suy ra $m_1 = m_2$ hay f là đơn ánh.

Từ đó $f(m)^2 + 2f(n)^2 = f(p)^2 + 2f(q)^2 \Leftrightarrow m^2 + 2n^2 = p^2 + 2q^2 \quad (1)$

Dế thấy với mọi $n \in \square^*, n \geq 3$ ta có: $(n+2)^2 + 2(n-1)^2 = (n-2)^2 + 2(n+1)^2$. (2)

(chú ý điều này vẫn đúng nếu ta nhân cả 2 vế với cùng một thừa số).

Đặt $f(1) = a \Rightarrow f(3a^2) = 3$. Theo (1) suy ra:

$f(5a^2)^2 + 2f(a^2)^2 = f(3a^2)^2 + 2f(3a^2)^2 = 3f(3a^2)^2 = 27$.

Vì phương trình $x^2 + 2y^2 = 27$ chỉ có nghiệm nguyên dương là (*x; y*)=(3,3) hoặc (5,1) nên ta có $f(a^2) = 1, f(5a^2) = 5$.

Cũng từ (1) ta có $2f(4a^2)^2 - 2f(2a^2)^2 = f(5a^2)^2 - f(a^2)^2 = 24$.

Vì phương trình $x^2 - y^2 = 12$ chỉ có nghiệm nguyên dương là (x,y) là (4,2) nên

$f(4a^2) = 4, f(2a^2) = 2$. Từ (1) ta có

$f((k+4)a^2)^2 = 2f((k+3)a^2)^2 - 2f((k+1)a^2)^2 + f(ka^2)^2$, suy ra từ khai triển (2).

Vì vậy theo các kết quả trên và phép quy nạp ta suy ra $f(ka^2) = k$, với mọi k là số nguyên dương. Do đó $f(a^3) = a = f(1)$ mà f đơn ánh nên $a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$.

Vậy $f(n) = n$ với mọi n nguyên dương. Thử lại thỏa mãn bài toán.

Bài 12. Tìm tất cả các hàm $f: Q \to R$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$(1):\ f(0) = 0;$

$(2): f(x) > 0 \qquad \forall x \neq 0.$

$(3): f(xy) = f(x).f(y) \qquad \forall x, y \in Q;$

$(4): f(x+y) \leq f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in Q;$

$(5): f(n) \leq 2006 \qquad \forall n \in \square;$

Bài 13. Tìm tất cả các hàm f(x) liên tục trên R_+^* và thỏa mãn:

$$\begin{cases} f(1) = 5 \\ f(x^2) - x^2 f(x) = \dfrac{4}{x^2} - 4x, \forall x > 0. \end{cases}$$

Bài 14. Cho hàm số thỏa mãn đồng thời các điều kiệ $f: \square^+ \to \square^+$ n:

$(1): f(n+1) > f(n), \forall n \in \square^+$

$(2): f[f(n)] > n + 2000, \forall n \in \square^+$

a. Chứng minh $f(n+1) = f(n), \forall n \in \square^+$.

b. Tìm biểu thức $f(n)$.

Hướng dẫn giải

a. Vì $f(n) \in \square^+$ nên từ giả thiết (1) ta được $f(n+1) \geq f(n) + 1, \forall n \in \square^+$.

Kết hợp điều kiến (2) ta được $\forall n \in \square^+$:

$n + 2001 = (n+1) + 2000 = f[f(n+1)] \geq f[f(n)] + 1 = n + 2001$

Do đó $f(n+1) = f(n) + 1, \forall n \in \square^+$

b. Ta có

$f(n) = f(1) + n - 1, \forall n \in \square^+ \Rightarrow f[f(1)] = f(1) + f(1) - 1$

$\Rightarrow 1 + 2000 = 2f(1) - 1 \Rightarrow f(1) = 1001 \Rightarrow f(n) = n + 1000, \forall n \in \square^+$

Thử lại các điều kiện, nên $f(n)=n+1000, \forall n \in \mathbb{N}^{+}$.

Bài 15. Cho tập hợp F gồm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}^{+}$ thỏa mãn điều kiện: $f(3x) \geq f\left(f(2x)\right)+x, \forall x \in \mathbb{R}^{+}$. Hãy tìm số thực α lớn nhất sao cho với mọi hàm số f thuộc tập hợp F ta đều có $f(x) \geq \alpha, \forall x \in \mathbb{R}^{+}$.

Hướng dẫn giải

Bài 16. Cho a là số thực. Tìm tất các hàm số $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho: f liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x-y)=f(x)-f(y)+axy; \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Bài 17. Cho $n \in \mathbb{N}$ $(n>2)$ và hàm số $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho: $f\left(x^{n}+y\right)=x^{n-1} f(x) f\left(f(y)\right); \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a. Giả sử rằng $f(2002) \neq 0$. Tính $f(2002)$.

b. Tìm hàm số f.

Hướng dẫn giải

$f\left(x^{n}+y\right)=x^{n-1} f(x) f\left(f(y)\right); \forall x, y \in \mathbb{R}$ $\quad (*)$

a.

- Từ $(*)$ ta được

- Với $x=0; \mathrm{f}(y)=f\left(f(y)\right), \forall y \in \mathbb{R}$
- Với $x=1; y=0: f\left(f(0)\right)=0 \Rightarrow f(0)=0$.
- Với $x=1, y \in \mathbb{R}: f(1+y)=f(1)+f(y)$. $\quad (1)$

Do đó, chứng minh bằng quy nạp ta được $f(n)=nf(1), \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad (2)$

- Từ (1) ta có:

$f(0)=f(1)+f(-1) \Rightarrow f(-1)=f(0)-f(1)=-f(t); f(x-1)=f(x)-f(1)$.

Do đó, chứng minh bằng quy nạp ta được $f(-n)=-nf(1), \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad (3)$

- Từ $(2),(3)$ ta được $f(n)=nf(1), \forall n \in \mathbb{Z}$ $\quad (4)$

- Đặt $f(1)=\dfrac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}; \mathrm{p} \in \mathbb{Z}, \mathrm{q} \in \mathbb{N}^{*}$ và ta được $\forall n \in \mathbb{N}^{*}$ và n chia hết p nên $nf(1) \in \mathbb{Z}$. Do đó ta được: $f\left(f(n)\right)=f(n) \Leftrightarrow n\left[f(1)\right]^{2}=nf(1) \Leftrightarrow \left[f(1)\right]^{2}=f(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1)=0 \\ f(1)=1 \end{array}\right.$.

- Do đó, từ (4) ta được $f(2002)=1$ hay $f(2002)=0$ (loại). Vậy $f(2002)=2002$.

b. Từ $(*)$ ta được $y=0: f\left(x^{n}\right)=x^{n-1} f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad (1)$

- n chẵn: $\forall x \neq 0: f(x)=\dfrac{f\left(x^{n}\right)}{x^{n-1}}, f(-x)=\dfrac{f\left(x^{n}\right)}{-x^{n-1}}=-f(x)$
- n lẻ: Từ $(*)$ và (1) ta được $f\left(x^{n}+y\right)=f\left(x^{n}\right)+f(y)$ $\quad (2)$

Suy ra: $f\left(-x^{n}\right)+f\left(x^{n}\right)=0 \Rightarrow f(-x)=\dfrac{f\left((-x)^{n}\right)}{(-x)^{n-1}}=\dfrac{-f\left(x^{n}\right)}{x^{n-1}}=-f(x)$.

Do đó $f(-x)=f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

- Từ (2), chứng minh bằng quy nạp ta được $f\left(px^n\right)=pf\left(x^n\right),\forall p\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R}$

  $\forall p\in\mathbb{N}^*: f\left(-px^n\right)=-f\left(px^n\right)=-pf\left(x^n\right)$

Vậy $f\left(px^n\right)=pf\left(x^n\right),\forall p\in\mathbb{Z},\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad(3)$

- Từ (3) ta có $\forall \frac{u}{v}\in\mathbb{Q}$ $\left(u\in\mathbb{Z},v\in\mathbb{N}^*\right)$ ta được $f\left(\frac{u}{v}\right)=f\left(\frac{u..v^{n-1}}{v^n}\right)=uv^{n-1}f\left(\frac{1}{v^n}\right)$

Mà $f(1)=f\left(\frac{u^n}{v^n}\right)=v^nf\left(\frac{1}{v^n}\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{v^n}\right)=\frac{f(1)}{v^n}$

Vậy $f\left(\frac{u}{v}\right)=u.v^{n-1}\frac{f(1)}{v^n}=\frac{u}{v}f(1)$ $\quad(4)$

- Ta có $f(1)=0$ hay $f(1)=1$ từ (4) suy ra $f(x)=0,\forall x\in\mathbb{Q}$ hay $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{Q}$
- Thử lại thỏa mãn $(*)$. Vậy $f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bài 18. Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left((x-y)^2\right)=x^2-2yf(x)+\left(f(y)\right)^2;\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Hướng dẫn giải

Cho $x=y=0\Rightarrow f(0)=\left(f(0)\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(0)=0\\f(0)=1\end{array}\right.$

+) Nếu $f(0)=0$. Cho $y=0,x\in\mathbb{R}$ ta được: $f\left(x^2\right)=x^2\Rightarrow f(t)=t,\forall t>0$

Cho $x=y\in\mathbb{R}$ ta được $f(0)=x^2-2xf(x)+\left(f(x)\right)^2\left(f(x)-x\right)^2=0\Rightarrow f(x)=x$. Thử lại thấy đúng

+) Nếu $f(0)=1$ cho $y=0,x\in\mathbb{R}$ ta được $f\left(x^2\right)=x^2+1\Rightarrow f(t)=t+1,\forall t>0$.

Cho $x=0,y\in\mathbb{R}$ ta được $f\left(y^2\right)=-2y+\left(f\left(y^2\right)\right)$

$$\Rightarrow\left(f(y)\right)^2=f\left(y^2\right)+2y=y^2+2y+1=(y+1)^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(y)=y+1\\f(y)=-y-1\end{array}\right.$$

Giả sử tôn tại $y_0\in\mathbb{R}$ sao cho $f\left(y_0\right)=-y_0-1$

Chọn $x=y=y_0$ ta được:

$$1=y_0^2-2y_0f\left(y_0\right)+\left(f\left(y_0\right)\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(y_0\right)=y_0+1\\f\left(y_0\right)=-y_0-1\end{array}\right.$$

Nếu $f\left(y_0\right)=-y_0-1\Rightarrow-y_0-1=y_0-1\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}y_0=0\\f(0)=-1\end{array}\right.$ (Loại)

Nếu $f\left(y_0\right)=y_0+1\Rightarrow-y_0-1=y_0+1\Rightarrow y_0=-1\Rightarrow f(-1)=0$

Vậy $f(y)=y+1$.

Bài 19. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x+f(y)\right)=f(x)+\frac{1}{8}xf(4y)+f\left(f(y)\right),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Hướng dẫn giải

Bài 20. Tìm hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn một trong hai điều kiện

$(i): f\left(x^2+f(y)\right)=y+xf(x)\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}$,

$$(ii): f\left(\left(f(x)\right)^2 + f(y)\right) = y + xf(x)\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn giải

Ta tìm hàm *f* thỏa mãn (*ii*). Đối với (*i*) ta làm tương tự. Ngoài ra có thể thấy hai điều kiện này có thể biến đổi về nhau.

Ta cũng dễ thấy *f* là đơn ánh và $f(0) = 0,\ f(f(y)) = y\quad \forall y \in \mathbb{R}$.

Trong (*ii*) thay *x* bởi $f(x)$ ta có

$$f\left(\left[f(f(x))\right]^2 + f(y)\right) = y + f(x)f(f(x)).$$

Mặt khác $f(f(y)) = y, \forall y \in \mathbb{R}$ nên $f\left(x^2 + (y)\right) = y + xf(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Kết hợp (*ii*) thì $f\left(x^2 + f(y)\right) = f\left(\left(f(x)\right)^2 + f(y)\right)$ mà *f* đơn ánh nên $x^2 + f(y) = \left(f(x)\right)^2 + f(y)$.

Suy ra $\left(f(x)\right)^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta chỉ ra không tồn tại đồng thời $a \neq 0, b \neq 0$ thỏa mãn $f(a) = a,\ f(b) = -b$. Thật vậy, giả sử tồn tại *a, b* như trên. Trong (ii) lấy $x = a, y = b$ ta có $f\left(a^2 - b\right) = a^2 + b.$

Do $\left(f(x)\right)^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $\left(a^2 - b\right)^2 = \left(a^2 + b\right)^2 \Rightarrow a^2 b = 0$, mâu thuẫn.

Vậy $f(x) = x\ \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = -x\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại thấy hai hàm này thỏa mãn.

Bài 21. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ thỏa mãn:

$$f(x + f(x) + 2y) = 2x + f(2f(y)),\ \forall x; y \in \mathbb{R}_+.$$

Hướng dẫn giải

Giả sử tồn tại hàm số *f(x)* thỏa mãn yêu cầu bài ra.

Đặt $f(0) = a$ với $a \in \mathbb{R}_+$

Chọn $x = 0$; $y = x$, thay vào (14) ta được

$$f(f(0) + 2x) = f(2f(x))\ \forall x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow f(2x + a) = f(2f(x))\ \ \forall x \in \mathbb{R}_+,$$

Nên

$$f(x + f(x) + 2y) = 2x + f(2y + a),\ \forall x; y \in \mathbb{R}_+ \qquad (i)$$

Thay 2*y* bởi *y* ta được

$$f(x + f(x) + y) = 2x + f(y + a),\ \forall x; y \in \mathbb{R}_+ \qquad (ii)$$

Với $x; y \geq a$ thỏa mãn $f(x) = f(y) = t$

Thay *y* bởi *y-a* vào (*ii*) ta được

$$f(x + t + y - a) = 2x + t,\ \forall x; y \in \mathbb{R}_+$$

Thay *x* bởi *y*; *y* bởi *x-a* vào (*ii*) ta được

$$f(y + t + x - a) = 2y + t,\ \forall x; y \in \mathbb{R}_+$$

Do đó $x = y$

Chọn *x*=0; *y*=0, thay vào (*i*) ta có

$$f(a) = f(2a)$$

Theo kết quả phần trên suy ra $a = 2a$

Suy ra $a = 0$

Chọn x=0; y=x, thay vào (i) ta được

$$f(2x) = f(2f(x)),\ \forall x \in \mathbb{R}_+$$

Suy ra

$$2f(x) = 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}_+$$

Thử lại thấy hàm số vừa tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}_+$ là hàm số cần tìm.

Bài 22. Tìm tất cả các hàm số $f: R \to R$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2) = f(x+y).f(x-y) + y^2, \forall x, y \in R.$$

Hướng dẫn giải

Cho $x = y = 0$ ta được $f(0) = [f(0)]^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(0) = 1 \end{array}\right.$

Cho $x = y = 2$ ta được $f(4) = f(4).f(0) + 4 \Rightarrow f(0) \neq 1$

Vậy f(0) = 0.

Cho $x = y$ ta được $f(x^2) = f(2x).f(0) + x^2 = x^2 \Rightarrow f(t) = t, \forall t \geq 0.$

Cho $x = 0, y = t > 0$, ta được

$$f(0) = f(t)f(-t) + t^2 \Leftrightarrow 0 = tf(-t) + t^2 \Leftrightarrow f(-t) = -t, \forall t > 0$$

Vậy $f(x) = x$

Thử lại ta thấy hàm số $f(x) = x$ thỏa mãn bài toán.

Bài 23. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$f(1) = -1$ và $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Cho $y = 0$ ta được $f(x) = f(x) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$

Viết lại hệ thức $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ dưới dạng:

$$f(x+y) - (x+y)^2 - 2(x+y) = f(x) - x^2 - 2x + f(y) - y^2 - 2y$$

Đặt $g(x) = f(x) - x^2 - 2x$ do $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có $g(1) = f(1) - 3 = -4$ và $g(x+y) = g(x) + g(y)$ với mọi x,y thuộc $\mathbb{R}$

$\Rightarrow g(x)$ cộng tính $\Rightarrow g(x)$ có dạng $g(x) = kx$, với k là hằng số.

Mà $g(1) = -4 \Rightarrow k = -4 \Rightarrow g(x) = -4x \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$

Thử lại ta thấy thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 24. Tìm tất cả hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho:

$$f(x) + f(x^2 + 2x) = x^2 + 3x + 4026 \quad (1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $(1) \Leftrightarrow f(x) + f\left[(x+1)^2 - 1\right] = (x+1)^2 + (x+1) + 4024 \quad (2)$

Đặt $y = x + 1 \Leftrightarrow x = y - 1 \Rightarrow f(y-1) + f(y^2 - 1) = y^2 + y + 4024, \forall y \in \mathbb{R}$

Xét hàm số $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $g(x+1) + x + 2013 = f(x) \Leftrightarrow g(x) + x + 2012 = f(x-1)$

Do đó từ (2) $\Rightarrow$ g(x) + $g(x^2) = 0 \quad (3)$ và $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Thay $x = 0 \Rightarrow g(0) = 0$

Thay $x = 1 \Rightarrow g(1) = 1$

Thay x bởi $-x$ $\Rightarrow g(-x)+g(x^2)=0 \Rightarrow g(-x)=g(x), \forall x\in\mathbb{R}$

Do đó $g(x)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ nên ta chỉ cần xét với $x>0$

Từ (3) ta có $g(x)=-g(x^2)=g(x^4)$

$$g(x)=g\left(x^{\frac{1}{4}}\right), \forall x>0$$

Lấy $a>0$ tùy ý, Xét dãy (x_n) xác định như sau:

$$x_0=a; x_{n+1}=x^{\frac{1}{4}}, \forall n\ge 0 \Rightarrow \lim x_n=1$$

Và $g(x_{x+1})=g\left(x_n^{\frac{1}{4}}\right)=g(x_n)=g(x_{n-1})=...=g(x_0)=g(a)$

Mặt khác vì g liên tục nên ta có $g(a)=\lim g(x_n)=g(\lim x_n)=g(1)=0$

Vậy $g(x)\equiv 0, \forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow f(x)=x+2013, \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài 25. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(m+n)+f(mn-1)=f(m)f(n)+2, \ \forall m,n\in\mathbb{Z}.$$

Hướng dẫn giải

Nếu f là hàm hằng, $f(k)=c, \forall k\in\mathbb{Z}$ thì ta có $2c=c^2+2 \Leftrightarrow (c-1)^2+1=0,$ vô lý.

Cho $m=0$ ta được $f(n)+f(-1)=f(0)f(n)+2 \Leftrightarrow f(n)\big(f(0)-1\big)=f(-1)-2$

Do f không là hàm hằng nên $f(0)=1; f(-1)=2.$

Cho $m=-1$ ta được $f(n-1)+f(-n-1)=2f(n)+2, \ \forall n\in\mathbb{Z}.$

Suy ra $f(-n)=f(n), \forall n\in\mathbb{Z}$ hay f là hàm số chẵn.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $f(n)=n^2+1, \forall n\in\mathbb{N}.$

Do f là hàm số chẵn nên $f(n)=n^2+1, \forall n\in\mathbb{Z}.$

Thử lại thỏa mãn.

Vậy $f(n)=n^2+1, \forall n\in\mathbb{Z}.$

Bài 26. Tìm $f(x)$ xác định $\forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f(0)=2013; \quad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2014 \\ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y \quad \forall x,y\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Cho

$$x=0; \quad y=\frac{-\pi}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{-\pi}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{-\pi}{2}\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2014$$

Cho

$$y=\frac{\pi}{2}\Rightarrow f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

Cho

$$x=\frac{-\pi}{2}\Rightarrow f\left(y-\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{-\pi}{2}-y\right)=2f\left(\frac{-\pi}{2}\right)\cos y$$

$$=-4028\cos y$$

Cho

$$y=x\Rightarrow f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+f\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)=-4028\cos x \qquad (1)$$

Cho

$$x=0\Rightarrow f(y)+f(-y)=2f(0)\cos y=4026\cos y$$

Cho

$$y=x+\frac{\pi}{2}\Rightarrow f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+f\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)=4026\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=4026\sin x \qquad (2)$$

Trừ từng vế hai phương trình (1) và (2)

$$\Rightarrow\begin{cases} f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-4028\cos x-4026\sin x \\ f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow 2f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-4028\cos x-4026\sin x$$

$$\Leftrightarrow f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-2014\cos x-2013\sin x$$

Cho $x=x+\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow f(x)=-2014\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-2013\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=2014\sin x-2013\cos x$$

Bài 27. Tìm các hàm số $f:(1;+\infty)\to\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện:

$$f(x)-f(y)=(y-x)f(xy) \text{ với mọi } x,y>1$$

Hướng dẫn giải

Với mọi $t>1$, thay $(x;y)=(t;2),(t;4)$ và $(2t;2)$ vào (1) ta được:

$$f(t)-f(2)=(2-t)f(2t)$$
$$f(t)-f(4)=(4-t)f(4t)$$
$$f(2t)-f(2)=(2-2t)f(4t)$$

$\Rightarrow f(4)+(t-3)f(2)=t(2t-5)f(4t)$ (2), với mọi t > 1.

Lấy $t=\frac{5}{2}\Rightarrow f(4)=\frac{1}{2}f(2)$