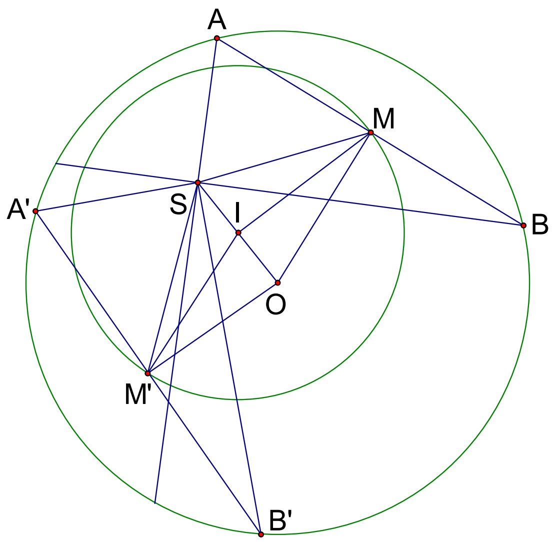


Gọi I là trung điểm SO, đặt $SO = a$ (không đổi)

Ta có $MI^2 = \dfrac{MS^2 + MO^2}{2} - \dfrac{SO^2}{4} = \dfrac{MS^2 + MO^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$

Mặt khác $P_{M/(O)} = MA.MB = R^2 - MO^2$ mà $MA = MB = SM$

nên $MS^2 = R^2 - MO^2 \Leftrightarrow MS^2 + MO^2 = R^2$

$\Rightarrow MI^2 = \dfrac{R^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$ không đổi.

Vì I cố định nên M thuộc đường tròn tâm I bán kính $MI = \dfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 - a^2}$

Đảo lại, trên đường tròn (I) lấy M' tuỳ ý $\Rightarrow M'I = \dfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 - a^2}$. Lấy M' làm tâm quay một cung tròn bán kính M'S cắt (O) tại A'.

Ta có M'A' = M'S. Kéo dài M'A' cắt (O) tại B'.

Xét tam giác M'SO có: $M'S^2 + M'O^2 = \dfrac{1}{2}\left(4M'I^2 + SO^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(2R^2 - a^2 + a^2\right) = R^2$

$$\Leftrightarrow M'A'^2 + M'O^2 = OA'^2$$

Hay tam giác OM'A' vuông tại M' suy ra M' là trung điểm A'B'

nghĩa là M'A'=M'B'=M'S hay tam giác SA'B' vuông tại S.

Câu 15. [Ngân hàng đề Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi, tỉnh Hải Dương - ĐỀ ĐỀ NGHỊ THI CHỌN HSG VÙNG DUYÊN HẢI BẮC BỘ LỚP 11 N¨m häc …]

()

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O và có trực tâm H. P là một điểm bất kì trên (O). Gọi Q, R, S là các điểm đối xứng với P lần lượt qua trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng bốn điểm H, Q, R, S nằm trên một đường tròn.

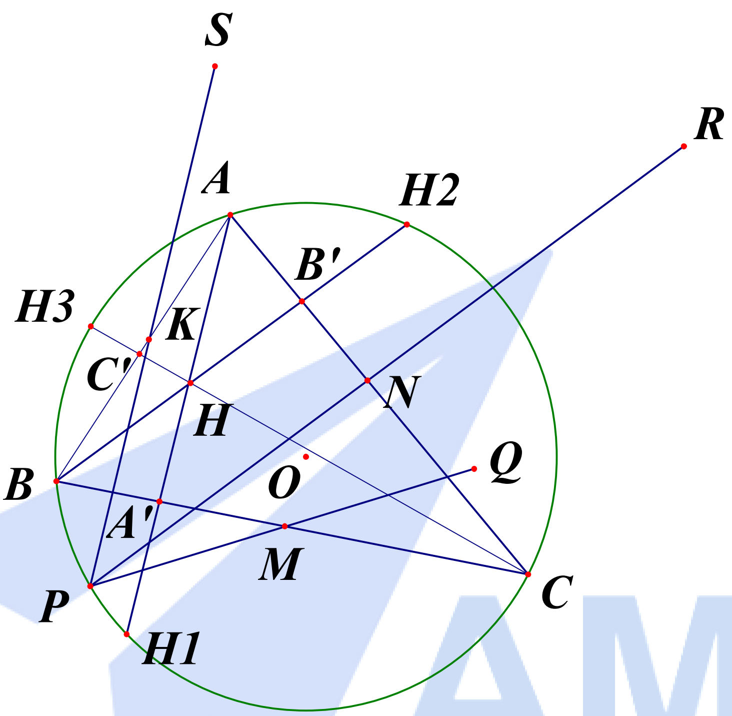
Hướng dẫn giải

- Gọi M, N, K, I lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB, PH. Xét phép vị tự

V_P^2: M $\mapsto$ Q, N $\mapsto$ R, K $\mapsto$ S, I $\mapsto$ H

Suy ra phép vị tự này biến đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP hay đường tròn Ơle của tam giác ABC thành đường tròn ngoại tiếp tam giác QRS.
Từ đó để chứng minh H thuộc đường tròn (QRS) ta chứng minh I thuộc đường tròn Ơle của tam giác ABC.

- Xét phép vị tự $V_H^2 : A' \mapsto H_1,\ \mathrm{B}' \mapsto \mathrm{H}_2,\ \mathrm{C}' \mapsto \mathrm{H}_3$, suy ra phép vị tự này biến đường tròn Ơle của tam giác ABC thành đường tròn (O), mà $V_H^2 : I \mapsto P;\quad \mathrm{P} \in (\mathrm{O}) \Rightarrow \mathrm{I}$ nằm trên đường tròn Ơle của tam giác ABC (đpcm).



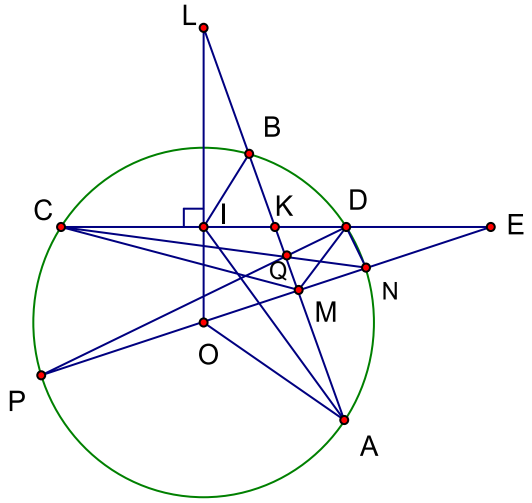
Câu 16. [TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM QUẢNG NAM
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI KHU VỰC DUYÊN HẢI & ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ
NĂM 2013 ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN: TOÁN, LỚP 11]

Cho đường tròn (O;R) và một điểm I cố định ở trong đường tròn (I$\neq$O), đường thẳng qua I vuông góc với OI cắt đường tròn tại C và D; A là một điểm nằm trên đường tròn, tia đối xứng với tia IA qua đường thẳng CD cắt đường tròn tại B. Gọi M là trung điểm của AB.

a) Chứng minh đường thẳng AB đi qua một điểm cố định L khi A thay đổi trên đường tròn (O;R).

b) Gọi N, P là giao điểm của đường thẳng OM với đường tròn (O). Đường thẳng CN và DP cắt nhau ở Q. Chứng minh rằng các điểm Q, N là những tâm của đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của tam giác CMD.

Hướng dẫn giải



Gọi L là giao điểm của AB và OI; K là giao điểm của AB và CD.

Ta có IE $\perp$OL và IE là phân giác của góc $\widehat{AIB}$, suy ra: (ABKL)=-1

Suy ra: $MA^2 = MB^2 = \overline{MK}.\overline{ML}$ (M là trung điểm của AB, New-tơn)

$= (\overline{ML} + \overline{LK}).\overline{ML}$

$= ML^2 - \overline{LK}.\overline{LM}$

Mà ta lại có: $P_L/(IOMK) = \overline{LI}.\overline{LO} = \overline{LK}.\overline{LM}$

Do đó: $MA^2 = ML^2 - \overline{LK}.\overline{LM} = ML^2 - \overline{LI}.\overline{LO}$

Suy ra: $ML^2 - MA^2 = \overline{LI}.\overline{LO} \Leftrightarrow LO^2 - OM^2 - MA^2 = \overline{LI}.\overline{LO}$

Suy ra: $OL^2 - OA^2 = \overline{LI}.\overline{LO}$

$= (\overline{LO} + \overline{OI})\overline{LO}$

$= LO^2 - \overline{OI}.\overline{OL}$

Suy ra $OA^2 = \overline{OI}.\overline{OL}$. Suy ra $\overline{OL} = \dfrac{R^2}{\overline{OI}}$. Vậy L cố định.

Trước hết ta chứng minh MK là phân giác của góc CMD.
Gọi E là giao điểm của OM với CD
Ta có: ΔOIE~ΔOML

Suy ra: $\overline{OM}.\overline{OE} = \overline{OI}.\overline{OL} = OA^2 = R^2$

Suy ra: $OE^2 - \overline{OM}.\overline{OE} = OE^2 - R^2$

Suy ra: $\overline{OE}.\overline{ME} = IE^2 + OI^2 - R^2 = IE^2 - (R^2 - OI^2) = IE^2 - IC^2$

Ta có: $P_E/(OIRM) = \overline{KE}.\overline{IE} = \overline{OE}.\overline{ME}$

Do đó ta suy ra: $\overline{KE}.\overline{IE} = IE^2 - IC^2$

Suy ra: $IC^2 = IE^2 - \overline{IE}.\overline{KE} = \overline{IE}(\overline{IE} - \overline{KE}) = \overline{IE}.\overline{IK}$

Theo hệ thức Newton, ta suy ra: (CDKE)=-1 (1)

Mà MK $\perp$ME nên MK là phân giác trong của góc $\widehat{CMD}$ (2)

Theo chứng minh trên ta có: $\overline{OM}.\overline{OE} = R^2 = ON^2$

Suy ra: (PNME)= -1

Suy ra: (NPME)= -1 (3)

Từ (1) và (3) ta suy ra: CN, PD, KM đồng quy tại Q.

Mà góc $\widehat{QDN} = 90^0$ nên QMND là tứ giác nội tiếp

Suy ra: $\widehat{QDM} = \widehat{QNM} = \widehat{CDP}$

Suy ra DP là phân giác trong của góc $\widehat{CDM}$. (4)
Từ (2) và (4), ta có Q là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CMD

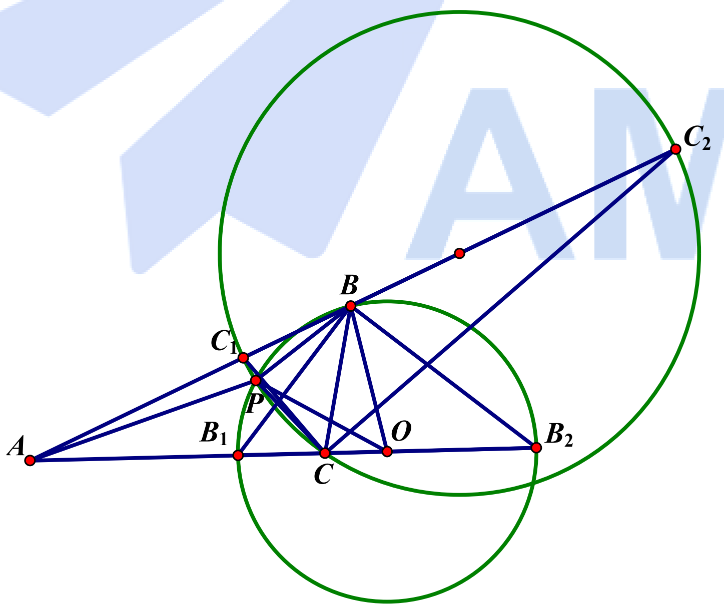
Ta lại có DN⊥DP suy ra DN là phân giác ngoài của góc $\widehat{CDM}$. Suy ra N là tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác CMD.

Vậy Q, N lần lượt là tâm của đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của tam giác CMD.

Câu 17. [TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM TỈNH QUẢNG NAM NĂM 2015]

Cho $\triangle ABC$ nhọn có $\widehat{BAC} = 30^0$. Hai đường phân giác trong và ngoài của $\widehat{ABC}$ lần lượt cắt đường thẳng AC tại B_1 và B_2 ; hai đường phân giác trong và ngoài của $\widehat{ACB}$ lần lượt cắt đường thẳng AB tại C_1, C_2 . Giả sử hai đường tròn đường kính B_1B_2 và C_1C_2 gặp nhau tại một điểm P nằm bên trong $\triangle ABC$. Chứng minh rằng $\widehat{BPC} = 90^0$.

Hướng dẫn giải



Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng B_1B_2.

Khi đó hai điểm B và P nằm trên đường tròn tâm O bán kính OB_1.

Vì $\widehat{OBC} = \widehat{OBB_1} - \widehat{CBB_1} = \widehat{OB_1B} - \widehat{B_1BA} = \widehat{BAC}$ nên $\Delta OCB \backsim \Delta OBA$,

Suy ra $OC.OA = OB^2 = OP^2$.

Từ đó $\Delta OCP \backsim \Delta OPA \Rightarrow \widehat{OPC} = \widehat{PAC}$.

Do đó

$$\widehat{PBC} - \widehat{PBA} = \left(\widehat{B_1BC} + \widehat{PBB_1}\right) - \left(\widehat{ABB_1} - \widehat{PBB_1}\right) = 2\widehat{PBB_1} = \widehat{POB_1} = \widehat{PCA} - \widehat{OPC}$$

Như vậy $\widehat{PBC}-\widehat{PBA}=\widehat{PCA}-\widehat{PAC}$ suy ra $\widehat{PAC}+\widehat{PBC}=\widehat{PBA}+\widehat{PCA}$ (1)

Tương tự ta cũng có $\widehat{PAB}+\widehat{PCB}=\widehat{PBA}+\widehat{PCA}$. (2)

Ngoài ra $\left(\widehat{PAC}+\widehat{PBC}\right)+\left(\widehat{PAB}+\widehat{PCB}\right)+\left(\widehat{PBA}+\widehat{PCA}\right)=180^0$ (3)

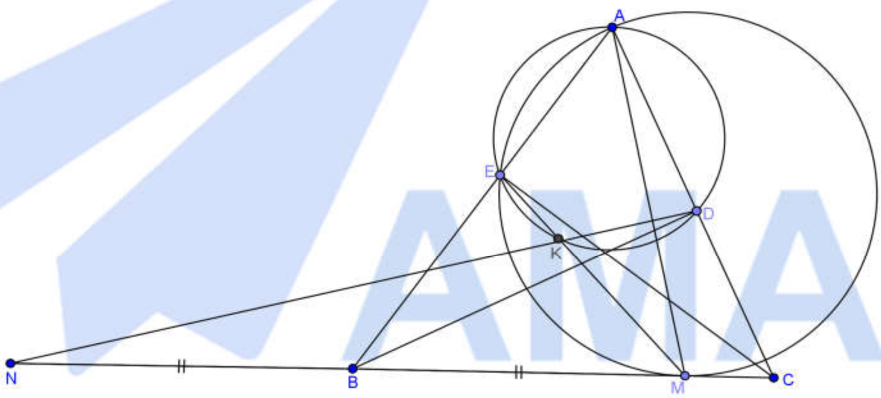
Từ (1), (2) và (3) ta đi đến $\widehat{PBA}+\widehat{PCA}=60^0$.

Suy ra $\widehat{BPC}=\left(\widehat{PBA}+\widehat{PAB}\right)+\left(\widehat{PCA}+\widehat{PAC}\right)=\widehat{BAC}+\left(\widehat{PBA}+\widehat{PCA}\right)=90^0$.

Câu 18. [TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN TỈNH ĐIỆN BIÊN TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XI LỚP 11]

Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BD, CE. Một đường tròn (O) đi qua hai điểm A và E tiếp xúc với cạnh BC tại điểm M. Đường thẳng ME cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AED tại điểm thứ hai K. Hai đường thẳng DK và BC cắt nhau tại N. Chứng minh rằng đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEN.

Hướng dẫn giải



Ta có $\widehat{NME}=\widehat{EAM}$ (cùng bằng một nửa số đo cung EM);

mà $\widehat{MAC}=\widehat{EAC}-\widehat{EAM}$ nên suy ra

$$\widehat{MAC}=(180^0-\widehat{EKD})-\widehat{NME}=180^0-\widehat{MKN}-\widehat{NMK}=\widehat{MNK}=\widehat{CND}$$

suy ra ΔCAM và ΔCND đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CM}{CD}=\frac{CA}{CN}\Rightarrow CM.CN=CA.CD \text{ (1)}$$

Nhận xét: Trong tam giác nhọn ABC tùy ý ta có: $BC^2=BE.BA+CD.CA$.

Thậy vậy

$$BC^2=BD^2+DC^2=AB^2-AD^2+DC^2$$

$$=BE.AB+AE.AB-AD^2+DC^2$$

$= BE.AB + AD.AC - AD^2 + DC^2$
$= BE.AB + AD.CD + DC^2 = BE.AB + CD.CA$
Kết hợp nhận xét trên với (1) suy ra $CM.CN = BC^2 - BE.BA$.

Lại có $BE.BA = BM^2$ (cùng bằng phương tích của điểm B đối với (O)), nên suy ra:
$CM.CN = BC^2 - BM^2 = (BC + BM)(BC - BM) = (BC + BM)CM$
$\Rightarrow CN = BC + BM \Rightarrow BN = BM$

$\Rightarrow BN^2 = BM^2 = BE.BA$ suy ra đường thẳng BN tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEN tại điểm N. Vậy đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ANE.

Câu 19. [Truêng PT CÊp 2+ 3 T©n S¬n B¾c giang N¨m häc 2008 – 2009]

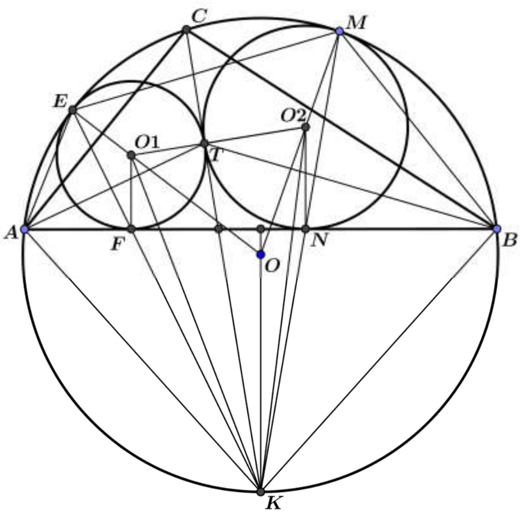
Cho tam gi¸c ABC néi tiÕp ®êng trßn (C). §iÓm A' lµ ¶nh cña A qua phÐp ®èi xøng trôc BC. T×m quü tÝch ®iÓm A' khi A di ®éng trªn (C).

Hướng dẫn giải

Câu 20. [Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng KỲ THI HỌC SINH GIỎI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ
LẦN THỨ IX, NĂM HỌC 2015 – 2016]
Cho đường tròn (O) và dây AB. Các đường tròn (O_1) và (O_2) nằm về một phía đối với đường thẳng AB, tiếp xúc với nhau tại T đồng thời tiếp xúc với AB và tiếp xúc trong với đường tròn (O). Tiếp tuyến chung tại T của các đường tròn (O_1) và (O_2) cắt đường tròn (O) tại C (với C thuộc nửa mặt phẳng với bờ là đường thẳng AB có chứa hai đường tròn (O_1) và (O_2)).

Chứng minh rằng T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn giải



+ Gọi E, F, M, N lần lượt là tiếp điểm (O_1), (O_2) với đường tròn (O) và AB như hình vẽ. Gọi K là giao điểm thứ hai của EF với (O).

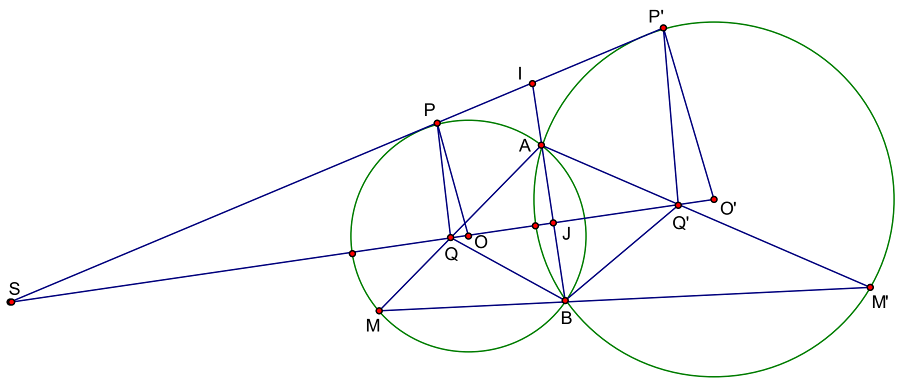
Ta có các điểm *E*, O_1, *O* thẳng hàng; các điểm *M*, O_2, *O* thẳng hàng.

+ Hơn nữa $\widehat{EKO}=\widehat{OEF}=\widehat{O_1FE}\Rightarrow O_1F//OK\Rightarrow OK\perp AB$.
Vậy *K* là điểm chính giữa cung *AB*.
Như vậy *EF* đi qua điểm chính giữa *K* của cung *AB*.
+ Chứng minh tương tự ta cũng có *MN* cũng đi qua *K*.

+ Từ đó $\widehat{MEF}=\widehat{MNB}$ nên tứ giác *EFNM* là tứ giác nội tiếp, do đó
$P_{K/(O_1)}=\overline{KF}.\overline{KE}=\overline{KN}.\overline{KM}=P_{K/(O_2)}$.
Vậy điểm *K* nằm trên trục đẳng phương của (O_1) và (O_2), suy ra ba điểm *C*, *T*, *K* thẳng hàng.
Từ đó điểm *T* nằm trên phân giác của $\widehat{ACB}$ (1)

+ Ta có các cặp tam giác đồng dạng ΔKAF và ΔKEA; ΔKBN và ΔKMB.
Từ đó $KA^2=\overline{KF}.\overline{KE}=KT^2$, suy ra $KA=KT$.
Ta lại có $KA=KB$, suy ra $KA=KB=KT$.
Vì vậy các tam giác *KAT* và *KBT* cùng cân tại *K*.
Do đó $\widehat{CAT}=\widehat{ATK}-\widehat{ACT}=\widehat{TAK}-\widehat{BAK}=\widehat{TAB}$.
Suy ra *AT* là phân giác của $\widehat{CAB}$ (2)
+ Từ (1) và (2) suy ra *T* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC* (đpcm).

Câu 21. [CHUYÊN CAO BẰNG TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG NĂM 2013]
Cho hai đường tròn (O, R) và (O’, R’) với $R\neq R'$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Một đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (O) và (O’) lần lượt tại P và P’. Gọi Q và Q’ lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ P và P’ xuống OO’. Các đường thẳng AQ và AQ’ cắt các đường tròn (O) và (O’) tạiM và M’.Chứng minh rằng MM’ qua B.
Hướng dẫn giải



Gọi S là giao điểm của d và OO’, khi đó S là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn (O) và (O’).
Đặt $k=\dfrac{R'}{R}$, khi đó ta có.
$V(S,k):(O)\to(O'),P\to P',Q\to Q'$
Gọi I, J là giao điểm của AB với PP’ và OO’. Khi đó ta có
$IP^2=\overline{IA}.\overline{IB}=\overline{IP'}^2\Rightarrow IP=IP'$

Mà PQ // IJ // P'Q' nên JQ = JQ'
Suy ra AB là trung trực của QQ'.
Mà OO' là trung trực của AB. Vậy tứ giác AQBQ' là hình thoi
Do đó Q'B //AQ hay Q'M' // QM.
Giả sử V(S, k) biến M thành B' khi đó QM // Q'B'
Mà M thuộc (O) suy ra B' thuộc (O') do đó B' trùng với B.
Vậy V(S, k) biến M thành B.
Tương tự ta có V(S, k) biến M' thành B.
Suy ra M, B, M' thẳng hàng hay MM' qua B

Câu 22. [Trường THPT Chuyên Hạ Long Đề thi Trại Hè Hùng Vương năm 2013]

Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D là trung điểm AC.Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD giao với phân giác góc $\widehat{BAC}$ tại E nằm trong tam giác ABC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE giao với BD tại F (khác B), AF giao với BE tại I. CI giao với BD tại K. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABK.

Hướng dẫn giải

Gọi D' là trung điểm của AB và M là trung điểm cạnh BC.

Ta có D' nằm trên đường tròn ngoại tiếp △BCD. Do tính đối xứng nên suy ra $\widehat{D'E} = \widehat{ED}$ suy ra $\widehat{ABI} = \widehat{D'BE} = \widehat{EBD} = \widehat{IBK}$

suy ra I nằm trên phân giác góc $\widehat{ABK}$ hay BI là tia phân giác góc $\widehat{ABK}$ (1) 1.0 đ

Ta có: $\widehat{DFA} = 180^o - \widehat{BFA} = 180^O - \widehat{BEA} = \widehat{MEB} = \frac{1}{2}\widehat{CEB} = \frac{1}{2}\widehat{CDB}$

=> $\widehat{DFA} = \widehat{DAF}$ suy ra △AFD cân tại D. 1.0 đ

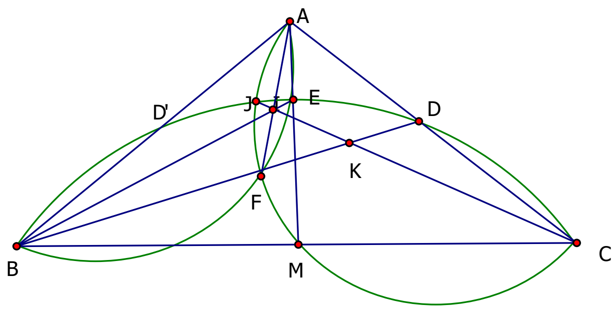
Do IA.IF = IE.IB nên I thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính AC và đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

Từ đó CI đi qua giao điểm thứ hai J của hai đường tròn này. 1,0đ

Ta có $\widehat{DCJ} = \widehat{DJC} = \widehat{DBC}$ nên $DA^2 = DC^2 = DK.DB$

Suy ra $\widehat{DAK} = \widehat{DBA}$ hay $\widehat{FAD} - \widehat{FAK} = \widehat{DFA} - \widehat{BAF}$. Từ đó $\widehat{FAK} = \widehat{BAF}$.

Ta có (đpcm) 1.0đ



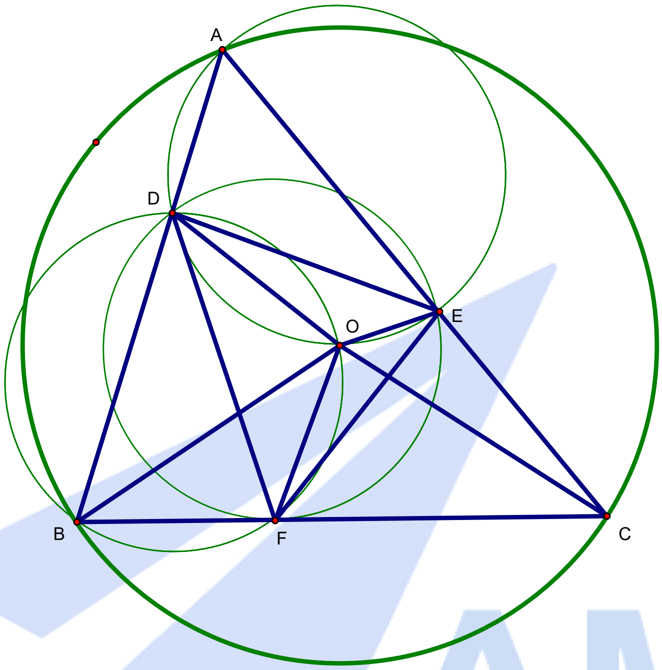
Câu 23. [CHUYÊN HÙNG VƯƠNG ĐỀ THI TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG 2013]

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Các điểm D, E lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\widehat{BOC} = \widehat{ABC}, \widehat{COE} = \widehat{ACB}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BOD cắt cạnh BC tại B và F. Chứng minh rằng:

a) $ADOE$ là một tứ giác nội tiếp.

BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF.

Hướng dẫn giải



Ký hiệu $\widehat{BAC} = \widehat{A}, \widehat{ABC} = \widehat{B}, \widehat{ACB} = \widehat{C}$.

a) Từ giả thiết, ta có

$\widehat{DOE} = 360^0 - \widehat{DOB} - \widehat{BOC} - \widehat{COE} = 360^0 - \widehat{B} - \widehat{C} - 2\widehat{A} = 180^0 - \widehat{A}$

Suy ra $ADOE$ là một tứ giác nội tiếp.

b) Trước hết, ta chứng minh $CEOF$ là một tứ giác nội tiếp.

Thật vậy, $\widehat{EOF} = 360 - \widehat{EOD} - \widehat{DOF} = 360 - (180 - \widehat{A}) - (180 - \widehat{B}) = \widehat{A} + \widehat{B}$.

Từ đó $\widehat{EOF} + \widehat{ECF} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0$ hay $CEOF$ là một tứ giác nội tiếp.

Do $ADOE$ là một tứ giác nội tiếp nên $\widehat{CFE} = \widehat{COE} = \widehat{C}$ (1)

Ta chứng minh $\widehat{EOF} = \widehat{C}$ (2),

thật vậy $\widehat{EDF} = \widehat{EDO} + \widehat{ODF} = \widehat{EAO} + \widehat{OBF} = \widehat{OCA} + \widehat{OCB} = \widehat{C}$.

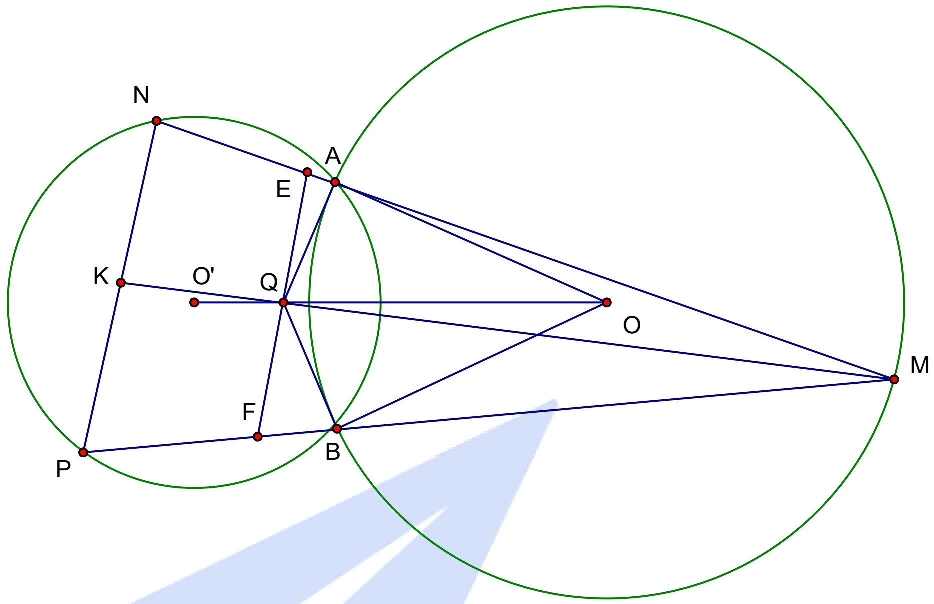
Từ (1) và (2) suy ra BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF.

Câu 24. [Trường THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ - Tỉnh Hòa Bình-ĐỀ XUẤT ĐỀ THI TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG Năm học 2012-2013]

Cho hai đường tròn (O) và (O’) cắt nhau tại A và B. M là một điểm thuộc đường tròn (O). MA cắt lại đường tròn (O’) lần thứ hai tại N, MB cắt lại đường tròn

(O’) lần thứ hai tại P. Tiếp tuyến tại A và B của (O) cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng MQ đi qua trung điểm của NP.

Hướng dẫn giải



Qua Q kẻ EF // NP ($E \in MN$, $F \in MP$)

$\Rightarrow$ Yêu cầu đề bài trở thành chứng minh Q là trung điểm EF.

Ta có: $\widehat{AEQ} = \widehat{ANP} = \widehat{ABM}$

(Do ANPB là tứ giác nội tiếp)

Lại có $\widehat{ABM} = \widehat{MAx} = \widehat{QAE}$

$\Rightarrow \Delta QAE$ cân tại Q

Chứng minh tương tự ΔQBF cân tại Q

$\begin{cases} QA = QF \\ QB = QF \end{cases}$ mà $\begin{matrix} QA = QB \\ \Rightarrow QE = QF \end{matrix}$

$\Rightarrow$ Q là trung điểm EF

$\Rightarrow$ MQ đi qua trung điểm NP

Câu 25. [TRƯỜNG THPT CHUYÊN HƯNG YÊN TỈNH HƯNG YÊN NĂM 2016]

Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt nhau tại hai điểm *A*, *B*. Một đường thẳng qua *B* cắt hai đường tròn (O_1), (O_2) tại điểm thứ hai là *C*, *D*. Gọi *M* là trung điểm của *CD*; Đường thẳng *AM* cắt đường tròn (O_2) tại điểm thứ hai là *P*; Đường thẳng (*d*) qua *M* và vuông góc với O_1M cắt đường thẳng *AC* tại *Q*. Chứng minh đường thẳng *PQ* đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

Bổ đề: Tứ giác ABCD nội tiếp (O); Gọi M là giao điểm của AB và CD. Đường thẳng d qua M và d $\perp$ OM. Đường thẳng d cắt BD, AC, AD, BC lần lượt tại K, H, I, J. Chứng minh MH = MK; MI = MJ.