Câu 15. **[Ngân hàng đề Hùng Vương-Trường CHUYÊN BẮC GIANG – năm-Tỉnh BẮC GIANG]**

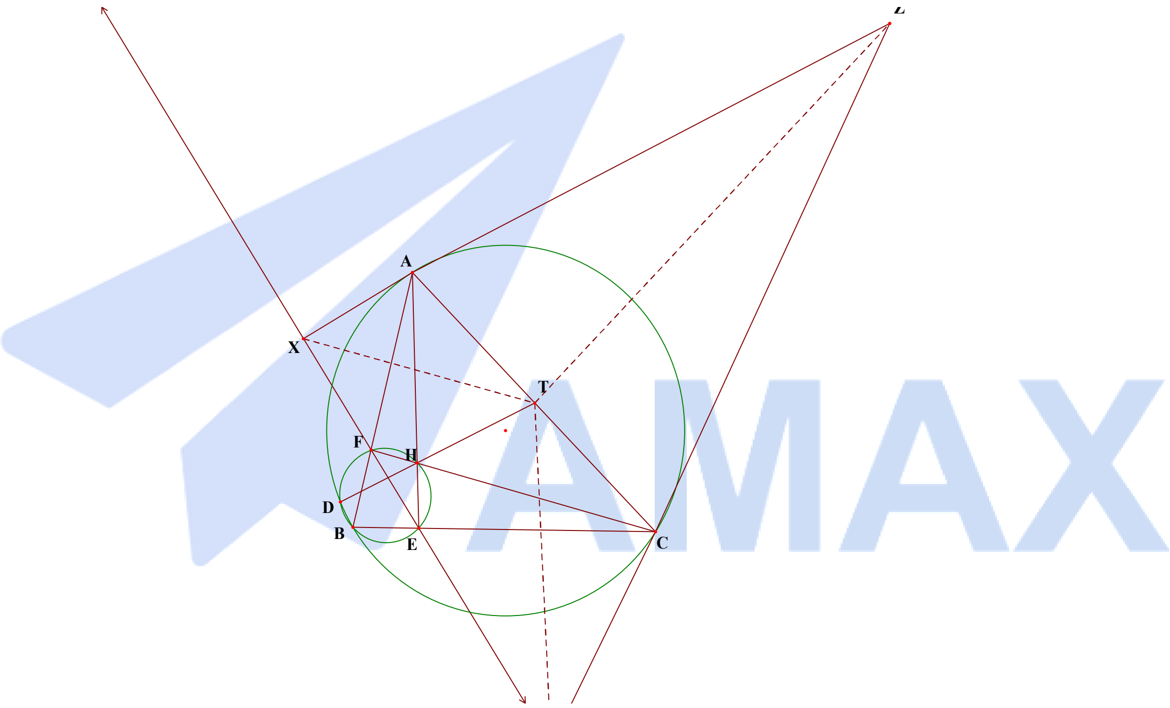
Cho tam giác nhọn ABC không cân tại B, T là trung điểm cạnh AC, E và F tương ứng là chân đường cao hạ từ A, C của tam giác. Z là giao điểm của hai tiếp tuyến tại A, C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, X là giao điểm của ZA và EF, Y là giao điểm của ZC và EF

a) Chứng minh rằng T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và EBF cắt nhau tại điểm thứ hai D. Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên DT.

c) Chứng minh rằng D nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ.

Hướng dẫn giải



a) ZT là phân giác góc $\widehat{AZC}$.

Do $\widehat{XAB} = \widehat{ACB} = \widehat{BFE} = \widehat{AFX}$ và $TA = TF$, từ đó X và T nằm trên trung trực của AF, do đó T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ

b)Giả sử $AB < BC$, khi đó D nằm trên cung nhỏ AB. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và L là trung điểm của BH. Ta có được BD và LO vuông góc.

Từ BD và DH vuông góc, ta được LO và DH song song. $OLHT$ là hình bình hành nên LO song song với HT, do đó D, H, T thẳng hàng.

c) Chứng minh được góc $\widehat{ADT} = \widehat{AXT}$ và TY là đường trung trực của DC.

Chứng minh được góc $\widehat{CDT} = \widehat{CYT}$ nên $CTDY$ là tứ giác nội tiếp.

Do đó góc $\widehat{XDY} + \widehat{XZY} = \widehat{XDT} + \widehat{TDY} + \widehat{XZY} = \widehat{ZAT} + \widehat{ZCT} + \widehat{XZY} = 180^\circ$, do đó $DXZY$ là tứ giác nội tiếp.

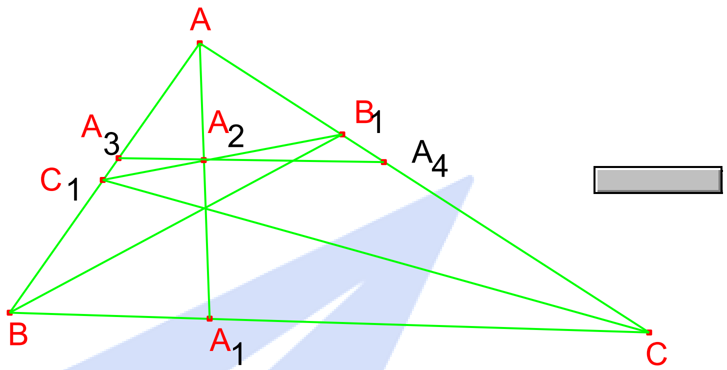
Câu 16. **[KỲ THI OLIMPIC HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ X- NĂM 2014- TRƯỜNG CHUYÊN HÀ GIANG]**

Các đường phân giác trong AA_1, BB_1, CC_1 của tam giác ABC có chu vi p cắt các đoạn thẳng B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tương ứng tại A_2, B_2, C_2 **A.** Các đường thẳng qua A_2 song song với BC cắt AB, AC theo thứ tự tại A_3, A_4. Đường thẳng qua B_2 song song với AC cắt BC, BA theo thứ tự tại B_3, B_4. Đường thẳng qua C_2 song song với AB cắt CA, CB theo thứ tự tại C_3, C_4. Chứng minh rằng:

$AB_4+BC_4+CA_4+BA_3+CB_3+AC_3 \le p$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Hướng dẫn giải



Đặt BC = a, AC = b, BA = c, p = a+b +c.

Vì $A_3A_4 \parallel BC$ nên theo định lí Talet ta có: $\dfrac{BA_3}{AB} = \dfrac{CA_4}{AC} = \dfrac{A_1A_2}{AA_1} \Leftrightarrow \dfrac{BA_3 + CA_4}{b+c} = 1 - \dfrac{AA_2}{AA_1}$ (1)

Áp dụng tính chất đường phân giác trong góc C: $\dfrac{C_1A}{C_1B} = \dfrac{AC}{BC} \Leftrightarrow \dfrac{C_1A}{AB} = \dfrac{AC}{AC+BC} \Rightarrow C_1A = \dfrac{AB.AC}{AC+BC} = \dfrac{c.b}{a+b}$

Tương tự: $AB_1 = \dfrac{c.b}{a+c}$

Sử dụng công thức đường phân giác cho tam giác ABC và tam giác $A_1B_1C_1$

$$AA_1 = \frac{2c.b\cos\frac{A}{2}}{b+c}; AA_2 = \frac{2AB_1.AC_1\cos\frac{A}{2}}{AB_1 + AC_1}$$

Do đó: $\dfrac{AA_2}{AA_1} = \dfrac{b+c}{2a+b+c}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$\frac{BA_3 + CA_4}{b+c} = 1 - \frac{b+c}{2a+b+c} = \frac{2a}{2a+b+c}$$

Từ đó, theo bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta nhận được:

$$BA_3 + CA_4 = \frac{2a(b+c)}{2a+b+c} \le \frac{\left(\frac{2a+(b+c)^2}{2}\right)}{2a+b+c} = \frac{2a+b+c}{4} \text{ (3)}$$

Hoàn toàn tương tự: $AB_4 + CB_3 \le \dfrac{2b+c+a}{4}$ (4); $BC_4 + AC_3 \le \dfrac{2c+b+a}{4}$ (5)

Từ (3), (4) và (5) suy ra: $AB_4+BC_4+CA_4+BA_3+CB_3+AC_3 \le a+b+c = p$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra khi a = b =c.

LOẠI 8: Các bài toán khác

Câu 17. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I, có trọng tâm G nằm trong hình tròn tâm I. Gọi a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, AC, AB của tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

Hướng dẫn giải

- Tìm giá trị nhỏ nhất:

T ừ BĐT: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$

Từ đó $P=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\geq 1$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c. Do đó giá trị của biểu thức P bằng 1, đạt được khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

- Tìm giá trị lớn nhất:

G ọi p v à r theo thứ tự là nửa chu vi và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta có:

$IA^2+IB^2+IC^2=(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2+3r^2 (1)$

Ta lại có:

$IA^2+IB^2+IC^2=(\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GA})^2+(\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GB})^2+(\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GC})^2$

$=3IG^2+GA^2+GB^2+GC^2 (2)$

(Do $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$)

Từ (1) và (2) và để ý rằng: $GA^2+GB^2+GC^2=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$ (theo công thức đường trung tuyến trong tam giác), ta thấy

$(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2+3r^2=3IG^2+\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} (3)$

Vì I nằm trong hình tròn (I) nên $IG\leq r$ .Từ (3) suy ra

$(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2\leq\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$

$\Leftrightarrow\dfrac{3}{4}(a+b+c)^2-(a+b+c)^2+(a^2+b^2+c^2)\leq\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$

$\Leftrightarrow 5(a^2+b^2+c^2)\leq 6(ab+bc+ca)$

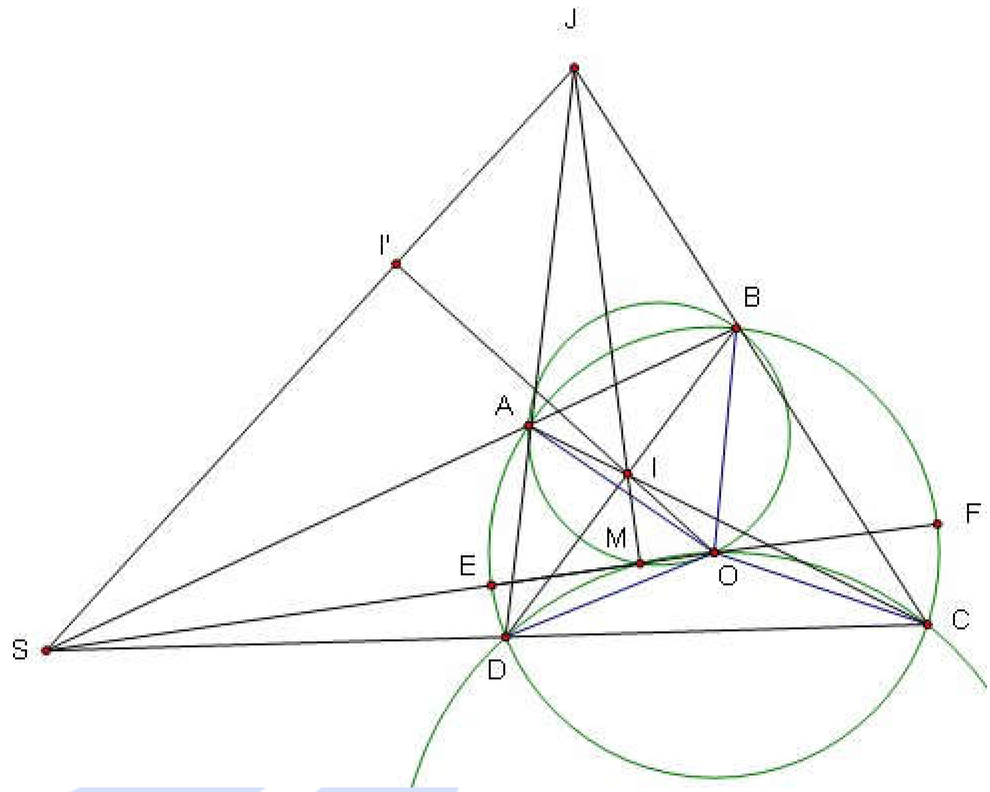
Do đó $P\leq\dfrac{6}{5}$

Đẳng thức xảy ra khi IG = r. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng $\dfrac{6}{5}$ đạt được khi G nằm trên đường tròn tâm I.

Câu 18. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN HẠ LONG ĐỀ ĐỀ XUẤT TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG]**

Cho tam giác ABC và một điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MBA}>\widehat{MCA}$ và $\widehat{MBC}>\widehat{MCB}$. Giả sử BM và CM lần lượt cắt AC và AB tại P, Q, chứng minh rằng BP < CQ.

Hướng dẫn giải



Ta thấy AB, CD, MN lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (AOB) và (O); (AOB) và (COD); (COD) và (O) nên AB, CD, OM đồng quy tại tâm đẳng phương S. SO cắt (O) tại E, F.

Ta có $\overline{SE}.\overline{SF} = \overline{SA}.\overline{SB} = \overline{SM}.\overline{SO}$ và O là trung điểm EF nên theo hệ thức Maclaurin, ta có (SMEF) = -1, do đó M thuộc đường đối cực của S (1)

Mà I cũng thuộc đường đối cực của S (2)

Từ (1) và (2) suy ra IM là đường đối cực của S, do đó góc IMO bằng 90°. Tương tự góc INO bằng 90°, ta có đpcm

Câu 19. Cho tam giác ABC có độ dài các đường cao $BB' = \sqrt{5}; CC' = 2$ và $\cos \widehat{CBB'} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Tính diện tích tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Xét hai trường hợp:

+) B và C không tù. Khi đó

$$\cos \angle CBB' = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin C = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos C = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$BC = \frac{BB'}{\cos \angle CBB'} = \frac{5}{2}$$

Suy ra $\sin B = \frac{CC'}{BC} = \frac{4}{5}, \cos B = \frac{3}{5}$

$$\Rightarrow \sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow AB = \frac{BB'}{\sin A} = \frac{5}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2} AB.CC' = \frac{5}{2}$$

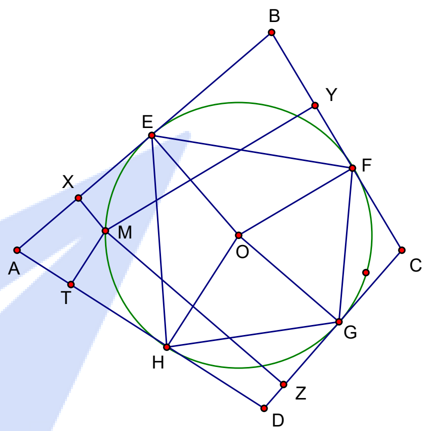
+) B hoặc C tù

Do $BB' > CC'$ nên $B < C$ và C tù $\Rightarrow \sin C = \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \cos C = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Còn $\sin B = \dfrac{4}{5}, \cos B = \dfrac{3}{5}$ (giống trường hợp 1) $\Rightarrow \sin A = \dfrac{2}{5\sqrt{5}}, AB = \dfrac{25}{2}$ Suy ra $S = \dfrac{25}{2}$

Câu 20. Cho tứ giác $ABCD$ ($AB \neq CD$) ngoại tiếp đường tròn $(O;R)$, $R > 0$ và điểm M di chuyển trên đường tròn $(O;R)$. Gọi X, Y, Z, T lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các đường thẳng AB, BC, CD, DA. Tìm vị trí của điểm M sao cho $MX + MY + MZ + MT$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất?

Hướng dẫn giải



Gọi E, F, G, H lần lượt là tiếp điểm của các đường thẳng *AB, BC, CD, DA* với đường tròn $(O;R)$ và gọi K là trọng tâm của tứ giác EFGH.

Ta có

$$MX + MY + MZ + MT = \frac{MX.OE + MY.OF + MZ.OG + MT.OH}{R}$$

$$= \frac{\overrightarrow{MX}.\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{MY}.\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{MZ}.\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{MT}.\overrightarrow{OH}}{R}$$

$$= \frac{\overrightarrow{MX}.\left(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OH}\right)}{R} + 4R = \frac{4\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OK}}{R} + 4R$$

$$= \frac{4.MO.OK.\cos\left(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OK}\right)}{R} + 4R = 4.OK.\cos\left(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OK}\right) + 4R$$

Do đó

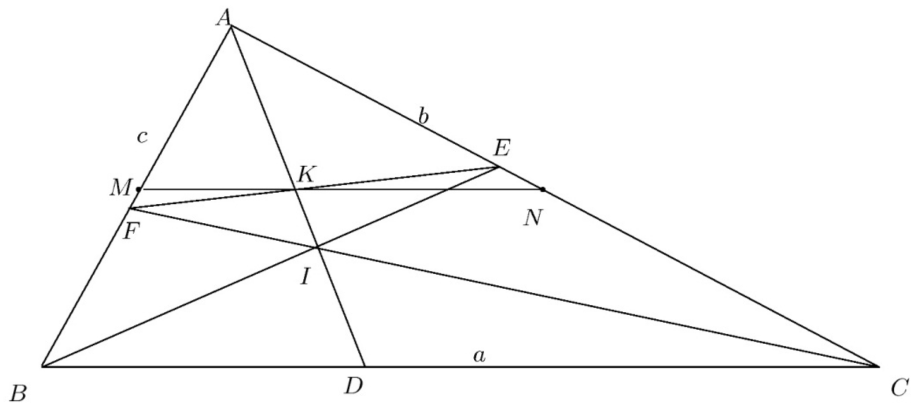
$MX + MY + MZ + MT$

đạt giá trị lớn nhất khi M là giao điểm của tia KO với đường tròn (O; R) và đạt giá trị nhỏ nhất khi M là giao điểm của tia OK với đường tròn (O;R).

Câu 21. Gọi AD, BE, CF là ba đường phân giác trong của tam giác ABC vuông ở A. Đoạn thẳng AD cắt EF tại K. Đường thẳng qua K song song với BC cắt AB, AC lần lượt ở M, N.

Chứng minh rằng: $MN \geq \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}(AB + AC)$.

Hướng dẫn giải



Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$ ta có $a^2 = b^2 + c^2 \geq \dfrac{(b+c)^2}{2}$ suy ra $\dfrac{b+c}{a} \leq \sqrt{2}$.

Dùng tính chất đường phân giác tính được $AF = \dfrac{bc}{a+b}, AE = \dfrac{bc}{a+c}$.

Dùng phương pháp diện tích, hoặc công thức đường phân giác trong tính được

$AD = \dfrac{\sqrt{2}bc}{b+c}, AK = \dfrac{\sqrt{2}AE.AF}{AE+AF} = \dfrac{\sqrt{2}bc}{2a+b+c}$.

Từ đó $\dfrac{AK}{AD} = \dfrac{b+c}{2a+b+c} \to \dfrac{MN}{a} = \dfrac{b+c}{2a+b+c}$.

Suy ra: $MN = (b+c)\dfrac{1}{2+\dfrac{b+c}{a}} \geq (b+c)\dfrac{1}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\left(AB+AC\right)$.

Câu 22. (Kỳ thi học sinh giỏi tỉnh Hà Tĩnh 2008 – 2009) Cho tam giác ABC có các góc A, B, C thỏa mãn hệ thức: $\dfrac{1}{\cos A} + \dfrac{1}{\cos B} + \dfrac{1}{\cos C} = \dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}$

Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

Câu 23. (Kỳ thi học sinh giỏi tỉnh Hà Tĩnh 2010 – 2011)Tam giác ABC có ba góc thỏa mãn hệ thức:

$8\cos A \sin B \sin C + 4\sqrt{3}\left(\sin A + \cos B + \cos C\right) - 17 = 0$

Hãy tính các góc của tam giác đó.

Câu 24. (Đề thi chọn HSG tỉnh Quảng Bình 2012 – 2013) Chứng minh rằng nếu các góc A , B , C của ΔABC thỏa mãn điều kiện: $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -1$ thì $\sin A + \sin B + \sin C \leq 1 + \sqrt{2}$.

Câu 25. (Đề thi đề nghị trường THPT chuyên Lê Quý Đôn TP. Đà Nẵng – hội thi HSG duyên hải Bắc bộ lần thứ VII) Cho n-giác đều $A_1A_2...A_n$ $(n \geq 3)$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$ và đường thẳng d tùy ý. Qua các điểm A_k $\left(k = \overline{1,n}\right)$ vẽ các đường thẳng song song với d cắt đường tròn (O) tại các điểm B_k $\left(k = \overline{1,n}\right)$. Chứng minh tổng $S_n = A_1B_1^2 + A_2B_2^2 + ... + A_nB_n^2$ không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d.

Hướng dẫn giải:

Chọn hệ trục Oxy, sao cho gốc tọa độ là tâm đa giác, trục Ox vuông góc với d. Không mất tính tổng quát, giả sử có thể giả sử đa giác đều nội tiếp đường tròn đơn vị ($R=1$).

Đặt $\left(\overrightarrow{Ox};\overrightarrow{OA_1}\right)=\alpha$ thì $A_k\left(\cos\left(\alpha+\frac{(k-1)\pi}{n}\right);\sin\left(\alpha+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right)$

và $B_k\left(\cos\left(\alpha+\frac{(k-1)\pi}{n}\right);-\sin\left(\alpha+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right), \forall k=1,2,...,n$.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}A_kB_k^2=4\sum_{k=1}^{n}\sin^2\left(\alpha+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)=2n+\sum_{k=1}^{n}\cos\left(2\alpha+\frac{2(k-1)\pi}{n}\right)$$

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\cos\left(2\alpha+\frac{2(k-1)\pi}{n}\right)=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(2\alpha+\frac{2(k-1)\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(2\alpha+\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)-\cos\left(2\alpha+\frac{(2k-3)\pi}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\left(\cos\left(2\alpha+\frac{(2n-1)\pi}{n}\right)-\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{n}\right)\right)=0$$

Vậy $S_n=2n+T_n=2n.$

Câu 26. Gọi x,y,z là khoảng cách từ một điểm M bất kỳ nằm trong ΔABC có 3 góc nhọn đến các cạnh BC,CA,AB. Chứng minh rằng: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2R}}$, a,b,c là độ dài các cạnh của tam giác, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Dấu $=$ xảy ra khi nào?

Câu 27. Tính các góc của ΔABC biết rằng: $\cos 2A+2\sqrt{2}\left(\cos B+\cos C\right)=3$ và ΔABC không có góc tù.

Câu 28. Chứng minh rằng với mọi điểm thuộc mặt phẳng chứa ΔABC, ta đều có: $MA^2+MB^2+MC^2\ge\frac{4}{\sqrt{3}}S$, trong đó S là diện tích của ΔABC

Câu 29. Chứng minh rằng nếu a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 3 thì:

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)+4abc\ge 13$$

Câu 30. Hãy xác định dạng của tam giác ABC nếu các góc của tam giác ABC thỏa mãn đẳng thức sau:

$$\frac{tg\frac{A}{2}}{1+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}+\frac{tg\frac{B}{2}}{1+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}}+\frac{tg\frac{C}{2}}{1+tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}=\frac{1}{4tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}$$

LOẠI 8: Các bài toán khác

Câu 1. [Chu Văn An-Hà Nội] Gọi AD,BE,CF là ba đường phân giác trong của tam giác ABC vuông ở A. Đoạn thẳng AD cắt EF tại K. Đường thẳng qua K song song với BC cắt AB,AC lần lượt ở M,N. Chứng minh rằng: