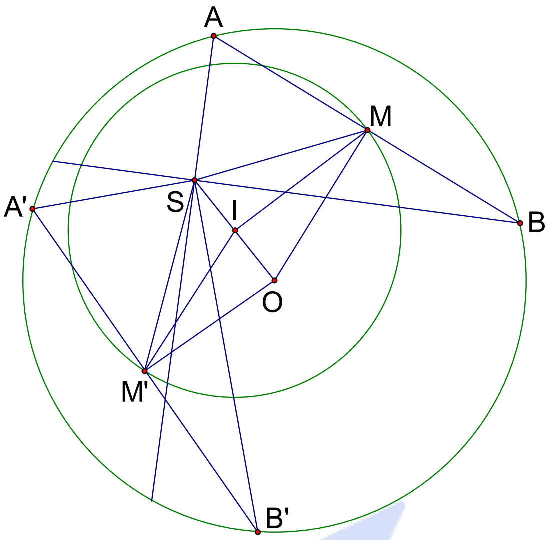


Gọi I là trung điểm SO, đặt $SO = a$ (không đổi)

nên $MS^2 = R^2 - MO^2 \Leftrightarrow MS^2 + MO^2 = R^2 \Rightarrow MI^2 = \dfrac{R^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$ không đổi.

Vì I cố định nên M thuộc đường tròn tâm I bán kính $MI = \dfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 - a^2}$

Đảo lại, trên đường tròn (I) lấy M' tuỳ ý $\Rightarrow M'I = \dfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 - a^2}$. Lấy M' làm tâm quay một cung tròn bán kính $M'S$ cắt (O) tại A'.

Ta có $M'A' = M'S$. Kéo dài $M'A'$ cắt (O) tại B'.

$$M'S^2 + M'O^2 = \frac{1}{2}\left(4M'I^2 + SO^2\right) = \frac{1}{2}\left(2R^2 - a^2 + a^2\right) = R^2$$

Xét tam giác $M'SO$ có: $\Leftrightarrow M'A'^2 + M'O^2 = OA'^2$

Hay tam giác $OM'A'$ vuông tại M' suy ra M' là trung điểm $A'B'$

nghĩa là $M'A' = M'B' = M'S$ hay tam giác $SA'B'$ vuông tại S.

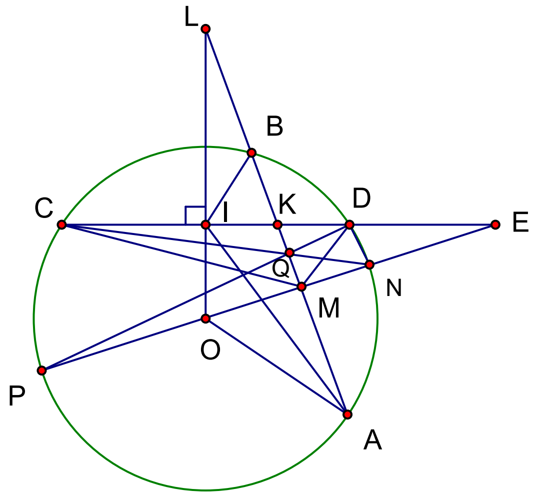
Câu 10. **[THI HSG KHU VỰC DUYÊN HẢI & ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM 2013 SỞ GD&ĐT QUẢNG NAM -TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHI ÊM]**

Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm I cố định ở trong đường tròn ($I \neq O$), đường thẳng qua I vuông góc với OI cắt đường tròn tại C và D; A là một điểm nằm trên đường tròn, tia đối xứng với tia IA qua đường thẳng CD cắt đường tròn tại B. Gọi M là trung điểm của AB.

a) Chứng minh đường thẳng AB đi qua một điểm cố định L khi A thay đổi trên đường tròn $(O;R)$.

b) Gọi N, P là giao điểm của đường thẳng OM với đường tròn $(O;R)$. Đường thẳng CN và DP cắt nhau ở Q. Chứng minh rằng các điểm Q, N là những tâm của đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của tam giác CMD.

Hướng dẫn giải



Gọi L là giao điểm của AB và OI ; K là giao điểm của AB và CD.

Ta có $IE \perp OL$ và IE IE là phân giác của góc $\widehat{AIB}$, suy ra: $(ABKL) = -1$

Suy ra: $MA^2 = MB^2 = \overline{MK}.\overline{ML}$ (M là trung điểm của AB, New-tơn)
$= (\overline{ML} + \overline{LK}).\overline{ML}$
$= ML^2 - \overline{LK}.\overline{LM}$

Mà ta lại có: $P_L/(IOMK) = \overline{LI}.\overline{LO} = \overline{LK}.\overline{LM}$

Do đó: $MA^2 = ML^2 - \overline{LK}\,\overline{LM} = ML^2 - \overline{LI}.\overline{LO}$

Suy ra: $ML^2 - MA^2 = \overline{LI}.\overline{LO} \Leftrightarrow LO^2 - OM^2 - MA^2 = \overline{LI}.\overline{LO}$

Suy ra: $OL^2 - OA^2 = \overline{LI}.\overline{LO}$
$= (\overline{LO} + \overline{OI})\overline{LO}$
$= LO^2 - \overline{OI}.\overline{OL}$

Suy ra $OA^2 = \overline{OI}.\overline{OL}$. Suy ra $\overline{OL} = \dfrac{R^2}{\overline{OI}}$. Vậy L cố định.

b)Trước hết ta chứng minh MK là phân giác của góc CMD.
Gọi E là giao điểm của OM OM với CD
Ta có: $\Delta OEI \sim \Delta OML$

Suy ra: $\overline{OM}.\overline{OE} = \overline{OI}.\overline{OL} = OA^2 = R^2$

Suy ra: $OE^2 - \overline{OM}.\overline{OE} = OE^2 - R^2$

Suy ra: $\overline{OE}.\overline{ME} = IE^2 + OI^2 - R^2 = IE^2 - (R^2 - OI^2) = IE^2 - IC^2$

Ta có: $P_E/(OIRM) = \overline{KE}.\overline{IE} = \overline{OE}.\overline{ME}$

Do đó ta suy ra: $\overline{KE}.\overline{IE} = IE^2 - IC^2$

Suy ra: $IC^2 = IE^2 - \overline{IE}.\overline{KE} = \overline{IE}(\overline{IE} - \overline{KE}) = \overline{IE}.\overline{IK}$

Theo hệ thức Newton, ta suy ra: $(CDKE) = -1$ (1)

Mà $MK \perp ME$ nên MK là phân giác trong của góc $\widehat{CMD}$ (2)

Theo chứng minh trên ta có: $\overline{OM}.\overline{OE} = R^2 = ON^2$

Suy ra: $(PNME) = -1$

Suy ra: $(NPME) = -1$ (3)

Từ (1) và (3) ta suy ra: CN, PD, KM đồng quy tại Q.

Mà góc $\widehat{QDN} = 90^0$ nên $QMND$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra: $\widehat{QDM} = \widehat{QNM} = \widehat{CDP}$

Suy ra DP là phân giác trong của góc $\widehat{CDM}$. (4)
Từ (2) và (4), ta có Q là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CMD

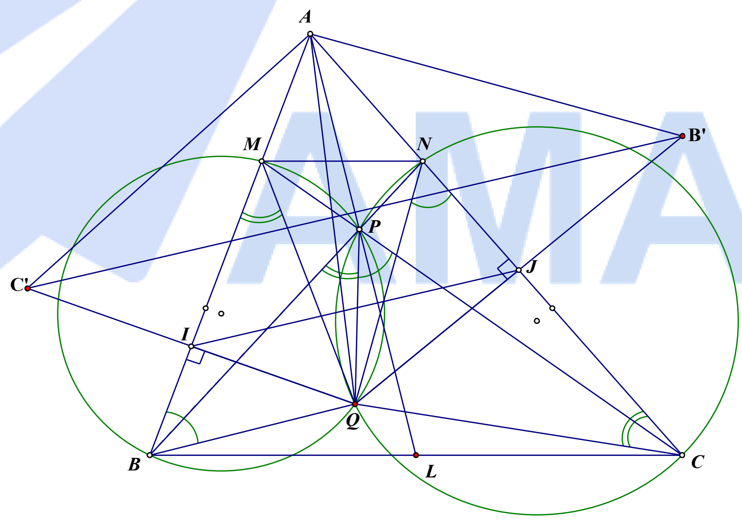
Ta lại có $DN \perp DP$ suy ra DN là phân giác ngoài của góc $\widehat{CDM}$. Suy ra N là tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác CMD.

Vậy Q, N lần lượt là tâm của đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của tam giác CMD.

Câu 11. Xét các điểm M, N (M, N không trùng với A) tương ứng thay đổi trên các đường thẳng chứa các cạnh AB, AC của tam giác ABC sao cho MN song song với BC và các đường thẳng BN, CM cắt nhau tại P. Gọi Q là giao điểm thứ hai (khác điểm P) của đường tròn ngoại tiếp các tam giác BMP và CNP.

1. Chứng minh rằng Q luôn nằm trên một đường thẳng cố định.
2. Gọi A', B', C' lần lượt là điểm đối xứng với Q qua các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ nằm trên một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn giải



1) (2,0 *điểm*).
Do B, Q, P, M cùng nằm trên một đường tròn và C, Q, P, N cùng nằm trên một đường tròn, nên $(BQ; BM) \equiv (PQ; PM) \equiv (PQ; PC) \equiv (NQ; NC) \quad (\bmod \pi)$

và $(MQ; MB) \equiv (PQ; PB) \equiv (PQ; PN) \equiv (CQ; CN) \quad (\bmod \pi)$

Từ đó suy ra $\Delta BQM \sim \Delta NQC$ (2)

Gọi I và J theo thứ tự là hình chiếu của Q trên các đường thẳng BM và CN. Khi đó, do (2) nên $\dfrac{QI}{QJ} = \dfrac{MB}{NC} = \dfrac{AB}{AC}$ (do $MN \parallel BC$).

Từ đó, theo tính chất của đường đối trung, Q nằm trên đường đối trung kẻ từ A của tam giác ABC.**2) (2,0 *điểm*).**

Gọi L là giao điểm của AP với BC. Áp dụng định lý Céva cho tam giác ABC ta có

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -1 \qquad (1)$$

Do $MN \parallel BC$ nên $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$ từ đó và (1) suy ra $\dfrac{\overline{LB}}{\overline{LC}} = -1$ hay L là trung điểm BC. 0,5

Do AQ là đường đối trung nên $\angle BAQ = \angle CAP$ và kết hợp với tứ giác $AIQJ$ nội tiếp nên $\angle AQI = \angle AJI$ suy ra $\angle CAP + \angle AJI = \angle AQI + \angle BAQ = 90^0 \Rightarrow AP \perp IJ$ (3). 0,5

Do cách xác định các điểm B', C' nên $AB' = AC' = AQ$ hay tam giác $AB'C'$ cân tại A, kết hợp với IJ là đường trung bình của tam giác $QB'C'$

$\Rightarrow IJ \parallel B'C', AB' = AC'$ (4) 0,5

Từ (3), (4) suy ra AP là đường trung trực của đoạn $B'C'$ suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ nằm trên đường thẳng AP hay nằm trên trung tuyến AL của tam giác ABC.
0,5

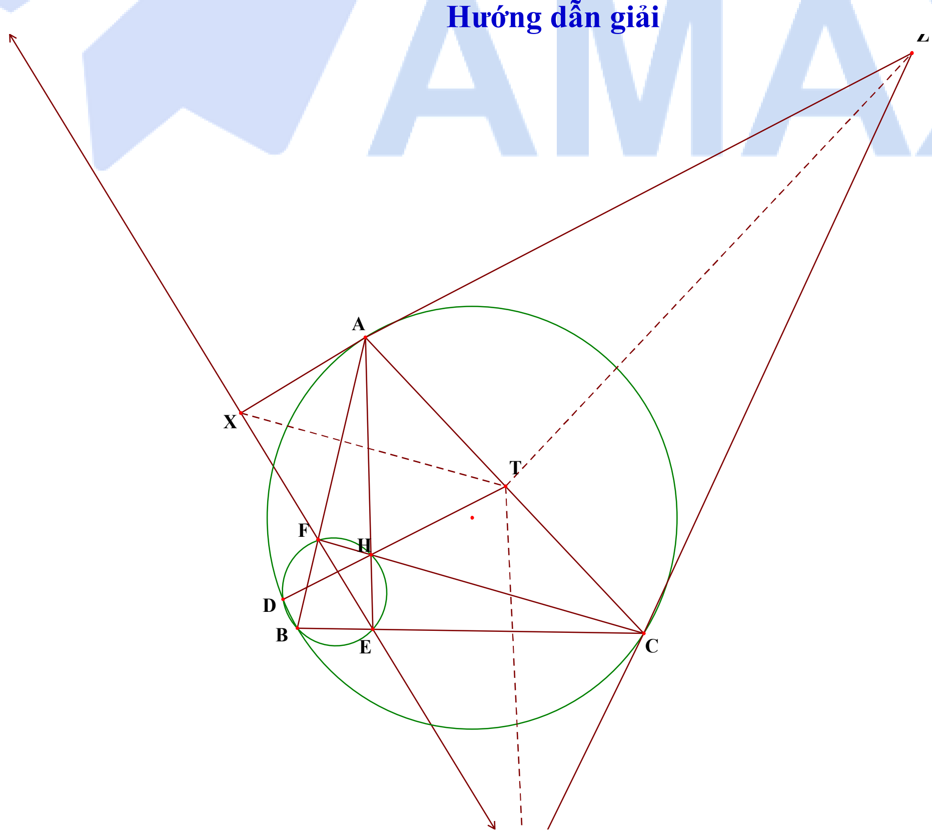
Câu 12. Cho tam giác nhọn ABC không cân tại B, T là trung điểm cạnh AC, E và F tương ứng là chân đường cao hạ từ A, C của tam giác. Z là giao điểm của hai tiếp tuyến tại A, C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, X là giao điểm của ZA và EF, Y là giao điểm của ZC và EF
.

a) Chứng minh rằng T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và EBF cắt nhau tại điểm thứ hai D. Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên DT.

c) Chứng minh rằng D nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ.

Hướng dẫn giải



a) ZT là phân giác góc AZC.
Do góc XAB= goc ACB = góc BFE =góc AFX và TA= TF, từ đó X và T nằm trên trung trực của AF, do đó T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ

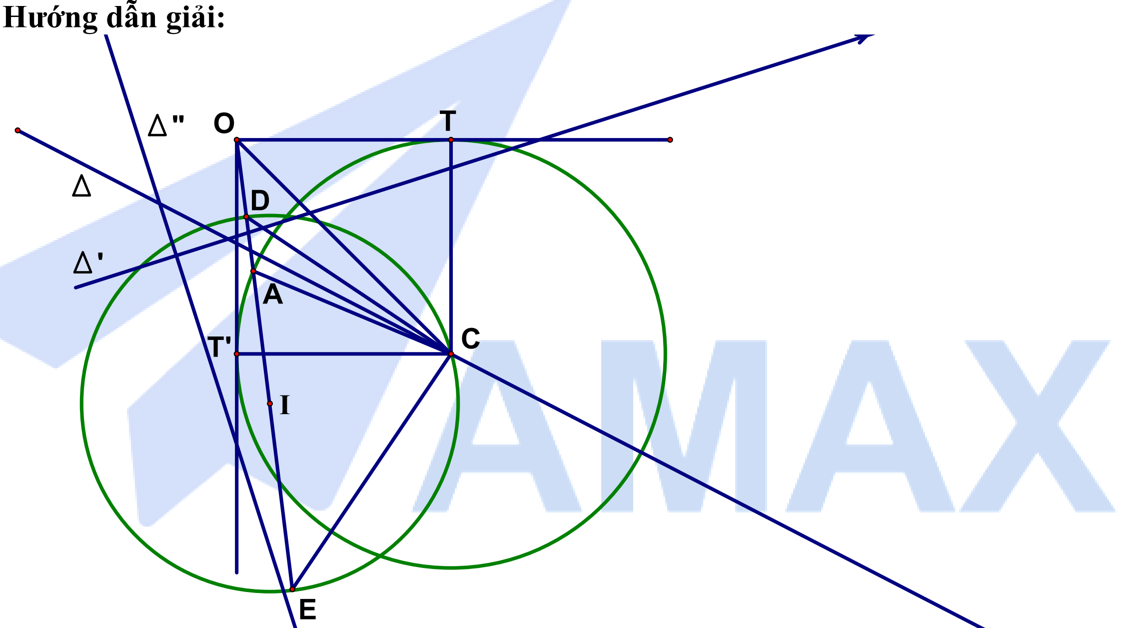
b) Giả sử AB < BC, khi đó D nằm trên cung nhỏ A**B.** Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và L là trung điểm của BH. Ta có được BD và LO vuông góc.
Từ BD và DH vuông góc, ta được LO và DH song song. OLHT là hình bình hành nên OL song song với HT, do đó D, H, T thẳng hàng.
c) Chứng minh được góc ADT = góc AXT và TY là đường trung trực của D**C.**
Chứng minh được góc CDT = góc CYT nên CTDY là tứ giác nội tiếp.
Do đó góc XDY + góc XZY= góc XDT+ góc TDY+ góc XZY
=góc ZAT + góc ZCT + góc XZY = 180^0, do đó DXZY là tứ giác nội tiếp.

Câu 13. (Đề thi đề xuất trường PT vùng cao Việt Bắc – 2015) Từ một điểm O cố định ta vẽ hai tiếp tuyến đến những đường tròn thay đổi tâm C sao cho hai tiếp tuyến đó luôn vuông góc với nhau.

a. Tìm tập hợp tâm của những đường tròn (C) đi qua một điểm A cố định khác với O.

b. Cho đường tròn có tâm C chạy trên một đường thẳng Δ cố định không đi qua O. Tìm tập hợp các tiếp điểm T và T' của nhữn đường tròn đó với các tiếp tuyến vẽ từ O.

Hướng dẫn giải:



a. Tứ giác *OTCT’* có 3 góc vuông và $OT = OT'$ nên nó là một hình vuông. Gọi *R* là bán kính của đường tròn (*C*), ta có $CO = R\sqrt{2}$.

Do đó: $\frac{CA}{CO} = \frac{R}{R\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OT}\right) = \frac{\pi}{4}$

Vậy tâm *C* ở trên đường tròn tâm *I* là tập hợp những điểm có tỉ số khoảng cách tới *A* và *O* bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Đường kính *DE* của đường tròn tâm *I* đi qua các điểm *A* và *O* tạo nên một hàng điểm điều hòa; ta có $(OADE) = -1$

Ngược lại lấy điểm *C’* bất kỳ trên đường tròn tâm *I*, ta có $\frac{C'A}{C'O} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Từ *O* kẻ hai tiếp tuyến OT_1 và $OT_1^{'}$ ta có $C'T_1 = C'A = OT_1^{'}$. Vậy $OT_1C'T_1^{'}$ là hình vuông.

Vậy tập hợp các điểm *C* là đường tròn tâm *I* với *I* là trung điểm của đoạn *DE* trong đó *D, E, O, A* là một hàng điểm điều hòa.