Chú ý rằng $(n;\varphi(n))=1$ nên suy ra $a\equiv 1(\bmod n)$.

$\Rightarrow a^{n-1}+a^{n-1}+...+1\equiv n(\bmod n)$

$\Rightarrow a^{n}-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-1}+...+1)$ chia hết cho n^2

Hiển nhiên n là một hợp số, và dễ thấy với hai số nguyên tố p_k và p_m đôi một khác nhau sẽ cho ta hai hợp số p_kq_k và p_mq_m khác nhau. Vì tập các số nguyên tố là vô hạn nên cũng có vô hạn hợp số có tính chất P

Câu 15.

$$P\left(x^2+1\right)=\left[P\left(x\right)\right]^2+1$$

b. Tìm đa thức $P\left(x\right)$ với hệ số thực thỏa mãn $P\left(2014\right)=2046$ và

$$P\left(x\right)=\sqrt{P\left(x^2+1\right)-33}+32 \quad \left(x\geq 0\right)$$

Hướng dẫn giải

a. Đặt $Q\left(x\right)=P\left(x\right)-x$ thì $Q\left(0\right)=0.$ Giả sử $x=k$ là nghiệm của $Q\left(x\right),$ khi đó $P\left(k\right)=k.$ Suy ra, $P\left(k^2+1\right)=k^2+1\Rightarrow Q\left(k^2+1\right)=0$ mà $k^2+1>k$ nên $Q\left(x\right)=0$ có vô số nghiệm. Do đó, $Q\left(x\right)=0$ hay $P\left(x\right)=x.$

b. Đặt $Q\left(x\right)=P\left(x\right)-32$ thì $Q\left(2014\right)=2014$ và

$Q\left(x^2+1\right)=\left[Q\left(x\right)\right]^2+1$

Suy ra, $Q\left(x\right)=x$ hay $P\left(x\right)=x+32.$

Câu 16. Trên bảng có một số nguyên. Người ta ghi nhớ chữ số cuối cùng của số này, sau đó xoá đi và cộng thêm vào với số còn lại trên bảng 5 lần chữ số vừa xoá. Ban đầu có số 7^{2014}. Hỏi có thể hay không sau một số lần thực hiện như thế thế ta thu được số 2014^7 ?

Hướng dẫn giải

Giả sử số đang có trên bảng là $N=10a+b\left(0\leq b\leq 9\right)$.

Khi đó số nhận được sau một phép biến đổi là $N'=a+5b$

Ta thấy $5N-N'=49a$. Như vậy nếu $N\,\vdots\,7$ thì $N'\,\vdots\,7$.

Do $7^{2014}\,\vdots\,7$, còn 2014^7 không chia hết cho 7 nên qua các phép biến đổi đã cho từ 7^{2014} không thể thu được 2014^7.

Câu 17. Cho phương trình $x^2-\alpha x-1=0$ với α là số nguyên dương. Gọi β là nghiệm dương của phương trình. Dãy số $\left(x_n\right)$ được xác định như sau

$x_0=\alpha,\ x_{n+1}=\left[\beta\, x_n\right],\ n=0,1,2,3,...$

Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số tự nhiên n sao cho x_n chia hết cho α.

Hướng dẫn giải

Đầu tiên ta chứng minh β là số vô tỉ. Thật vậy, nếu β là số hữu tỉ thì β là số nguyên (do hệ số cao nhất của x^2 là 1) và β là ước của 1. Do đó $\beta=1$ suy ra $\alpha=0$, trái giả thiết.

Do đó $\left[\beta x_{n-1}\right] < \beta x_{n-1} < \left[\beta x_{n-1}\right] + 1$

$\Leftrightarrow x_n < \beta x_{n-1} < x_n + 1$

$\Rightarrow \dfrac{x_n}{\beta} < x_{n-1} < \dfrac{x_n}{\beta} + \dfrac{1}{\beta} \Rightarrow x_{n-1} - \dfrac{1}{\beta} < \dfrac{x_n}{\beta} < x_{n-1}$

$\Rightarrow \left[\dfrac{x_n}{\beta}\right] = x_{n-1} - 1$ (1). Lại có $\beta^2 - \alpha\beta - 1 = 0$, suy ra $\beta = \alpha + \dfrac{1}{\beta}$

$\Rightarrow \beta x_n = \alpha x_n + \dfrac{x_n}{\beta} \Rightarrow x_{n+1} = \left[\alpha x_n + \dfrac{x_n}{\beta}\right] = \alpha x_n + \left[\dfrac{x_n}{\beta}\right] = \alpha x_n + x_{n-1} - 1$ (do (1))

Vậy $x_{n+1} \equiv x_{n-1} - 1 \pmod{\alpha}$. Từ đó bằng quy nạp ta có với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2k+1$, thì $x_{n+1} \equiv x_{n-(2k+1)} - (k+1) \pmod{\alpha}$ (2)

Chọn $k + 1 = l\alpha$ $\left(l \in \mathbb{N}^*\right)$, $n + 1 = 2l\alpha$, từ (2) ta có

$x_{2l\alpha} \equiv x_0 - l\alpha = \alpha - l\alpha \equiv 0 \pmod{\alpha}$.

Vậy $x_{2l\alpha}$ chia hết cho α, $\forall l \in \mathbb{N}^*$.

Câu 18. Với mỗi số nguyên dương m, kí hiệu C(m) là số nguyên dương k lớn nhất sao cho luôn tồn tại một tập S gồm m số nguyên dương để mỗi số nguyên chạy từ 1 đến k hoặc thuộc S hoặc là tổng hai phần tử thuộc S (hai phần tử này không nhất thiết phân biệt). Chứng minh: $\dfrac{m(m+6)}{4} \leq C(m) \leq \dfrac{m(m+3)}{2}$

Hướng dẫn giải

Trước tiên ta tính thử một vài giá trị ban đầu của C(m) để cảm nhận bài toán.

Dễ thấy: C(1)=2; C(2)=4; C(3)=8

Nhận xét: Việc tính C(m) quy về việc đếm số phần tử của tập A xác định bởi:

$A = S \cup (S+S)$; $S + S = \{x + y \mid x, y \in S\}$

+) Chứng minh: $C(m) \leq \dfrac{m(m+3)}{2}$

$|A| \leq |S| + |S+S| \leq |S| + |S| + C_{|S|}^2 = \dfrac{|S|(|S|+3)}{2} = \dfrac{m(m+3)}{2}$

Chú ý: Để đánh giá số phần tử của tập S+S ta chia hai trường hợp x trùng y và x khác y. Rõ ràng {1;2;3;.;k} là một tập con của A nên ta được đpcm.

+) Chứng minh: $\dfrac{m(m+6)}{4} \leq C(m)$

Ta sẽ chỉ ra một tập B sao cho với mọi số nguyên chạy từ 1 đến m(m+6)/4 hoặc thuộc B hoặc là tổng hai số (không nhất thiết phân biệt) thuộc S(m). Khi đó C(m)>=m(m+6)/4.

Xét hai trường hợp sau:

TH1: m = 2n.

Xét tập B(m) = {1; 2; 3;.; n; 2n+1; 3n+2;.; (n+1)n+n} gồm m phần tử và dễ thấy tập $B \cup (B+B)$ chứa dãy số liên tiếp từ 1 đến (n+1)n + 2n và rõ ràng (n+1)n + 2n = 2n(2n+6)/4

TH2: m = 2n+1

Khi đó ta xây dựng tập B(m)={1;2;3;.; n+1;2n+3;3n+5;.;(n+1)n+2n+1}gồm m phần tử và

$B \cup (B+B)$

tập

chứa dãy số liên tiếp từ 1 đến (n+1)n+3n+2 và rõ ràng (n+1)n+3n+2 > (2n+1)(2n+7)/4

Từ hai TH trên ta được đpcm.

Câu 19. Cho $m > 1$ là một số nguyên. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n có thể biểu diễn dưới dạng $n = a + b$, trong đó a là một số nguyên nguyên tố cùng nhau với m và b là một số nguyên sao cho $b^2 \equiv b \pmod m$.

Hướng dẫn giải

- Ta xét trường hợp thứ nhất với $m = p^\alpha$, trong đó p là số nguyên tố và $\alpha \ge 1$. Giả sử n là một số nguyên. Khi đó, xảy ra hai trường hợp:

a) p không chia hết n. Trong trường hợp này thì $ƯCLN(m,n)=1$ và ta có thể chọn $(a,b)=(n,0)$.

b) p chia hết n. Trong trường hợp này p không chia hết n - 1 (bởi vì ngược lại p sẽ chia hết 1). Từ đây suy ra $ƯCLN(m,n-1)=1$ và ta có thể lấy $(a,b)=(n-1,1)$

- Ta đi đến trường hợp tổng quát với $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots\ldots p_r^{\alpha_r}$ với các số nguyên tố phân biệt p_1, p_2, p_3,., p_r và các số nguyên dương $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Giả sử n là một số nguyên. Bằng cách sử dụng trường hợp ở trên, với mỗi k sao cho

$1 \le k \le r$, thì có (a_k, b_k) để $n = a_k + b_k$, $ƯCLN(p_k^{\alpha_k}, a_k) = 1$ và $b_k^2 \equiv b \pmod m$

-Theo định lí Trung Hoa về phần dư thì tồn tại một số nguyên b sao cho $b \equiv b_k \left(\bmod p_k^{\alpha_k}\right)$

với k = 1, 2,., r

Vì $b^2 - b \equiv b_k^2 - b_k \equiv 0 \left(\bmod p_k^{\alpha_k}\right)$ và $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ là các số nguyên tố phân biệt nên ta kết luận rằng $b^2 - b \equiv 0 \left(\bmod p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots\ldots p_r^{\alpha_r}\right)$,

tức là $b^2 \equiv b \pmod m$.

Câu 20. Điền 29 số nguyên dương đầu tiên vào các ô vuông con của bảng 6 x 5 bằng cách sau: Cho phép thay đổi vị trí của các số trong bảng theo quy tắc: Mỗi lần, lấy một số nằm ở ô kề với ô trống rồi chuyển số đó sang ô trống. Hỏi bằng cách thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép chuyển số nói trên đối với bảng số ban đầu ta có thể nhận được bảng số sau đó hay không?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12		13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
25	26	27	28	29

29	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12		13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
25	26	27	28	1

Bảng 1

Bảng 2

Hướng dẫn giải

Giả sử nhờ phép chuyển số theo qui tắc của đề bài, từ Bảng 1 ta có thể nhận được Bảng 2 **(*)**

Ta coi ô trống của mỗi bảng là ô được điền số 0. Với mỗi bảng số nhận được trong quá trình chuyển số, ta liệt kê tất cả các số trong bảng theo thứ tự từ hàng trên xuống hàng dưới và trong mỗi hàng thì từ trái qua phải. Khi đó ứng với mỗi bảng số ta sẽ có một ***hoán vị*** của 30 số tự nhiên đầu tiên. Và do đó, điều giả sử (*) tương đương với: Từ hoán vị (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 0, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29) (***gọi là hoán vị a***) có thể nhận được hoán vị (29, 2, 3, 4,.,11. 12, 0, 13, 14, 15,.27, 28, 1) (***gọi là hoán vị b***) nhờ việc thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép đổi chỗ hai số trong hoán vị theo qui tắc: Mỗi lần, lấy hai số 0 của hoán vị rồi đổi vị trí của số 0 đó cho một số liền kề với số 0 đó. **(1)**

+) Giả sử ($a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_{30}$) là một hoán vị của 30 số tự nhiên đầu tiên. Ta gọi cặp số $\left(a_i;a_j\right)$ là cặp số ngược của hoán vị vừa nêu nếu $a_i > a_j$ và $i < j$. Dễ thấy, sau một lần thực hiện phép đổi chỗ hai số kề nhau đối với hoán vị ($a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_{30}$) thì số cặp số ngược của hoán vị đó sẽ tăng hoặc giảm đi một đơn vị.

+) Khi chuyển chỗ hai số a_i và a_{i+n}($n \geq 1$ tùy ý) trong một hoán vị, cũng tức là chuyển a_i liên tiếp qua n số kề với nó và chuyển a_{i+n} liên tiếp qua $n-1$ số kề với nó, nghĩa là chuyển $2n-1$ (một số lẻ lần) hai số kề nhau, do đó cặp số ngược của hoán vị đó sẽ tăng hoặc giảm một số lẻ đơn vị. **(2)**

+) Ta có: Số cặp số ngược của của hoán vị ***a*** là 12 và số cặp số ngược của hoán vị ***b*** là 67. Từ đó, kết hợp với (2), suy ra từ hoán vị ***a*** ta chỉ có thể nhận được hoán vị ***b*** sau một số lẻ lần thực hiện phép đổi chỗ hai số nào đó. Điều này cho thấy, nếu từ Bảng 1 ta nhận được Bảng 2 thì số lần đổi chỗ hai số ở hai ô nào đó phải là số lẻ. **(3)**

+) Tô màu tất cả các ô vuông con của bảng 6 x 5 bởi hai màu xanh, đỏ sao cho hai ô kề nhau có màu khác nhau. Sau mỗi lần đổi chỗ hai số ở hai ô kề nhau, trong đó có số 0 ở ô trống, theo cột hay theo hàng thì số 0 được chuyển từ ô có màu này sang ô có màu kia. Và vì thế do số 0 ở bảng 1 và số 0 ở bảng 2 nằm ở hai ô cùng màu nên từ bảng 1 ta chỉ nhận được bảng 2 sau một số chẵn lần đổi chỗ hai số ở hai ô kề nhau, trong đó có số 0. Điều này mâu thuẫn với **(3)** và mâu thuẫn đó cho thấy: Từ Bảng 1 ta không thể nhận được Bảng 2 nhờ một số hữu hạn lần đổi chỗ ở hai ô kề nhau, trong đó có số 0 ở ô trống, theo quy tắc của đề bài

Câu 21. Ban đầu ta có bộ số $\left(a,b,c,d\right)$ trong đó a,b,c,d là các số nguyên đôi một khác nhau. Thực hiện thuật toán sau: nếu có bộ số $M=\left(x,y,z,t\right)$ với x,y,z,t nguyên thì được phép thay thế bởi bộ số $T\left(M\right)=\left(\frac{x+y}{2},\frac{y+z}{2},\frac{z+t}{2},\frac{t+x}{2}\right)$. Chứng minh rằng việc thực hiện thuật toán trên sẽ dừng lại sau hữu hạn bước.

Hướng dẫn giải

Giả sử ngược lại, ta nhận được bộ số với các thành phần là số nguyên.

Gọi $S_n = max\{|x_n - y_n|, |y_n - z_n|, |z_n - t_n|, |t_n - x_n|, |x_n - z_n|, |y_n - t_n|\}$ trong đó (x_n, y_n, z_n, t_n) là bộ số nhận được sau bước thứ n.

Ta có: $S_{n+1} < S_n, \forall n \ge 1$.

Do $S_n \in \mathbb{N}, \forall n \ge 1$ nên tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho $S_m = 0$.

Khi đó ta có: $x_m = y_m = z_m = t_m = 0$.

Đặt $x_m = y_m = z_m = t_m = k$.

Ta có: $\frac{x_{m-1} + y_{m-1}}{2} = \frac{y_{m-1} + z_{m-1}}{2} = \frac{z_{m-1} + t_{m-1}}{2} = \frac{t_{m-1} + x_{m-1}}{2} = k$.

Suy ra: $x_{m-1} = z_{m-1}, y_{m-1} = t_{m-1}$.

Đặt $x_{m-1} = z_{m-1} = u, y_{m-1} = t_{m-1} = v$.

Ta có: $\frac{x_{m-2} + y_{m-2}}{2} = \frac{z_{m-2} + t_{m-2}}{2} = u;\ \frac{y_{m-2} + z_{m-2}}{2} = \frac{t_{m-2} + x_{m-2}}{2} = v$.

Suy ra: $u = v = \frac{x_{m-2} + y_{m-2} + z_{m-2} + t_{m-2}}{2}$. Thế thì $x_{m-1} = y_{m-1} = z_{m-1} = t_{m-1}$.

Tiếp tục quá trình lập luận như trên dẫn đến $a = b = c = d$.

Vậy ta hoàn tất chứng minh.

Câu 22. Có bao nhiêu cách phân tích 6^9 thành tích của 3 số nguyên dương, biết các cách phân tích mà các nhân tử chỉ khác nhau về thứ tự thì chỉ được tính 1 lần?

Hướng dẫn giải

Xét phân tích $6^9 = (2^{a_1}.3^{b_1})(2^{a_2}.3^{b_2})(2^{a_3}.3^{b_3})$ với $\begin{cases} a_i, b_i \in N \\ a_1 + a_2 + a_3 = 9 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 9 \end{cases}$

Với mỗi $a_1 \in N, 0 \le a_1 \le 9$, có $10 - a_1$ cách chọn số a_2, để $a_1 + a_2 \le 9$

từ đó chọn $a_3 = 9 - a_1 - a_2$.

Vậy số cách chọn các bộ (a_1, a_2, a_3) là 10+9+.+1 = 55 cách

⇒số cách chọn các bộ (a_1, a_2, a_3) và (b_1, b_2, b_3) là 55.55 cách.

Bây giờ, ta sẽ tính số các cách phân tích bị trùng nhau.

+) TH1: 3 thừa số bằng nhau:

$$6^9 = (2^3.3^3)(2^3.3^3)(2^3.3^3)$$

+) TH2: 2 thừa số bằng nhau:

Câu 23. $6^9 = (2^a.3^b)(2^a.3^b)(2^{9-2a}.3^{9-2b})$ và (a; b) (3; 3).

Câu 24. Khi đó a ∈ {0; 1; 2; 3; 4}; b∈ {0; 1; 2; 3; 4 } và (a; b) (3; 3)

→ số cặp (a; b) là 5.5 – 1 =24, và 24 cặp này cho ta 24 cách phân tích thỏa mãn yêu cầu. Tuy nhiên, mỗi cặp sẽ cho 3 lần đếm trong quá trình đếm mà ta vừa nêu ở trên.

+) TH3: nếu cả 3 thừa số khác nhau, thì mỗi phân tích bị đếm trùng 3!=6 lần.

Vậy số cách phân tích là: $1 + 24 + (55 \times 55 - 24 \times 3 - 1): 6 = 517$ cách

Câu 25. Cho bộ số $(1;2;3)$.

1) Chúng ta thực hiện phép biến đổi trên các bộ 3 số như sau: thay hai số trong chúng, ví dụ a và b, bởi $a+b$ và $a-b$. Hỏi có thể nhận được bộ số sau: $(a_1;b_1;c_1)$ thỏa mãn $|a_1|+|b_1|+|c_1|=10$ sau khi thực hiện hữu hạn phép biến đổi từ bộ số ban đầu $(1;2;3)$?

2) Nếu chúng ta thực hiện phép biến đổi trên các bộ 3 số như sau: thay hai số trong chúng, ví dụ a và b, bởi $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Hỏi có thể nhận được bộ số $(28;4;2014)$ sau khi thực hiện hữu hạn phép biến đổi từ bộ số ban đầu $(1;2;3)$

Hướng dẫn giải

Ta thực hiện theo cấu hình sau $(1;2;3)\to(3;-1;3)\to(3;2;-4)\to$

$(3;2;-4)\to(-7;2;-1)=(a_1;b_1;c_1)$

Dễ thấy: $|a_1|+|b_1|+|c_1|=10$

Trong mọi cấu hình ta luôn có: Tổng bình phương các số là không đổi

Lại có: $1^2+2^2+3^2\neq 28^2+4^2+2014^2$

Vậy câu trả lời là phủ định.

Câu 26. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương m sao cho 2^m+1 chia hết cho m.

Hướng dẫn giải

Ta có: $2^3+1 \;\vdots\; 3$

Ta chỉ ra rằng với mọi số nguyên dương m, ta có: $2^{3^m}+1 \;\vdots\; 3^m$

Với $m=1$, khẳng định đúng

Giả sử khẳng định đúng với m nguyên dương nào đó, tức là tồn tại k nguyên dương sao cho $2^{3^m}=k.3^m-1$.

Ta có:

$$2^{3^{m+1}}=\left(3^m.k-1\right)^3=3^{3m}.k^3-3^{2m+1}.k^2+3^{m+1}.k-1$$

$$=3^{m+1}.t-1$$

với t là một số nguyên dương nào đó.

Như vậy, khẳng định được chứng minh

Câu 27. Tìm các số nguyên tố (không cần phân biệt) mà tích của chúng bằng mười lần tổng của chúng.

Hướng dẫn giải

Câu 28. Tìm tất cả các số tự nhiên *n* sao cho tìm được các số nguyên a, b, c thỏa mãn a + b + c = 0 và $a^n + b^n + c^n$ là số nguyên tố

Hướng dẫn giải

Câu 29. Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd$. Chứng minh rằng: a + b + c + d là hợp số.

Hướng dẫn giải

Câu 30. Tồn tại hay không hai số nguyên dương phân biệt p, q sao cho $q^n + n$ chia hết cho $p^n + n$ với mọi số nguyên dương n?

Hướng dẫn giải

Giả sử tồn tại hai số p, q nguyên dương phân biệt sao cho $q^n + n$ chia hết cho $p^n + n$ với mọi số nguyên dương n, thế thì $q^n + n > p^n + n \Rightarrow q > p$.

Giả sử a là một số nguyên tố lớn hơn q và n là số tự nhiên thỏa mãn $n = (p+1)(a-1)+1$. Khi đó n = (p+1)a –p $\Rightarrow n \equiv -p (\bmod a)$ (1)

Vì p < q < a nên (p, a) =(q, a)=1. Theo định lý nhỏ Fermat, ta có

$p^{a-1} \equiv 1(\bmod a) \Rightarrow p^{(p+1)(a-1)} \equiv 1(\bmod a) \Rightarrow p^{(p+1)(a-1)+1} \equiv p(\bmod a)$.

Do đó $p^n \equiv p(\bmod a)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $p^n + n \equiv 0(\bmod a)$ *hay* $\left(p^n + n\right) \vdots a$ (4)

Chứng minh tương tự, ta được $q^n \equiv q(\bmod a)$ (3) *và* $\left(q^n + n\right) \vdots a$

Từ (1) và (3) suy ra $q^n + n \equiv q - p(\bmod a)$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $(q-p) \vdots a$. Điều này không thể sảy ra vì $p < q < a$

Vậy không tồn tại hai số nguyên dương phân biệt p, q sao cho $q^n + n$ chia hết cho $p^n + n$ với mọi số nguyên dương n.

Câu 31. Cho các số nguyên dương $m, n;$ một bảng hình vuông kích thước $n \times n$ được gọi là bảng "$m -$ hoàn thiện" nếu tất cả các ô của nó được điền bởi các số nguyên không âm (không nhất thiết phân biệt) sao cho tổng các số trên mỗi hàng và mỗi cột đều bằng $m.$ Hỏi có tất cả bao nhiêu cách lập bảng "2015-hoàn thiện" kích thước 3x3 sao cho số nhỏ nhất trong các số ở các ô trên đường chéo chính nằm ở vị trí tâm của bảng? (Ô ở đường chéo chính của bảng là ô ở vị trí giao của dòng có số thứ tự tính từ trên xuống và cột có số thứ tự tính từ trái sang bằng nhau; ô ở tâm bảng 3x3 là ô ở dòng thứ 2 và cột thứ 2).

Hướng dẫn giải

Ta giải bài toán trong trường hợp lập bảng "$m -$ hoàn thiện" kích thước 3x3.

Gọi x, y, z, t lần lượt là các số điền được ở đường chéo chính và ô ở vị trí dòng 1 cột 2, khi đó các số còn lại ở các ô được xác định duy nhất như hình bên dưới

x	t	$m-x-t$
$m+z-x-y-t$	y	$x+t-z$
$y+t-z$	$m-y-t$	z

Vì các số được điền là không âm và y là số nhỏ nhất trong các số ở đường chéo chính nên các điều kiện sau phải thỏa