Gọi D', E', F' là hình chiếu vuông góc của O lên các đường JK, KI, IJ. Do G là trọng tâm hai tam giác trên nên:

Xét $V_{\left(G;-\frac{1}{2}\right)}$ *biến* A, B, C, I, J, K thành A, B, C, A', B', C'

Có A' là trung điểm BC nên $OA' \perp BC$, $OD' \perp JK \Rightarrow OD \perp BC$. Vậy O, A', D' thẳng hàng. Do đó $A'D' \perp BC$.

Suy ra $A'D' // AD$ và $A'D = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \angle GAD = \angle GA'D'$

$\Rightarrow \angle AGD = \angle A'GD'$

$\Rightarrow \angle AGD + \angle AGD' = \angle A'GD' + \angle AGD' = 180^\circ$

Vậy D, G, D' thẳng hàng và $V_{\left(G;-\frac{1}{2}\right)}$ biến D thành D'

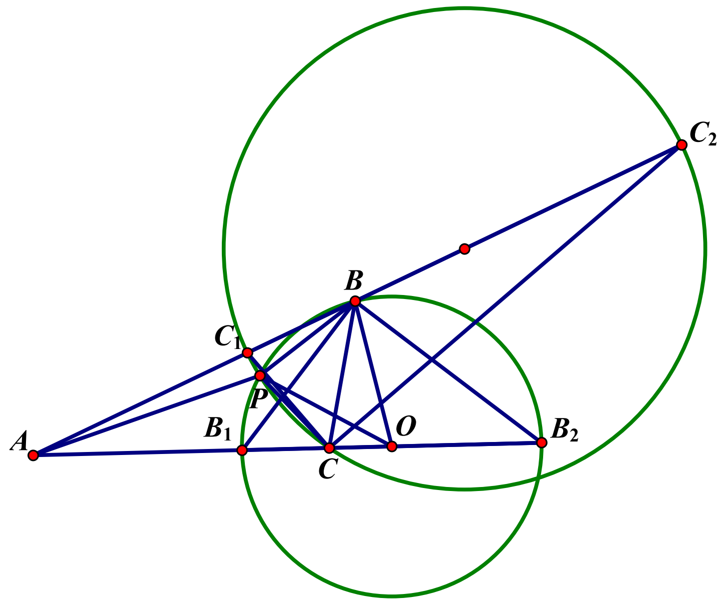
Tương tự có $V_{\left(G;-\frac{1}{2}\right)}$ biến E thành E' biến F thành F'.

D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi D$', E', F'$ thẳng hàng. Do D$', E', F'$ là hình chiếu vuông góc của O lên các đường JK, KI, IJ nên theo định lí Simson D$', E', F'$ thẳng hàng $\Leftrightarrow O$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp $\Delta IJK \Leftrightarrow OH = 2R$

Câu 17. [HỘI CÁC TRƯỜNG CHUYÊN VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ. **TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM** ĐỀ THI MÔN TOÁN KHỐI 11NĂM 2015- **TỈNH QUẢNG NAM]**

Cho ΔABC nhọn có $\widehat{BAC} = 30^0$. Hai đường phân giác trong và ngoài của $\widehat{ABC}$ lần lượt cắt đường thẳng AC tại B_1 và B_2; hai đường phân giác trong và ngoài của $\widehat{ACB}$ lần lượt cắt đường thẳng AB tại C_1, C_2. Giả sử hai đường tròn đường kính B_1B_2 và C_1C_2 gặp nhau tại một điểm P nằm bên trong ΔABC. Chứng minh rằng $\widehat{BPC} = 90^0$.

Hướng dẫn giải



Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng B_1B_2.

Khi đó hai điểm B và P nằm trên đường tròn tâm O bán kính OB_1.

Vì $\widehat{OBC}=\widehat{OBB_1}-\widehat{CBB_1}=\widehat{OB_1B}-\widehat{B_1BA}=\widehat{BAC}$ nên $\Delta OCB \backsim \Delta OBA$,

Suy ra $OC.OA=OB^2=OP^2$.

Từ đó $\Delta OCP \backsim \Delta OPA \Rightarrow \widehat{OPC}=\widehat{PAC}$.

Do đó

$$\widehat{PBC}-\widehat{PBA}=\left(\widehat{B_1BC}+\widehat{PBB_1}\right)-\left(\widehat{ABB_1}-\widehat{PBB_1}\right)=2\widehat{PBB_1}=\widehat{POB_1}=\widehat{PCA}-\widehat{OPC}$$

Như vậy $\widehat{PBC}-\widehat{PBA}=\widehat{PCA}-\widehat{PAC}$ suy ra $\widehat{PAC}+\widehat{PBC}=\widehat{PBA}+\widehat{PCA}(1)$

Tương tự ta cũng có $\widehat{PAB}+\widehat{PCB}=\widehat{PBA}+\widehat{PCA}\ \ (2)$.

Ngoài ra $\left(\widehat{PAC}+\widehat{PBC}\right)+\left(\widehat{PAB}+\widehat{PCB}\right)+\left(\widehat{PBA}+\widehat{PCA}\right)=180^0\ \ (3)$

Từ $(1);(2);(3)$ ta đi đến $\widehat{PBA}+\widehat{PCA}=60^0$.

Suy ra $\widehat{BPC}=\left(\widehat{PBA}+\widehat{PAB}\right)+\left(\widehat{PCA}+\widehat{PAC}\right)=\widehat{BAC}+\left(\widehat{PBA}+\widehat{PCA}\right)=90^0$.

Câu 18. **[TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ X, NĂM HỌC 2013-2014. TRƯỜNG THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ -HÒA BÌNH]**

Cho tam giác ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O. Đường tròn tâm I tiếp xúc với hai cạnh AC, BC lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với đường tròn tâm O tại điểm P. Một đường thẳng song song với AB tiếp xúc với đường tròn tâm I tại điểm Q nằm trong tam giác AB**C.**

a) Gọi K,L lần lượt là giao điểm thứ hai của PE và PF với (O). Chứng minh rằng KL song song với EF

b) Chứng minh rằng: $\widehat{ACP}=\widehat{QCB}$.

Hướng dẫn giải

a) Gọi D là giao điểm thức hai của đường thẳng PC PC với đường tròn tâm I, và M là giao điểm thứ hai của đường tròn tâm O với PQ.

Xét phép vị tự V tâm P biến đường tròn tâm I thành đường tròn tâm O, ta có phép vị tự V biến E,Q,F lần lượt thành K,M,L.

Theo tính chất của phép vị tự ta có $EF//KL$ EF.

Ta có OK là ảnh của IE qua V, dẫn đến $OK//IE$ mà $IE\perp AC\Rightarrow OK\perp AC$, suy ra K là điểm chính giữa của cung AC. Chứng minh tương tự ta có L là điểm chính giữa của cung BC, M là điểm chính giữa của cung AB.

b) Ta có

$\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{MA}\Leftrightarrow \overset{\frown}{BL}+\overset{\frown}{LM}=\overset{\frown}{MK}+\overset{\frown}{KA}$

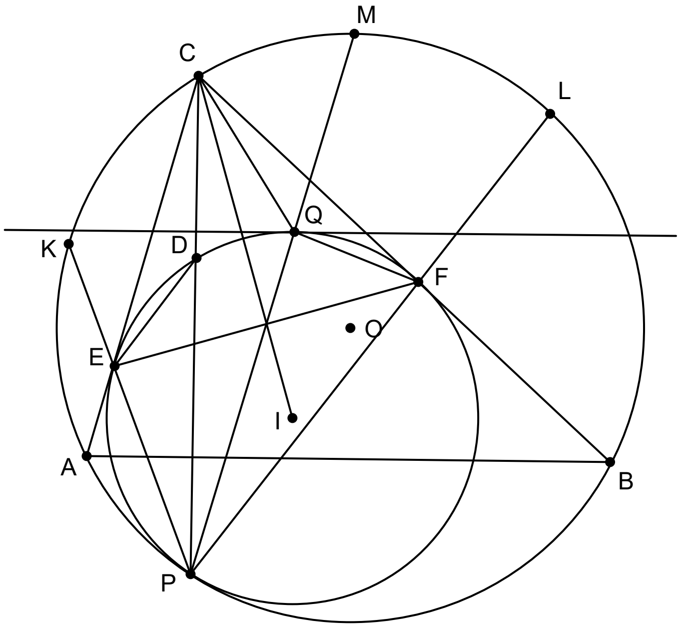
$\Leftrightarrow \overset{\frown}{LC}+\overset{\frown}{LM}=\overset{\frown}{MK}+\overset{\frown}{CK}$

$\Leftrightarrow 2\overset{\frown}{LM}+\overset{\frown}{MC}=\overset{\frown}{MC}+2\overset{\frown}{CK}$

$\Leftrightarrow \overset{\frown}{LM}=\overset{\frown}{CK}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{FQ}$ (tính chất phép vị tự).

$\Rightarrow \widehat{DEC}=\widehat{QFC}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn hai cung bằng nhau) và $DE=QF$.



Lại có $CE = CF$ theo tính chất của hai tiếp tuyến kẻ từ một điểm.

Suy ra $\Delta CED = \Delta CFQ$, dẫn đến $\widehat{ECD} = \widehat{FCQ}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh

Câu 19. **[THI HSG VĨNH PHÚC NĂM 2008-2009]**

Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi E là giao điểm của AC với BD. CMR nếu ba trung điểm của AD, BC, OE thẳng hàng thì $AB = CD$ hoặc $\widehat{AEB} = 90^0$

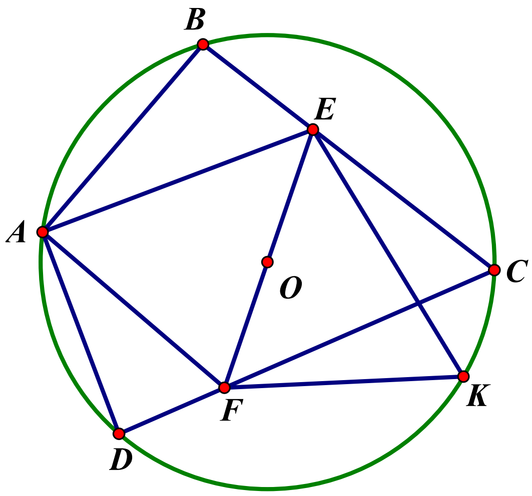
PHẦN HÌNH HỌC PHẲNG

LOẠI 1: Chứng minh tính chất: thẳng hàng, đồng quy, song song, vuông góc.

Câu 20. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH TỈNH YÊN BÁI TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ X]**

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Đường vuông góc với AD tại A cắt BC ở E. Đường vuông góc với AB tại A cắt CD ở F. Chứng minh rằng ba điểm E, O, F thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



Ta có $\widehat{EAF} = \widehat{ECF}$ cùng bù với góc $\widehat{BAD}$, các đỉnh A, C lại thuộc hai phía của đường thẳng EF. Lấy K là điểm đối xứng của A qua EF.

Ta có $\widehat{EKF} = \widehat{EAF}$ (do t/c đối xứng) suy ra $\widehat{EKF} = \widehat{ECF}$ suy ra tứ giác ECKF nội tiếp

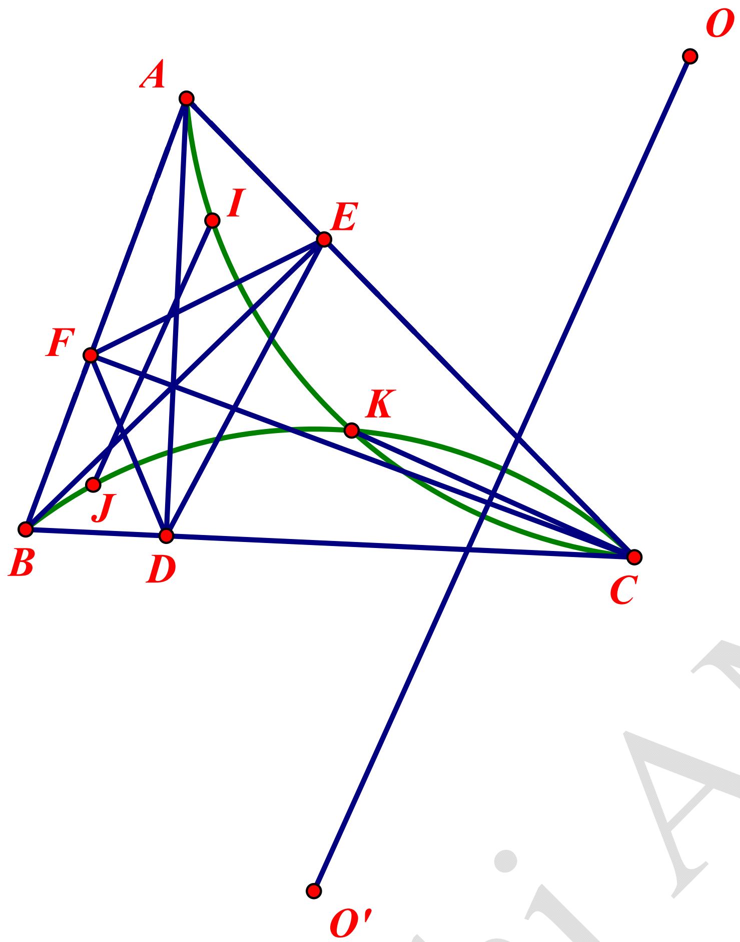
Suy ra $\widehat{FCK} = \widehat{FEK}$ mà $\widehat{FEK} = \widehat{AEF}$ (t/c đối xứng).

mặt khác $\widehat{AEF} = \widehat{DAK}$ (cùng phụ $\widehat{EAK}$), suy ra $\widehat{DCK} = \widehat{DAK}$ mà hai góc này ở hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn cạnh DK. suy ra tứ giác ADKC nội tiếp suy ra K thuộc (O).

Vậy EF là đường trung trực của dây AK suy ra E, O, F thẳng hàng.

Câu 21. [TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN LƯƠNG VĂN TỤY NINH BÌNH]
Cho tam giác ABC nhọn. Gọi D, E, F tương ứng là chân ba đường cao từ A, B, C của tam giác. I và J tương ứng là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AEF và BF**D.** O và O’ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AIC và BJ**D.** Chứng minh: OO’ // IJ.

Hướng dẫn giải



Gọi K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CDE.

Ta có: $\Delta BDF \backsim \Delta EDC \Rightarrow \Delta JDF \backsim \Delta KDC$ (vì J, K là tâm đường tròn nội tiếp hai tam giác)

Suy ra $\Delta DJK \backsim \Delta DFC$.

Ta có:

$$\widehat{JBD}+\widehat{JKC}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}+\widehat{JKD}+\widehat{DKC}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}+\widehat{DCF}+180^0-\widehat{KCD}-\widehat{KDC}=$$

$$=\frac{1}{2}\widehat{ABC}+90^0-\widehat{DBA}+180^0-\frac{1}{2}\widehat{ACB}-\frac{1}{2}\widehat{EDC}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}+\widehat{DAB}+180^0-\frac{1}{2}\widehat{ACB}-\frac{1}{2}\widehat{BAC}=180^0.$$

Suy ra tứ giác BJKC nội tiếp đường tròn. (1)

Tương tự AIKC nội tiếp đường tròn. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OO' \perp CK$. (3)

Ta có:

$$\widehat{IJK}=360^0-\widehat{IJB}-\widehat{BJK}=360^0-(180^0-\frac{1}{2}\widehat{BAC})-(180^0-\frac{1}{2}\widehat{BCA})=90^0-\frac{1}{2}\widehat{ABC}.$$

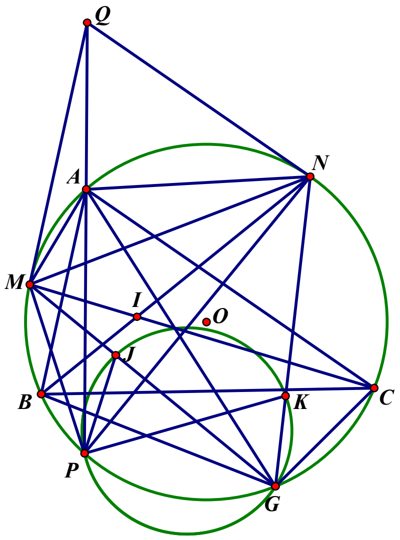
Suy ra $IJ \perp CK$.   (4)

Từ (3) và (4) ta có OO' // IJ.

Câu 22. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN TUYÊN QUANG** TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XII]

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại N khác B, đường thẳng CI cắt đường tròn (O) tại M khác **C.** Trên cung BC không chứa A của đường tròn (O) lấy điểm G tùy ý (G khác B, C). Gọi J, K lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp các tam giác ABG, ACG. Đường tròn ngoại tiếp tam giác GJK cắt đường tròn (O) tại điểm P khác G. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M, N cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng ba điểm P, A, Q thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



Ta có G, J, M và G, K, N thẳng hàng. Hai tam giác PJM và PKN có

$$\widehat{PMJ} = \widehat{PNK}\ ;\ \widehat{PJM} = 180^0 - \widehat{PJG} = 180^0 - \widehat{PKG} = \widehat{PKN}.$$

Suy ra hai tam giác PJM và PKN đồng dạng. Do đó: $\dfrac{PM}{PN} = \dfrac{MJ}{NK}$.

Vì J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABG và M là điểm chính giữa cung AB của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABG nên MJ = M**A.**

Tương tự NK = N**A.** Suy ra $\dfrac{PM}{PN} = \dfrac{AM}{AN}$. Do đó PMAN là tứ giác điều hòa.

Vì PMAN là tứ giác điều hòa nội tiếp đường tròn (O) nên các tiếp tuyến của (O) tại M, N cắt nhau tại điểm Q trên PA hay ba điểm P, A, Q thẳng hàng.

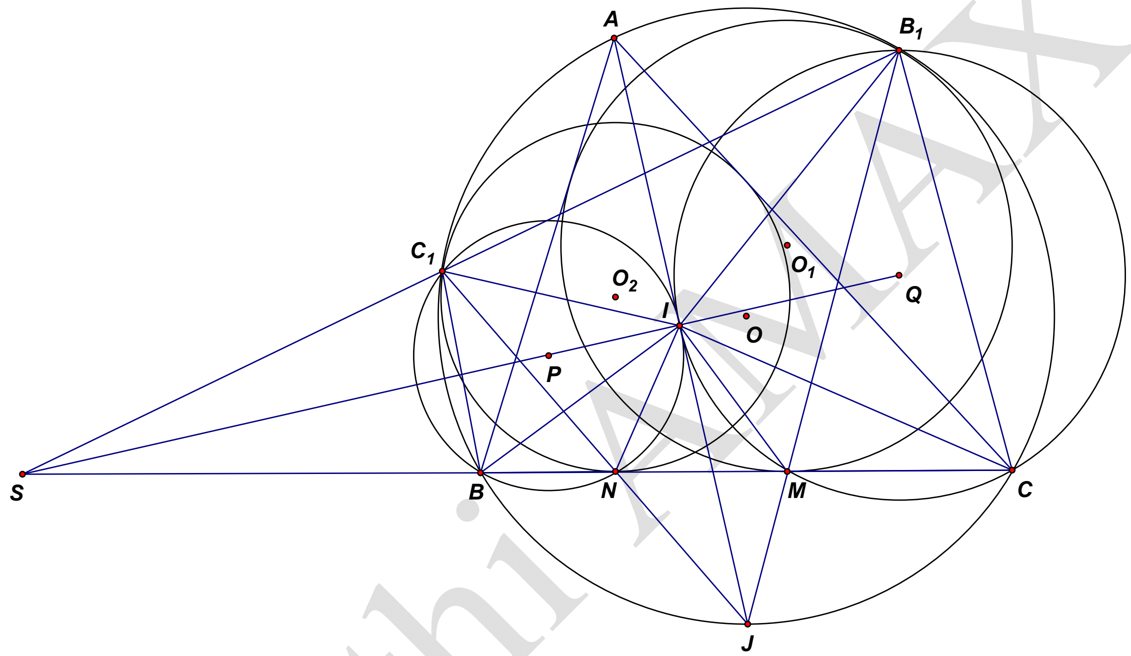
Câu 23. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG]**

Cho tam giác ABC không cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Đường tròn (O_1) tiếp xúc với các cạnh BA, BC và tiếp xúc trong với (O) tại B_1. Đường tròn (O_2) tiếp xúc với các cạnh CA, BC và tiếp xúc trong với (O) tại C_1.

Hướng dẫn giải

1. Gọi M, N lần lượt là tiếp điểm của BC với các đường tròn $(O_1), (O_2)$ và J là giao điểm của B_1M, C_1N. Chứng minh rằng AJ là tiếp tuyến của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác B_1CM, C_1BN.

2. Gọi S là giao điểm của BC và B_1C_1. Chứng minh rằng $\widehat{AIS} = 90^0$.



1. Gọi J_1, J_2 lần lượt là giao điểm thứ 2 của B_1M, C_1N với (O)

Ta có ΔO_1B_1M, ΔOB_1J_1 là các tam giác cân tại O_1, O, mà O, O_1, B_1 thẳng hàng nên suy ra $OJ_1 \parallel O_1M$. Do đó $OJ_1 \perp BC$

Chứng minh tương tự ta có $OJ_2 \perp BC$

Mà J_1, J_2 cùng phía đối với BC nên suy ra $J_1 \equiv J_2 \equiv J$. Suy ra J là điểm chính giữa của cung BC nên A, I, J thẳng hàng và $JB = JC = JI$.

Ta có $\Delta IBN \backsim \Delta ABI$ nên $\widehat{BIN} = \widehat{BAI} = \widehat{BC_1N}$ suy ra tứ giác BC_1IN nội tiếp

Chứng minh tương tự ta có tứ giác CB_1IM nội tiếp.

Mặt khác ta có $\overline{JM}.\overline{JB_1} = JB^2 = JC^2 = \overline{JN}.\overline{JC_1} = JI^2$

Vậy AJ là tiếp tuyến của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác B_1CM, C_1BN.

2. Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác B_1CM, C_1BN thì $PQ \perp AJ$ tại I.

Vì $\overline{JM}.\overline{JB_1} = JB^2 = JC^2 = \overline{JN}.\overline{JC_1} = JI^2$ nên tứ giác MNC_1B_1 nội tiếp.

Gọi $S_1 = PQ \cap BC$. Do ΔPBN và ΔQCM là các tam giác cân có các góc ở đỉnh bằng $2\angle BAJ$ nên chúng đồng dạng. Suy ra $\angle PBN = \angle PNB = \angle QCM = \angle QMC$. Do đó $PB \| QN,\, PN \| QC$

$\Rightarrow \dfrac{S_1P}{S_1Q} = \dfrac{S_1B}{S_1M} = \dfrac{S_1N}{S_1C} \Rightarrow S_1B.S_1C = S_1M.S_1N$ do đó S_1 thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn $(MNC_1B_1), (ABC) \Rightarrow S_1 \in B_1C_1$ hay $PQ,\, B_1C_1, BC$ đồng quy tại S_1 $S_1 \equiv S$.

Vậy $\angle AIS = 90^0$

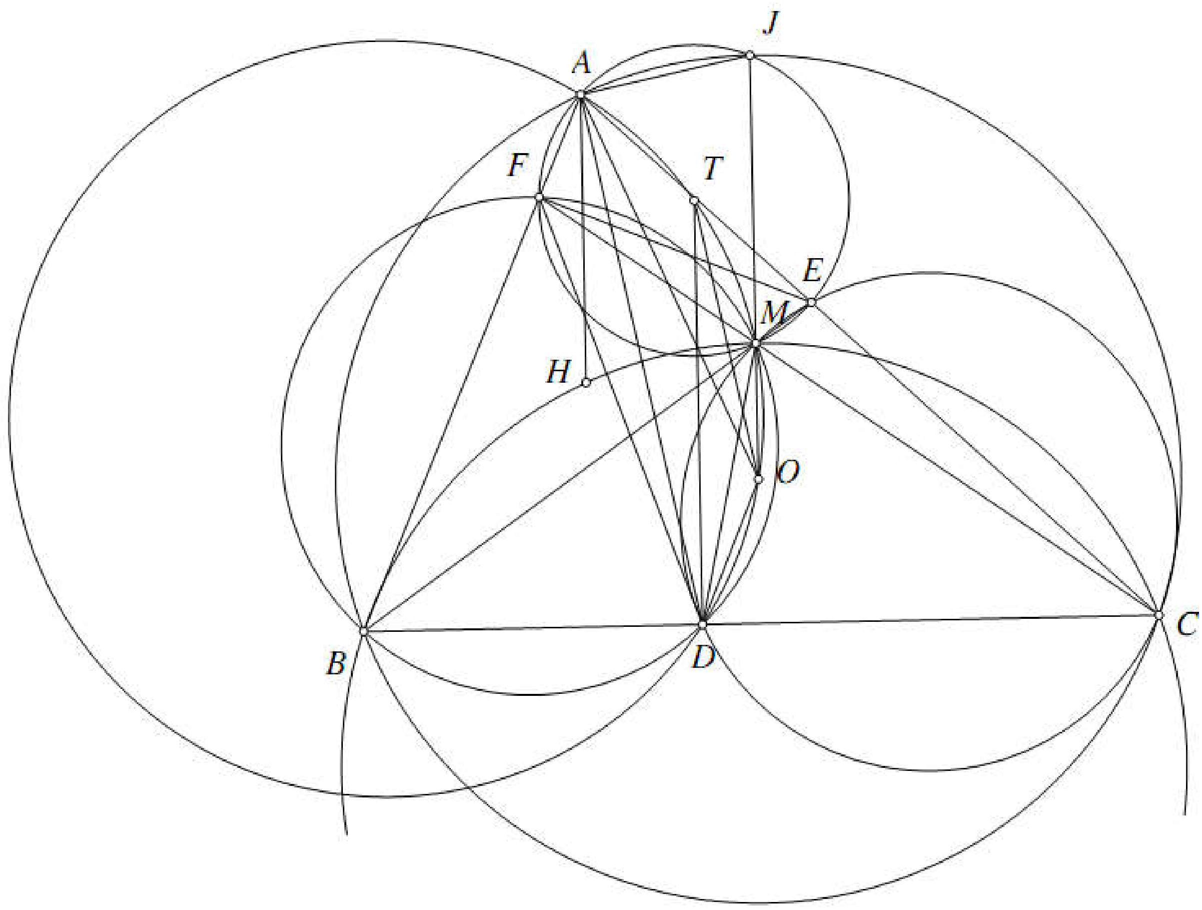
Câu 24. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÀO CAI TỈNH LÀO CAI TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XII]**

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Trực tâm tam giác ABC là H. Gọi M là điểm chính giữa cung BHC của đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC. BM giao AC tại E, CM giao AB tại F. Kẻ phân giác trong AD của góc $\widehat{BAC}$. Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

a) Chứng minh $TD \perp BC$

b) Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF bằng OD.

Hướng dẫn giải



a) Ta có $\widehat{FAD} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{MCB}$ nên tứ giác $FACD$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{DFC} = \widehat{DAC} = \widehat{MBC}$, ta thhu được tứ giác $FMDB$ nội tiếp, tương tự tứ giác $MECD$ nội tiếp.

Dễ có $M \in (AEF)$ (đường tròn qua 3 điểm A, E, F), gọi I là tâm của (AEF). Ta có:

$$TB^2 - TC^2 = \wp_{B/(T)} - \wp_{C/(T)} = BM.BE - CM.CF = BD.BC - CD.CB = BC(BD - CD)$$
$$= (BD + CD)(BD - CD) = BD^2 - CD^2$$

Suy ra $TD \perp BC$.

b) Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = \widehat{MDC}$ nên DA và DM đối xứng với nhau qua DT.

Do $BM = CM$ và $\widehat{BFM} + \widehat{CEM} = 180^0$ nên $R_{(BMF)} = R_{(BMF)}$. Suy ra $BF = CE$.

Ta có (AEF) giao (O) tại J là tâm của phép vị tự quay biến BF thành CE nên $JB = JC$. Do $OT \perp AJ$ và $AJ \perp AD$ nên $OT \parallel AD$.

Ta thu được $\widehat{TOM} = \widehat{ADT} = \widehat{TDM}$, suy ra tứ giác $TMOD$ nội tiếp. Mà $OM \parallel TD$ nên $TMOD$ là hình thang cân. Vậy $TM = OD$, hay $R_{(AEF)} = OD$.

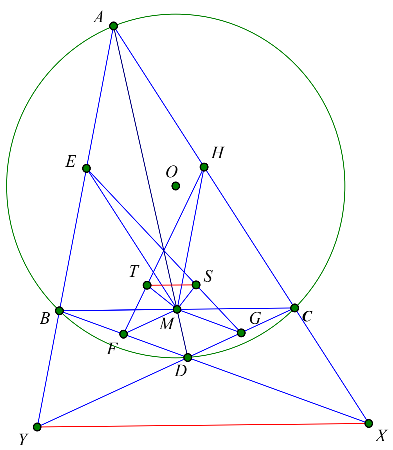
Câu 25. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN** CHU VĂN AN **TỈNH LẠNG SƠN TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XII]**

Cho tam giác *ABD* nội tiếp đường tròn (*O*). Gọi *M* là trung điểm của *BC* và *AM* cắt (*O*) tại ***D.*** Gọi *E, F, G, H* là trung điểm của *AB, BD, DC, CA.* Phân giác trong các góc $\widehat{EMG}; \widehat{FMH}$ cắt *EG, FH* tương ứng tại *S, T*. Gọi $X = AC \cap BD; Y = AB \cap CD$.

a. Chứng minh rằng $ST \parallel XY$.

b. $P = MS \cap FH; R = MT \cap EG$. Chứng minh rằng *AD* đi qua trung điểm của *PR*.

Hướng dẫn giải



a)

Ta có $\Delta ABM \backsim CDM; \Delta AMC \backsim \Delta BMD$ nên

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MD} = \frac{AC}{BD} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AC}{BD}.$$

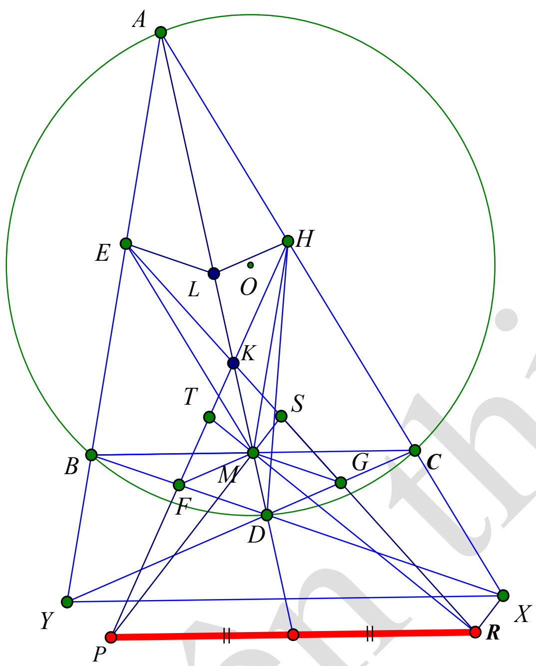
Hơn nữa, ME, MG, MF, MH là các đường trung tuyến tương ứng nên suy ra $\frac{ME}{MG}=\frac{AB}{CD}=\frac{AC}{BD}=\frac{MH}{MF}$. Vì MS, MT là phân giác nên $\frac{SE}{SG}=\frac{ME}{MG}=\frac{MH}{MF}=\frac{TH}{TF}$.

Chú ý $EFGH$ là hình bình hành nên $EH \parallel FG$, theo định lí ***Thales*** thì suy ra $ST \parallel EH \parallel FG$, suy ra $ST \parallel BD$ (1).

Mặt khác, áp dụng định lí ***Ceva*** cho tam giác ABC với các đoạn AM, CY, BX thì ta được $\frac{MB}{MC}.\frac{XC}{XA}.\frac{YA}{YB}=1 \Rightarrow \frac{XC}{XA}=\frac{YB}{YA}$ nên suy ra $XY \parallel BD$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $ST \parallel XY$.

b)



Gọi L là trung điểm của A**D.** Thế thì các tứ giác $LHMF$, $LEMG$, $EFGH$ là hình bình hành nên suy ra EG, FH, LM đồng quy tại trung điểm K mỗi đoạn thẳng.

Mặt khác, dễ thấy $\widehat{BMF}=\widehat{AMH}; \widehat{TMF}=\widehat{TMH}$ suy ra $\widehat{TMB}=\widehat{TMA}$, tức là MT là phân giác góc $\widehat{AMB}$.

Tương tự thì MS là phân giác góc $\widehat{AMC}$ nên suy ra $MT \perp MS$. Do đó MR là phân giác ngoài của $\widehat{EMG}$.

Tương tự thì MP là phân giác ngoài góc $\widehat{FMH}$. Suy ra $\frac{PH}{PF}=\frac{TH}{TF}=\frac{SE}{SG}=\frac{RE}{RG} \Rightarrow PR \parallel ST \parallel EH$. Dễ thấy AK đi qua trung điểm của EH nên cũng đi qua trung điểm của PR.

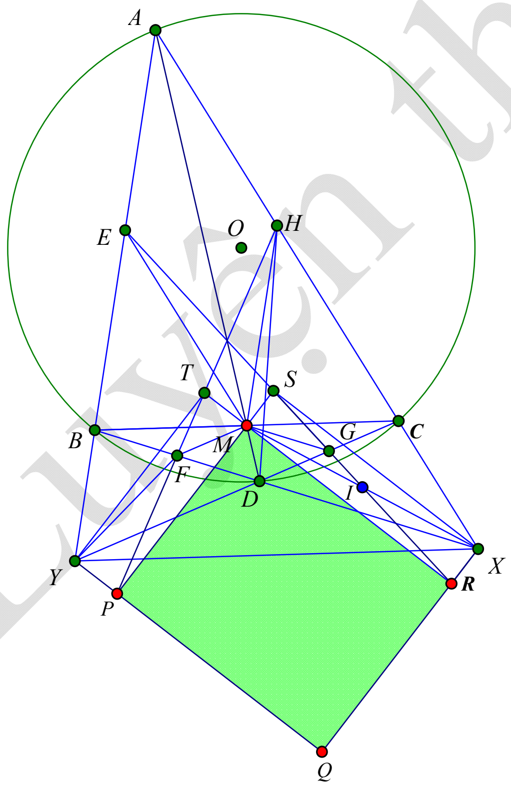
Nhận xét và bình luận và phát triển bài toán:

+ Ý a) là kết quả của các tỉ số đồng dạng kết hợp với đường phân giác. Cùng với việc chú ý tới định lí Thales và hình bình hành *EFGH*.

+ Ý b) là một hệ quả kéo theo với việc nhận thấy $MT \perp MS$ từ đó suy ra *MS, MR* là phân giác trong và ngoài của $\widehat{EMG}$.

+ Ta có thể thu được kết quả rất thú vị sau: Gọi $P = MS \cap FH; R = MT \cap EG; Q = YP \cap XR$. Khi đó *MPQR* là hình chữ nhật.

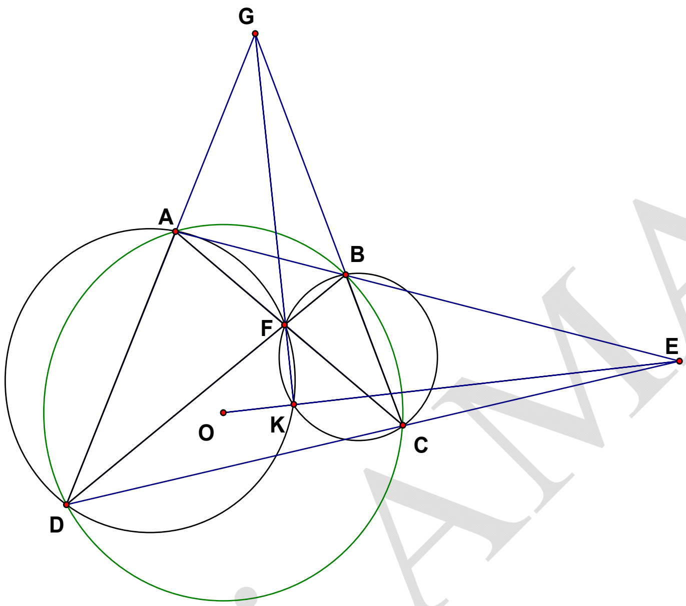
Chứng minh: Dễ thấy $\Delta XCD \sim \Delta XBA$ với *XE, XG* là trung tuyến tương ứng, do đó $\frac{XE}{XG} = \frac{AB}{CD} = \frac{ME}{MG} = k$ nên *X, M* nằm trên đường tròn ***Apollonius*** dựng trên *E, G* với tỉ số k. Do đó, $\frac{ME}{MG} = \frac{SE}{SG} = \frac{XE}{XG} = k$ nên *M, X, S* cùng nằm trên đường tròn *Apollonius* đó. Hơn nữa, dễ thấy $\widehat{BMF} = \widehat{AMH}; \widehat{TMF} = \widehat{TMH}$ suy ra $\widehat{TMB} = \widehat{TMA}$, tức là *MT* là phân giác góc $\widehat{AMB}$. Tương tự thì *MS* là phân giác góc $\widehat{AMC}$ nên suy ra $MT \perp MS$ (3). Do đó, *MR* là phân giác ngoài của $\widehat{EMG}$ và *MS* là phân giác trong, nên đường tròn đường kính *MS* là đường tròn *Apollonius* dựng trên *E, G*. Do đó, tứ giác *MSXR* nội tiếp. Gọi *I* là trùng điểm của *MX. X*ét tứ giác toàn phần *XDMCAB*, thì *E, G, I* thẳng hàng (nằm trên ***đường thẳng Gauss***). Do đó, *SR* là đường kính đường tròn *Apollonius* đó. Vậy, $\widehat{MRX} = 90^0$ (3). Tương tự thì $\widehat{MPY} = 90^0$ (5). Từ (3), (4), (5) suy ra *MPQR* là hình chữ nhật.



Câu 26. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM QUẢNG NAM NĂM 2014 KỲ THI OLYMPIC TOÁN KHU VỰC DUYÊN HẢI & ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM 2014]**

Cho tứ giác ABCD nội tiếp có các cặp cạnh đối không song song. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại điểm E và các đường chéo AC và BD cắt nhau tại F. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác AFD và BFC cắt nhau tại điểm thứ hai K. Chứng minh rằng hai đường thẳng EK và FK vuông góc.

Hướng dẫn giải



▪ Gọi G là giao điểm của AD và BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABC**D.**

Ta dùng kí hiệu (ABC), (ABCD) tương ứng để chỉ đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, tứ giác ABC**D.**

Ta có AD, BC, FK lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (ABCD) và (ADF), (ABCD) và (BCF), (ADF) và (BCF) nên AD, BC, FK đồng quy tại G hay F, K, G thẳng hàng.

▪ Không mất tổng quát ta giả sử F nằm giữa K và G.

Ta có $\widehat{DKC} = (180^0 - \widehat{DKF}) + (180^0 - \widehat{CKF}) = \widehat{DAF} + \widehat{CBF} = \frac{1}{2}\widehat{DOC} + \frac{1}{2}\widehat{DOC} = \widehat{DOC}$

(ta có thể dùng góc định hướng cho mọi trường hợp).

Suy ra các điểm D, C, K, O cùng thuộc một đường tròn ta gọi là (C_1).

▪ Tương tự, các điểm A, B, K, O cùng thuộc một đường tròn ta gọi là (C_2).

Ta có AB, CD, OK lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (ABCD) và (C_2), (ABCD) và (C_1), (C_1) và (C_2) nên AB, CD, OK đồng quy tại E hay O, K, E thẳng hàng.

▪ Xét cực và đối cực đối với đường tròn (O), ta có GF là đối cực của E

nên GF vuông góc với OE

Mà G, K, F thẳng hàng; O, K, E thẳng hàng nên EK và FK vuông góc (điều phải chứng minh).

Câu 27. **[Trường THPT Chuyên Hưng Yên ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 11VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ]**

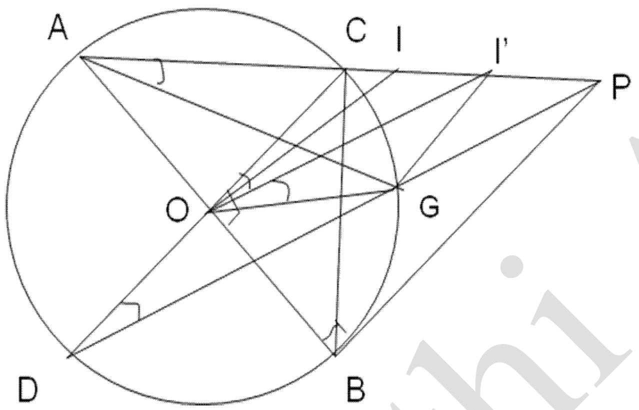
Cho đường tròn (τ) tâm O và AB, CD là hai đường kính của đường tròn đó. Tiếp tuyến với đường tròn (τ) tại B cắt AC tại $P.$ Gọi G là giao điểm thứ hai của đường thẳng DP với đường tròn (τ). Gọi I là trung điểm của $AP.$ Chứng minh rằng

a) Các điểm O, B, C, I cùng nằm trên một đường tròn

b) Ba đường thẳng AG, BC, OP đồng qui.

Hướng dẫn giải

a). Ta có $OI // BP$ nên $\angle IOB = \angle OBP = 90^0$. Mà $\angle BCI = 90^0$ suy ra 4 điểm O, B, C, I nằm trên đường tròn (ω) đường kính BI.



b) Gọi I' là trung điểm của PC. Ta có $OI' // DP$ nên $\angle COI' = \angle CDG$ (1).

Mà $\angle CDG = \angle CAG$ (2). Tam giác CGP vuông tại G có $GI' = CI' = \frac{1}{2}CP$ suy ra

$\Delta OCI' = \Delta OGI'$ (c.c.c), do đó $\angle COI' = \angle I'OG$ (3).

Từ (1),(2),(3) ta có $\angle CAG = \angle I'OG$ suy ra 4 điểm I', A, O, G nằm trên một đường tròn (ω').

Ta có $\wp_{O/(\omega)} = \wp_{O/(\omega')} = 0$

Hơn nữa $\wp_{P/(\omega)} = \overline{PI}.\overline{PC} = \frac{1}{2}\overline{PA}.2\overline{PI'} = \overline{PA}.\overline{PI'} = \wp_{P/(\omega')}$ suy ra OP là trục đẳng phương của hai đường tròn (ω) và (ω').

AG là trục đẳng phương của hai đường tròn (τ) và (ω'). BC là trục đẳng phương của hai đường tròn (τ) và (ω).

Vậy ba đường thẳng AG, BC, OP đồng qui tại S là tâm đẳng phương của ba đường tròn (τ), (ω) và (ω').