Chứng minh rằng dãy số $\left\{\frac{y_n}{n}\right\}$ có giới hạn bằng 0 khi $n\to+\infty$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có $y_{n+1}^3=y_n+y_n^3, \forall n\ge 2$, do đó dãy số $\{y_n\}_{n\ge 2}$ là dãy tăng, vì.

vậy $y_{n+1}^3=y_n+y_n^3=y_n(y_n^2+1)<y_{n+1}(y_n^2+1)$.

$\Rightarrow y_{n+1}^2<y_n^2+1, \forall n\ge 2 \Rightarrow y_{n+1}^2<y_n^2+1<...<y_2^2+n-1$.

$\Rightarrow \left(\frac{y_{n+1}}{n+1}\right)^2<\frac{y_2^2+n-1}{(n+1)^2}$. Mà $\lim\frac{y_2^2+n-1}{(n+1)^2}=0$ nên theo định lý kẹp ta có.

$\lim\left(\frac{y_{n+1}}{n+1}\right)^2=0\Rightarrow \lim\frac{y_{n+1}}{n+1}=0\Rightarrow \lim\frac{y_n}{n}=0$.

Bài 11. Tìm tất cả các hằng số $c>0$ sao cho mọi dãy số dãy số (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_n\in(0;1) \\ u_{n+1}(1-u_n)>c \end{cases} \forall n\ge 1$.

đều hội tụ. Với giá trị c tìm được hãy tính giới hạn của dãy (u_n).

Hướng dẫn giải

Ta xét các trường hợp sau.

+ Nếu $c>\frac{1}{4}$, thì từ giả thiết, ta có $u_{n+1}>\frac{c}{1-u_n}=\frac{cu_n}{u_n(1-u_n)}\ge 4cu_n;\ \forall n\ge 1$.

Từ đây bằng quy nạp, ta suy ra $u_n>(4c)^{n-1}u_1$. Do $4c>1$ nên $u_n\to+\infty$ khi $n\to+\infty$. Do đó, $c>\frac{1}{4}$ không thỏa mãn.

+ Nếu $0<c<\frac{1}{4}$, thì tồn tại $a,b\in\left(\frac{1-\sqrt{1-4c}}{2};\frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}\right), a<b$ sao cho $\begin{cases} a(1-b)>c \\ b(1-a)>c \end{cases}$. Thật vậy, lấy $a\in\left(\frac{1-\sqrt{1-4c}}{2};\frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}\right)$, đặt $b=a+x\ (x>0)$, thì.

$a(1-b)>c\Leftrightarrow a(1-a-x)>c\Leftrightarrow x<\frac{a(1-a)-c}{a}$.

Chú ý là $b(1-a)>a(1-a)>c$. Do đó, ta chỉ cần chọn $x>0$ như trên và $b=a+x$, thì được 2 bất đẳng thức nêu trên.

Xét dãy số (u_n) xác định bởi.

$$u_n = \begin{cases} a & \text{nêu } n = 2m \\ b & \text{nêu } n = 2m+1 \end{cases}.$$

thì dãy (u_n) thỏa mãn giả thiết nhưng không hội tụ. Thành thử, $0 < c < \frac{1}{4}$ cũng không thỏa mãn.

+ Nếu $c = \frac{1}{4}$, thì $u_{n+1} > \frac{1}{4(1-u_n)} = \frac{u_n}{4u_n(1-u_n)} \geq u_n$. Suy ra dãy (u_n) tăng và bị chặn. Do đó, (u_n) hội tụ.

Đặt $x = \lim u_n$, thì từ giả thiết ta có $x(1-x) \geq \frac{1}{4}$ hay $x = \frac{1}{2}$. Vậy $\lim u_n = \frac{1}{2}$..

Bài 12. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}; \forall n \geq 1 \end{cases}$. Chứng minh dãy số trên có giới hạn.

Hướng dẫn giải

*) Ta chứng minh $x_n + n^2 \geq \frac{n(n+1)}{\sqrt{2}}$ với mọi $n \geq 1$ (1).

Thật vậy: $n = 1$ đúng.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1: x_k + k^2 \geq \frac{k(k+1)}{\sqrt{2}}$.

$$\Rightarrow x_{k+1} + (k+1)^2 = x_k + \frac{x_k^2}{k^2} + (k+1)^2 = \frac{x_k}{k^2}\left(x_k + k^2\right) + (k+1)^2.$$

$$\geq \left(\frac{k+1}{k\sqrt{2}} - 1\right)\frac{k(k+1)}{\sqrt{2}} + (k+1)^2 \geq \frac{3(k+1)^2}{2} - \frac{k(k+1)}{\sqrt{2}}.$$

$$\geq \frac{k+1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3(k+1)}{\sqrt{2}} - k\right) \geq \frac{(k+1)(k+2)}{\sqrt{2}} \text{ (đpcm).}$$

*) Ta chứng minh (x_n) có giới hạn.

NX: (x_n) tăng và $x_n > 0$ với mọi n.

Ta có $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n + n^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{n(n+1)} \Rightarrow \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_n} \leq \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \sqrt{2} \Rightarrow x_n < \frac{1}{2-\sqrt{2}}$ với mọi $n \geq 1$.

Vậy (x_n) có giới hạn.

Bài 13. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2014$, $u_{n+1} = \frac{u_n^4 + 2013^2}{u_n^3 - u_n + 4026}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k^3 + 2013}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $\lim v_n$.

Hướng dẫn giải

+ Ta có $u_{n+1} - 2013 = \frac{u_n^4 + 2013^2}{u_n^3 - u_n + 4026} - 2013 = \frac{(u_n - 2013)(u_n^3 + 2013)}{(u_n^3 + 2013) - (u_n - 2013)}$ (1).

Từ đó bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n > 2013, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

+ Từ (1) suy ra $\frac{1}{u_{n+1} - 2013} = \frac{1}{u_n - 2013} - \frac{1}{u_n^3 + 2013} \Rightarrow \frac{1}{u_n^3 + 2013} = \frac{1}{u_n - 2013} - \frac{1}{u_{n+1} - 2013}$.

Do đó $v_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{u_k - 2013} - \frac{1}{u_{k+1} - 2013} \right) = \frac{1}{u_1 - 2013} - \frac{1}{u_{k+1} - 2013} = 1 - \frac{1}{u_{k+1} - 2013}$.

+ Ta chứng minh $\lim u_n = +\infty$.

Thật vậy, ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - 4026u_n + 2013^2}{u_n^3 - u_n + 4026} = \frac{(u_n - 2013)^2}{u_n^3 - u_n + 4026} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra (u_n) là dãy tăng, ta có $2014 = u_1 < u_2 < \ldots$.

Giả sử (u_n) bị chặn trên và $\lim u_n = a$ thì $a > 2014$. Khi đó $a = \frac{a^4 + 2013^2}{a^3 - a + 4026}$.

$\Rightarrow a = 2013 < 2014$ (vô lí). Suy ra (u_n) không bị chặn trên, do đó $\lim u_n = +\infty$.

Vậy $\lim v_n = \lim \left(1 - \frac{1}{u_{k+1} - 2013}\right) = 1$.

Bài 14. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2013 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}^2}{u_1^2 . u_2^2 \ldots u_n^2}$.

Hướng dẫn giải

- Vì $u_1 = 2013 > 2$ nên đặt $u_1 = a + \frac{1}{a}, \quad a > 1$.

Ta có $u_2 = u_1^2 - 2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$.

Bằng quy nạp, ta chứng minh được.

$u_{n+1} = a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

- Xét.

$$\prod_{i=1}^{n} u_i = \prod_{i=1}^{n}\left(a^{2^{i-1}}+\frac{1}{a^{2^{i-1}}}\right)=\left(a-\frac{1}{a}\right)^{-1}\left[\left(a-\frac{1}{a}\right)\prod_{i=1}^{n}\left(a^{2^{i-1}}+\frac{1}{a^{2^{i-1}}}\right)\right]=\left(a-\frac{1}{a}\right)^{-1}\left(a^{2^n}+\frac{1}{a^{2^n}}\right)\ 1.0$$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}^2}{u_1^2.u_2^2...u_n^2}=\frac{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\left(a^{2^n}+\frac{1}{a^{2^n}}\right)}{\left(a^{2^n}-\frac{1}{a^{2^n}}\right)^2}\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}^2}{u_1^2.u_2^2...u_n^2}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4=2013^2-4\quad 1.0$$

Bài 15. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn: $\lim(5a_{n+1}-3a_n)=4$. Tính $\lim a_n$.

Hướng dẫn giải

Đặt $a_n=2+b_n$. Từ giả thiết suy ra $\lim(5b_{n+1}-3b_n)=0$.

Với số dương ε bé tùy ý, tồn tại số N sao cho với $n>N$ thì ta có:.

$|5b_{n+1}-3b_n|<\frac{\varepsilon}{5}$ (1).

- Nếu $b_{n+1}.b_n\le 0$ thì từ (1) dẫn đến $|5b_{n+1}|+|3b_n|<\frac{\varepsilon}{5}\Rightarrow|b_n|<\varepsilon$.

- Xét trường hợp $b_{n+1}.b_n>0$ hay $b_{n+1},\ b_n$ cùng dấu, chẳng hạn chúng cùng dương.

. Nếu $2b_{n+1}-b_n\le 0$ thì kết hợp với (1): $|3(2b_{n+1}-b_n)-b_{n+1}|<\frac{\varepsilon}{5}$ dẫn đến $|b_{n+1}|<\frac{\varepsilon}{5}$.

Mà từ (1) ta có $|3b_n|-|5b_{n+1}|<\frac{\varepsilon}{5}$ $\Rightarrow|b_n|<\varepsilon$.

. Nếu $2b_{n+1}-b_n>0$ thì kết hợp với (1): $\left|\frac{5}{2}(b_{n+1}-b_n)-\frac{1}{2}b_n\right|<\frac{\varepsilon}{5}$ dẫn đến $|b_n|<\varepsilon$.

Tóm lại luôn có $|b_n|<\varepsilon$, hay $\lim(b_n)=0$.

Vậy $\lim(a_n)=2$.

Bài 16. Cho dãy (u_n) xác định như sau: $u_1=3$ và $u_{n+1}=\frac{u_n^{2015}+2u_n+4}{u_n^{2014}-u_n+6}$, $n=1,2,3....$ Với mỗi số nguyên dương n, đặt $v_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{u_i^{2014}+4}$. Tìm $\lim_{n\to+\infty}v_n$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\alpha=2014$ ta có $u_{n+1}-2=\frac{u_n^{2015}+2u_n+4}{u_n^{2014}-u_n+6}-2=\frac{(u_n-2)(u_n^{\alpha}+4)}{(u_n^{\alpha}+4)-(u_n-2)}$, (*).

Bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n>3,\ \forall n>1$.

Xét $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n^{\alpha+1}+2u_n+4}{u_n^{\alpha}-u_n+6}-u_n=\dfrac{(u_n-2)^2}{u_n^{\alpha}-u_n+6}>0,\ \forall u_n\geq 3$.

Do đó (u_n) là dãy tăng và $3=u_1<u_2<\cdots<u_n<\cdots$.

Giả sử (u_n) bị chặn trên, suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a, a>3$. Khi đó ta có $a=\dfrac{a^{\alpha+1}+a+4}{a^{\alpha}-a+6}\Rightarrow a=2<3$ (vô lí), suy ra (u_n) không bị chặn trên. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

Từ (*) suy ra $\dfrac{1}{u_{n+1}-2}=\dfrac{1}{u_n-2}-\dfrac{1}{u_n^{\alpha}+4}$, hay $\dfrac{1}{u_n^{\alpha}+4}=\dfrac{1}{u_n-2}-\dfrac{1}{u_{n+1}-2}$.

$$v_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{u_i^{2014}+4}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{u_i-2}-\frac{1}{u_{i+1}-2}\right)=\cdots=1-\frac{1}{u_{n+1}-2}.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\dfrac{1}{u_{n+1}-2})=1$.

Bài 17. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases}u_1=3\\u_{n+1}^3-3u_{n+1}=\sqrt{2+u_n},\ \forall n\geq 1\end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

Dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases}u_1=3\\u_{n+1}^3-3u_{n+1}=\sqrt{2+u_n},\ \forall n\geq 1\end{cases}$.

Ta chứng minh $u_n>2,\ \forall n\geq 1$.

Thật vậy ta có $u_1=3>2$.

Giả sử $u_k>2,\ \forall k\geq 1$, khi đó $u_{k+1}^3-3u_{k+1}=\sqrt{2+u_k}>\sqrt{2+2}=2$ nên.

$u_{k+1}^3-3u_{k+1}-2>0\Leftrightarrow (u_{k+1}+1)^2(u_{k+1}-2)>0\Leftrightarrow u_{k+1}>2$.

Do đó theo nguyên lý quy nạp thì $u_n>2,\ \forall n\geq 1$.

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t$ trên khoảng $(2,+\infty)$.

Ta có $f'(t)=3t^2-3>0,\ \forall t>2$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(2,+\infty)$.

Mặt khác ta có $u_1^3-3u_1=18>\sqrt{5}=u_2^3-3u_2 \Leftrightarrow f(u_1)>f(u_2)\Rightarrow u_1>u_2$.

Giả sử $u_k>u_{k+1}\ (k\geq 1)\Rightarrow \sqrt{2+u_k}>\sqrt{2+u_{k+1}}\Leftrightarrow u_{k+1}^3-3u_{k+1}>u_{k+2}^3-3u_{k+2}$.

$\Rightarrow f\left(u_{k+1}\right) > f\left(u_{k+2}\right) \Rightarrow u_{k+1} > u_{k+2}$.

Do đó $u_n > u_{n+1}, \forall n \geq 1 \Rightarrow$ Dãy $\left(u_n\right)$ là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 2 nên dãy $\left(u_n\right)$ có giới hạn hữu hạn.

Giả sử $\lim u_n = a\ (a \geq 2)$. Từ hệ thức truy hồi $u_{n+1}^3 - 3u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ chuyển qua giới hạn ta được:.

$a^3 - 3a = \sqrt{2+a} \Leftrightarrow \left(a^3-3a\right)^2 = 2+a \Leftrightarrow (a-2)\left(a^5+2a^4-2a^3-4a^2+a+1\right) = 0$.

$\Leftrightarrow (a-2)\left(a^2\left(a^3-4\right)+2a^3(a-1)+a+1\right) = 0 \Leftrightarrow a = 2\ (a \geq 2)$.

Vậy $\lim u_n = 2$.

Bài 18. Cho dãy số $\left(x_n\right)$ thỏa mãn: $x_1 = 2015$ và $x_{n+1} = x_n.\left(\sqrt{x_n}+1\right)^2$ $\left(\forall n \in N^*\right)$ (*).

Tìm: $\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_i+1}}$.

Hướng dẫn giải

* Ta có: $x_n > 0\ \forall n \in N^*$.

Và: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\sqrt{x_n}+1\right)^2 > 0\ \ \forall n \in N^* \Rightarrow \left(x_n\right)$ là dãy số tăng.

* Đặt $u_n = \sqrt{x_n}$.

$\Rightarrow u_n$ xác định vì $x_n > 0\ \forall n \in N^*$ và $u_n > 0\ \ \forall n \in N^*$.

$\Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}} \Rightarrow x_{n+1} = u_{n+1}^2$.

Nên từ giả thiết (*) ta có:.

$u_{n+1}^2 = u_n^2.\left(u_n+1\right)^2 = \left(u_n.\left(u_n+1\right)\right)^2$.

$\Rightarrow u_{n+1} = u_n^2 + u_n \quad \forall n \in N^*$ (1).

* Xét dãy số $\left(u_n\right)$ ta có:.

. $u_{n+1} - u_n = u_n^2 > 0\ \ \forall n \in N^* \Rightarrow \left(u_n\right)$ tăng.

. Giả sử $\left(u_n\right)$ có giới hạn là a. Từ (1) ta có:.

$a = a^2 + a \Leftrightarrow a = 0$ (loại).

$\Rightarrow \left(u_n\right)$ tăng và không bị chặn $\Rightarrow \lim u_n = +\infty$.

* Ta có:.

$$\frac{1}{u_n+1}=\frac{u_n^2}{(u_n+1)u_n^2}=\frac{u_{n+1}-u_n}{\left(u_n^2+u_n\right).u_n}=\frac{u_{n+1}-u_n}{u_{n+1}.u_n}=\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}.$$

$$\Rightarrow \sum_{i1=1}^{n}\frac{1}{u_i+1}=\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_{n+1}}.$$

$$\Rightarrow \lim\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{u_i+1}=\lim\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_{n+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2015}}.$$

Vậy: $\lim\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_i+1}}=\frac{1}{\sqrt{2015}}$..

Bài 19. Cho dãy số $\{u_n\}$; (n = 1; 2;.) được xác định bởi: $\begin{cases}u_1=5\\u_{n+1}=\sqrt{u_n+12}\end{cases}$. Chứng minh dãy số $\{u_n\}$ có giới hạn. Tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

Dự đoán giới hạn của dãy số,bằng cách giải phương trình:.

$$a=\sqrt{a+12}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge 0\\a^2=a+12\end{cases}\Rightarrow a=4.$$

Nhận xét $u_1=5$.

$u_2=\sqrt{u_1+12}=\sqrt{17}<u_1$.

$u_3=\sqrt{u_2+12}=\sqrt{\sqrt{17}+12}<u_2$ ....

Ta dự đoán dãy số $\{u_n\}$ là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi 4 tức là $u_n\ge 4$.

Chứng minh dãy số u_n bị chặn: tức là $u_n\ge 4$.

khi $n=1,\ u_1=5\ge 4$ vậy $n=1$ đúng.

Giả sử $u_k\ge 4$, ta chứng minh: $u_{k+1}\ge 4$.

Thật vậy ta có:.

$$u_{k+1}=\sqrt{u_k+12}>0\Leftrightarrow u_{k+1}^2=u_k+12\Leftrightarrow u_{k+1}^2-12=u_k\ge 4\Leftrightarrow u_{k+1}^2\ge 16\Rightarrow u_{k+1}\ge 4.$$

Vậy dãy số u_n bị chặn dưới.

Ta chứng minh dãy số $\{u_n\}$ là dãy số giảm.

Ta có:.

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n+12}-u_n=\frac{-u_n^2+u_n+12}{\sqrt{u_n+12}+u_n}\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-4)(u_n+3)}{\sqrt{u_n+12}+u_n}\le 0\quad (\text{vì } u_n\ge 4).$$

Vậy dãy số $\{u_n\}$ giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn.

Đặt $\lim u_n=a$ thì $\lim u_{n+1}=a.$.

Ta có:.

$$u_{n+1}=\sqrt{u_n+12}\Leftrightarrow \lim u_{n+1}=\lim\sqrt{u_n+12}\Leftrightarrow a=\sqrt{a+12}\Rightarrow a=4.$$

Vậy $\lim u_n=4.$.

Bài 20. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi.

$$\begin{cases} x_1=2,1 \\ x_{n+1}=\dfrac{x_n-2+\sqrt{x_n^2+8x_n-4}}{2}\ (*), n=1,2,... \end{cases}.$$

Với mỗi số nguyên dương n, đặt $y_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2-4}$. Tìm $\lim y_n$.

Hướng dẫn giải

Ta có kết quả sau: với số thực $a>2$ bất kì, ta có.

$$\frac{a-2+\sqrt{a^2+8a-4}}{2}>\frac{a-2+\sqrt{a^2+4a+4}}{2}=\frac{a-2+(a+2)}{2}=a.$$

Do đó $2,1<x_1<x_2<...\Rightarrow (x_n)$ là dãy tăng, giả sử bị chặn trên tức là có giới hạn $\lim x_n=L>2$.

Chuyển qua giới hạn điều kiện (*) ta có phương trình.

$$x=\frac{x-2+\sqrt{x^2+8x-4}}{2}\Leftrightarrow x^2-4=(x+3)(x-2).$$

phương trình này không có nghiệm hữu hạn lớn hơn 2.

Suy ra dãy (x_n) tăng và không bị chặn trên nên $\lim x_n=+\infty$.

Ta có $x_{n+1}=\dfrac{x_n-2+\sqrt{x_n^2+8x_n-4}}{2}\Leftrightarrow 2x_{n+1}-x_n+2=\sqrt{x_n^2+8x_n-4}$.

$$\Leftrightarrow (2x_{n+1}-x_n+2)^2=x_n^2+8x_n-4\Leftrightarrow x_{n+2}^2-4=(x_n+3)(x_n-2).$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_n-2}=\frac{x_n+3}{x_{n+1}^2-4}=\frac{x_n+2+1}{x_{n+1}^2-4}=\frac{1}{x_{n+1}-2}+\frac{1}{x_{n+1}^2-4}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_{n+1}^2-4}=\frac{1}{x_n-2}-\frac{1}{x_{n+1}-2}.$$

Suy ra $y_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2-4}=\frac{1}{x_1-2}-\frac{1}{x_{n+1}-2}=10-\frac{1}{x_{n+1}-2}$.

Vậy $\lim y_n=10$.

Bài 21. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1=2016, x_{n+1}=x_n^2-x_n+1, n=1,2,3,...$.

a)Chứng minh rằng (x_n) tăng và $\lim x_n=+\infty$.

b)Với mỗi số nguyên dương n, đặt $y_n=2016\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right)$. Tính $\lim y_n$..

Hướng dẫn giải

a)Ta có $x_{n+1}-x_n=x_n^2-2x_n+1=(x_n-1)^2\ge 0\Rightarrow x_{n+1}\ge x_n,\forall n\ge 1.$ Do đó (x_n) tăng.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo *n* rằng $x_n>n+1,\forall n\ge 1$ (1).

Thật vậy, (1) đúng với $n=1$.Giả sử (1) đúng với n $(n>1)$ thì.

$x_{n+1}=x_n(x_n-1)+1>n(n+1)+1=n^2+n+1>n+2$.

Vậy (1) đúng với mọi *n*. Từ (x_n) tăng ngặt và $x_n>n+1,\forall n\ge 1$ suy ra $\lim x_n=+\infty$..

b)Ta có $x_{n+1}-1=x_n(x_n-1)$. Suy ra $\frac{1}{x_{n+1}-1}=\frac{1}{x_n(x_n-1)}=\frac{1}{x_n-1}-\frac{1}{x_n}$.

Từ đó $\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_n-1}-\frac{1}{x_{n+1}-1}$.

$$\Rightarrow y_n=2016\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right)=2016\left(\frac{1}{x_1-1}-\frac{1}{x_{n+1}-1}\right)=2016\left(\frac{1}{2015}-\frac{1}{x_{n+1}-1}\right).$$

Từ $\lim x_n=+\infty\Rightarrow\lim\frac{1}{x_n}=0$. Vậy $\lim y_n=\frac{2016}{2015}$..

Bài 22. Cho dãy $(a_n)_{n=1}^{\infty}: a_n=\sin 1+2^2\sin\frac{1}{2}+3^2\sin\frac{1}{3}+...+n^2\sin\frac{1}{n}$ $\forall n\ge 1$. Chứng minh dãy $\left(\frac{a_n}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và tính $\lim\frac{a_n}{n^2}$.

Hướng dẫn giải

<u>Bổ đề 1</u>: $x>\sin x>x-\frac{1}{6}x^3\forall x>0$.