ (1) suy ra :

$$\frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} < \frac{1}{n}, \quad \forall k = 1, 2, ..., n \qquad (2)$$

• Trong (2) thay k = 1, 2, 3, ..., n rồi cộng các bất đẳng thức, ta được :

$$\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_n} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad u_n < 1$$

$$\Rightarrow \quad u_k < 1, \forall k = 0, 1, 2, ..., n$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} = \frac{1}{n + u_{k-1}} \quad \text{(Do (1))}$$

$$> \frac{1}{n+1} \qquad (3)$$

Trong (3) thay k = 1, 2, .., n rồi cộng lại, ta được :

$$\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_n} > \frac{n}{n+1} \quad \Rightarrow \quad u_n > \frac{n+1}{n+2}$$

Như vậy : $\frac{n+1}{n+2} < u_n < 1, \forall n \in N$

Vì $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$

nên : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

6. Cho dãy số $\{x_n\}$ không âm thỏa :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 2\sqrt{2} \quad \text{và} \quad \begin{cases} \frac{x_n^2}{2^{2n-2}} + \left(1 - \frac{x_{n+1}^2}{2^{2n-1}}\right)^2 = 1 \ (\forall n \geq 4) \\ x_{n+1}^2 < 2^{2n-1} \end{cases}$$

Chứng minh dãy số trên hội tụ. Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

Giải

* $n = 1$: $\begin{cases} x_1 = 0 = 2^{1-1} \sin \frac{\pi}{2^{1-1}} \\ x_1^2 < \frac{1}{2} \end{cases}$

* $n = 2$: $x_2 = 2 = 2^{2-1} \sin \frac{\pi}{2^{2-1}}$

* $n = 3$: $x_3 = 2\sqrt{2} = 2^{3-1} \sin \frac{\pi}{2^{3-1}}$

* $n = k \geq 3$: Giả sử $x_k = 2^{k-1} \sin \frac{\pi}{2^{k-1}}$

* $n = k + 1$: Ta có : $\frac{x_k^2}{2^{2k-2}} + \left(1 - \frac{x_{k+1}^2}{2^{2k-1}}\right)^2 = 1$

$$\Rightarrow \quad \sin^2 \frac{\pi}{2^{k-1}} + \left(1 - \frac{x_{k+1}^2}{2^{2k-1}}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \left(1 - \frac{x_{k+1}^2}{2^{2k-1}}\right)^2 = \cos^2 \frac{\pi}{2^{k-1}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_{k+1}^2}{2^{2k-1}} = 1 - \cos\frac{\pi}{2^{k-1}} = 2\sin^2\frac{\pi}{2^k}$$

$$\Rightarrow \quad x_{k+1} = 2^k.\sin\frac{\pi}{2^k}$$

Như vậy : $x_n = 2^{n-1}.\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}, \quad \forall n \geq 0$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = \pi.\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}}{\dfrac{\pi}{2^{n-1}}} = \pi.$$

7. Cho dãy số thực $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ xác định bởi

$$x_0 = 2001 \quad \text{và} \quad x_n = -\frac{2001}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k \quad (n \geq 1).$$

Hãy tính giá trị của $A = \sum\limits_{n=0}^{2001} 2^n.x_n$

Giải

Từ giả thiết suy ra : $nx_n = -2001\sum\limits_{k=0}^{n-1} x_k$ (1)

$$\Rightarrow \quad (n-1)x_{n-1} = -2001\sum_{k=0}^{n-2} x_k \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $nx_n - (n-1)x_{n-1} = -2001x_{n-1}$

$$\Rightarrow \quad x_n = -\frac{(2001 - n + 1)}{n}x_{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad x_n = (-1)^n C_{2n-1}^n x_0 \ (\text{với } 0 \leq n \leq 2001)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{2001} 2^n x_n = x_0\sum_{n=0}^{2001}(-1)^n C_{2001}^n 2^n$$

$$= x_0\sum_{n=0}^{2001}(-2)^n C_{2001}^n = x_0(-2+1)^{2001}$$

$$= -x_0 = -2001.$$

8. Dãy số thực $\{x_n\}$ xác định theo quy luật :

$$x_1 = 2{,}9; \quad x_{n+1} = \sqrt{3} + \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 - 1}}, \ n \geq 1$$

Hãy tìm một số thuộc bên trái dãy con $\{x_1, x_3, ...\}$ và bên phải dãy con $\{x_2, x_4, ...\}$ của dãy số $\{x_n\}$.

Giải

Quy luật dãy số suy ra rằng $x_n > \sqrt{3}$, $\forall n \in N$.

Yêu cầu bài toán là tìm số thực a sao cho :

$$x_{2k} < a < x_{2k-1}, \quad \forall k \in N$$

Dự đoán a cần tìm là giới hạn của dãy số $\{x_n\}$ khi $n \to +\infty$, tức là a là nghiệm phương trình $x = \sqrt{3} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, $\quad x \geq \sqrt{3}$ $\qquad$ (*)

* Giải phương trình : $\quad x = \sqrt{3} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Vì $x \geq \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad 0 < \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}} < 2$

Ta đặt được $\quad x = \dfrac{1}{\sin\alpha}$, $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{\sin\alpha} = \sqrt{3} + \dfrac{1}{\cos\alpha}$

$\Leftrightarrow \quad \cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha$

Đặt $\quad t = \cos\alpha - \sin\alpha$

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha.\cos\alpha = \frac{1 - t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad 2t = \sqrt{3}(1 - t^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{3}t^2 + 2t - \sqrt{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = -\sqrt{3} \text{ (loại)} \\ t = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \text{ (nhận)} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha - \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin\alpha.\cos\alpha = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha.\cos\alpha - \sin^2\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha \\ \sin\alpha.\cos\alpha = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} - \sin^2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha \qquad \Rightarrow \quad 3\sin^2\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{6} \quad \text{(vì } \sin\alpha > 0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{2}$$

* Lấy $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5}+1)$, ta chứng minh $x_{2k} < a < x_{2k-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Quả vậy :

Xét $f(x) = \sqrt{3} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, $x \geq \sqrt{3}$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-1} - x\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}$$

$$= \frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} < 0, \ \forall x \geq \sqrt{3}$$

+ $x_1 = 2{,}9 > \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5}+1) = a \quad \Rightarrow \quad x_2 = f(x_1) < f(a) = a$

$\Rightarrow \quad x_2 < a < x_1$

+ Giả sử : $x_{2k} < a < x_{2k-2}$ $(k \in N)$

+ Khi đó $f(x_{2k}) > f(a) > f(x_{2k-2})$

$\Rightarrow \quad x_{2k+1} > a > x_{2k}$

Như vậy : $x_{2n} < a < x_{2n-1}$, $\forall n \in N$

Tức là $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5}+1)$ là giá trị cần tìm.

9. Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi :

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \left(1 + \dfrac{3}{n}\right)x_n + 2 - \dfrac{3}{n}, \ n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng tất cả các số hạng của dãy số là số nguyên.