Bây giờ xét dãy (U_n) với $U_n = n(x_n - 1)$, $n = 3,4,5,.$

Ta có: $x_n^n - x_n^2 - x_n - 1 = 0$ hay $x_n = \sqrt[n]{x_n^2 + x_n + 1}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:.

$$x_n = \sqrt[n]{x_n^2 + x_n + 1} = \sqrt[n]{(x_n^2 + x_n + 1)\underbrace{1.1....1}_{n-1 \text{ số } 1}} < \frac{x_n^2 + x_n + \underbrace{1+1+....+1}_{n \text{ số } 1}}{n} \quad \textbf{(2)}.$$

(Chú ý rằng ở đây $1 < x_n$ nên $x_n^2 + x_n + 1 \neq 1$, vì thế trong bất đẳng thức không có dấu bằng).

+) Mặt khác do $x_n < 2$, nên $x_n^2 + x_n < 6$, nên từ (2) có: $1 < x_n < 1 + \frac{6}{n}$ **(3)**.

Bất đẳng thức **(3)** đúng với mọi n≥3 và $\lim \frac{6}{n} = 0$ nên từ **(3)** ta có: $\lim x_n = 1$.

+) Ta có: $x_n^n = x_n^2 - x_n - 1 \Rightarrow n \ln x_n = \ln(x_n^2 + x_n + 1) \Rightarrow n = \frac{\ln(x_n^2 + x_n + 1)}{\ln x_n}$.

Từ đó: $n(x_n - 1) = \frac{(x_n - 1)}{\ln x_n} \ln(x_n^2 + x_n + 1)$ **(5)**.

Đặt $y_n = x_n - 1 \Rightarrow \lim y_n = 0$.

Ta có: suy ra từ **(5)** $\lim U_n = \lim n(x_n - 1) = \ln 3$.

Vậy: $\lim U_n = \ln 3$.

Bài 7. Cho số thực a, xét dãy số $(x_n)_{n\geq 1}$ được $\lim \frac{\ln x_n}{x_n - 1} = \lim \frac{\ln(y_n + 1)}{y_n} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$ xác định bởi $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{x_n^3 - 6x_n - 6}{3x_n^2 + 9x_n + 7}, n = 1,2,....$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó?.

Hướng dẫn giải

Với $a = -1$ thì $x_n = -1, \forall n \geq 1$ nên $\lim_{n\to +\infty} x_n = -1$.

Với $a \notin -1$ thì $x_n + 1 = \frac{(x_{n-1} + 1)^3}{3x_{n-1}^2 + 9x_{n-1} + 7}$, $x_n + 2 = \frac{(x_{n-1} + 2)^3}{3x_{n-1}^2 + 9x_{n-1} + 7}, \forall n \geq 2$.

Do đó $\frac{x_n + 2}{x_n + 1} = \left(\frac{x_{n-1} + 2}{x_{n-1} + 1}\right)^3 = ... \left(\frac{a+2}{a+1}\right)^{3^{n-1}}, \forall n \geq 1$.

Từ đó, tính được $x_n = \frac{2(a+1)^{3^{n-1}} - (a+2)^{3^{n-1}}}{(a+2)^{3^{n-1}} - (a+1)^{3^{n-1}}}, \forall n \geq 1,.$

Kết luận + $a < -\frac{3}{2} \Rightarrow |a+1| > |a+2| \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -2$.

+ $a > -\frac{3}{2} \Rightarrow |a+1| < |a+2| \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -1$.

+ $a = -\frac{3}{2} \Rightarrow x_n = -\frac{3}{2}, \forall n \ge 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\frac{3}{2}$..

Bài 8. Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = \dfrac{2012}{2013} \\ u_n^2 - 2u_{n+1} - 1 = 0 \ , \ \forall n = 1,2,3,... \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $u_n{}^2 - 2u_{n+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2} - \frac{1}{2}$.

Xét hàm số : $f(x) = \frac{x^2-1}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ge -\frac{1}{2}$.

$f'(x) = x$.

.

Ta có :.

x	$\frac{-1}{2}$		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{-3}{8}$	$\searrow$	$\frac{-1}{2}$	$\nearrow$	0

$\frac{-1}{2} < u_1 < 1 \Rightarrow \frac{-1}{2} < u_2 < 0 \Rightarrow \frac{-1}{2} < u_3 < -\frac{3}{8} < 0$.

Vậy : $\forall n \ge 2$ thì $-1 < u_n < 0$.

$u_n{}^2 - 2u_{n+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 1}{2}$.

Gọi a là nghiệm của : $\frac{x^2-1}{2} = x \ \left(x \in (\frac{-1}{2};0)\right) \Rightarrow a = 1 - \sqrt{2}$.

Ta có : $|u_{n+1} - a| = |f(u_n) - f(a)|$.

Theo định lí La-grăng : $|f(u_n) - f(a)| = |f'(a)|.|u_n - a|$.

Do $f'(a) \le \frac{1}{2} \Rightarrow |f(u_n) - f(a)| \le \frac{1}{2}|u_n - a|$.

$$\Rightarrow |u_{n+1}-a| \le \frac{1}{2}|u_n-a| \le \left(\frac{1}{2}\right)^2 |u_{n-1}-a| \le \ldots \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_1-a|.$$

Mà $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-a)=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = a = 1-\sqrt{2}$.

Vậy : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1-\sqrt{2}$.

Bài 9. Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau: $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\,2}+5}{2(u_n+2)}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy số $\{u_n\}$ có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

* Vì $0 < u_0 \ne 1$ nên $0 < u_n \ne 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

* Áp dụng BĐT Cauchy ta có $u_n + 2 + \dfrac{9}{u_n+2} \ge 6$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow u_n = 1$.

$\Rightarrow u_n + 2 + \dfrac{9}{u_n+2} > 6, \forall n \in \mathbb{N}$.

* $u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\,2}+5}{2(u_n+2)} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + 2 + \dfrac{9}{u_n+2}\right) - 2 > 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

* $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{2}u_n - 1 + \dfrac{9}{2(u_n+2)}$.

Xét hàm số $f(x) = -\dfrac{1}{2}x - 1 + \dfrac{9}{2(x+2)}$.

$f'(x) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{9}{2(x+2)^2} < 0, \forall x > 1 \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

* Vì $u_n > 1 \Rightarrow f(u_n) < f(1) = 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\Rightarrow \{u_n\}$ giảm và bị chặn dưới $\Rightarrow \{u_n\}$ có giới hạn hữu hạn.

* Giả sử $\lim u_n = a \ (1 \le a < +\infty)$. Từ $u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\,2}+5}{2(u_n+2)}$ chuyển qua giới hạn ta có.

$$a = \frac{a^2+5}{2(a+2)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -5 (loai) \end{array}\right.$$

* Vậy $\lim u_n = 1$.

Bài 10. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 4$ và $u_{n+1} = u_n^2 - 2$, với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_1.u_2...u_n}$.

Hướng dẫn giải

Với mọi $n = 1, 2, ...$; ta có.

$u_{n+1}^2 - 4 = \left(u_n^2 - 2\right)^2 - 4 = u_n^4 - 4u_n^2 = u_n^2\left(u_n^2 - 4\right) = u_n^2.u_{n-1}^2(u_{n-1}^2 - 4)$.

$= ... = u_n^2 u_{n-1}^2 ... u_2^2 u_1^2 (u_1^2 - 4) = 12\left(u_n.u_{n-1}...u_1\right)^2$ (1).

Từ (1) ta có: $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_1.u_2...u_n}\right)^2 = 12 + \dfrac{4}{\left(u_1.u_2...u_n\right)^2}$; $\forall n = 1, 2, ...$ (2).

Mặt khác, vì $u_1 = 4 > 2$ nên từ $u_{n+1} = u_n^2 - 2$ và chứng minh bằng quy nạp ta thu được $u_n > 2$ với mọi $n = 1, 2, ...$.

Do đó $u_1.u_2...u_n > 2^n$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, $0 < \dfrac{4}{\left(u_1.u_2...u_n\right)^2} < \dfrac{4}{2^{2n}}$; $\forall n = 1, 2, ...$.

nên theo nguyên lý kẹp giữa ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{\left(u_1.u_2...u_n\right)^2} = 0$.

Vậy, từ (2) suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_1.u_2...u_n}\right)^2 = 12$.

Mặt khác, hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ nên.

$$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_1 u_2 ... u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\left(\frac{u_{n+1}}{u_1 u_2 ... u_n}\right)^2} = \sqrt{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_1 u_2 ... u_n}\right)^2} = \sqrt{12}.$$

Kết luận: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_1.u_2...u_n} = \sqrt{12}$.

Bài 11. a) Chứng minh rằng có đúng một dãy số thực $(x_n)_{n\ge0}$ thỏa mãn.

$x_0 = 1$, $0 \le x_n \le 1 \forall n \ge 1$ và $(1 - x_n)^2 - (1 - x_{n-1})^2 = \dfrac{x_n + x_{n-1}}{2} \forall n \ge 1$..

b) Với dãy (x_n) xác định như trên, xét dãy $(y_n)_{n\ge0}$ xác định bởi $y_n = x_0 + x_1 + ... + x_n \forall n \ge 0$. Chứng minh rằng dãy $(y_n)_{n\ge0}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Hãy tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

a) Bằng quy nạp ta sẽ chỉ ra rằng x_n xác định duy nhất với mỗi $n \ge 0$. Để làm được điều này ta cần dùng kết quả (chứng minh của nó là đơn giản) sau: Với mỗi số thực $m \in [0;1]$, phương trình $(1-t)^2-(1-m)^2=\frac{t+m}{2}$ có đúng một nghiệm trên $[0;1]$.

b) Để ý rằng $y_n=\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{2}(x_0+x_1)+\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\cdots+\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_n)+\frac{1}{2}x_n\ \forall n \ge 1$..

Ta có giới hạn cần tìm bằng $\frac{3}{2}$..

Bài 12. Giả sử $(F_n)(n=1,2,...)$ là dãy Fibonacci ($F_1=F_2=1; F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ với). Chứng minh rằng nếu $a \ne -\frac{F_{n+1}}{F_n}$ với mọi $n=1,2,3,...$ thì dãy số (x_n), trong đó $x_1=a, x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}(n=1,2,3...)$, là xác định và nó có giới hạn hữu hạn khi n tăng lên vô hạn. Tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

Giả sử $x_1,x_2,...,x_m$ đã được xác định. Khi đó x_{m+1} được xác định khi $x_m \ne -1$.

* Nếu $x_m=-1$ thì do $x_m=\frac{1}{1+x_{m-1}}$ nên $x_{m-1}=-2$.

Từ giả thiết $F_1=F_2=1; F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ ta viết $x_m=-\frac{F_2}{F_1}$, $x_{m-1}=-\frac{F_3}{F_2}$.

Giả sử $x_{m-i}=-\frac{F_{i+2}}{F_{i+1}}$, với i nào đó, $0 \le i \le m-2$.

Vì $x_{m-i}=\frac{1}{1+x_{m-i-1}}$ nên $x_{m-i-1}=\frac{1}{x_{m-i}}-1=-\frac{F_{i+1}}{F_{i+2}}-1=-\frac{F_{i+3}}{F_{i+2}}$.

Khi đó $x_1=-\frac{F_{m+1}}{F_m}$. Mâu thuẫn với giả thiết $x_1 \ne -\frac{F_{m+1}}{F_m}$. Như vậy (x_n) là dãy số xác định.

Phương trình $x=\frac{1}{1+x} \Leftrightarrow x^2+x-1=0$ có hai nghiệm $u=\frac{\sqrt{5}-1}{2}, v=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$. Có hai trường hợp xảy ra:.

Trường hợp 1: $x_1=v$. Khi đó $x_n=x_1, \forall n \ge 1$. Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$.

Trường hợp 2: $x_1 \ne v$. Chú ý $\frac{1}{1+x_n}=v \Leftrightarrow x_n=\frac{1-v}{v} \Leftrightarrow x_n=v$. Do đó $x_n \ne v, \forall n \ge 1$.

Đặt $z_n = \frac{x_n - u}{x_n - v}$, ta có.

$$z_{n+1} = \frac{x_{n+1} - u}{x_{n+1} - v} = -\frac{\frac{1}{1+x_n} - u}{\frac{1}{1+x_n} - v} = \frac{(1-u) - ux_n}{(1-v) - vx_n} = \frac{u^2 - ux_n}{v^2 - vx_n} = \frac{u}{v}.\frac{x_n - u}{x_n - v} = \frac{u}{v}.z_n.$$

Từ đó có $z_n = \left(\frac{u}{v}\right)^n .z_1$ nên $z_n \to 0$ khi $n \to +\infty$ (vì $\left|\frac{u}{v}\right| < 1$).

Từ $z_n = \frac{x_n - u}{x_n - v}$ suy ra $x_n = \frac{u - vz_n}{1 - z_n}$ dần tới u khi $n \to +\infty$ (do $z_n \to 0$).

Tức là trong trường hợp này $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Bài 13. Cho dãy số $\{y_n\}$ thỏa mãn $y_1 > 0, y_{n+1}^3 = y_1 + y_2 + ... + y_n, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số $\left\{\frac{y_n}{n}\right\}$ có giới hạn bằng 0 khi $n \to +\infty$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có $y_{n+1}^3 = y_n + y_n^3, \forall n \geq 2$, do đó dãy số $\{y_n\}_{n\geq 2}$ là dãy tăng, vì.

vậy $y_{n+1}^3 = y_n + y_n^3 = y_n(y_n^2 + 1) < y_{n+1}(y_n^2 + 1)$.

$\Rightarrow y_{n+1}^2 < y_n^2 + 1, \forall n \geq 2 \Rightarrow y_{n+1}^2 < y_n^2 + 1 < ... < y_2^2 + n - 1$.

$\Rightarrow \left(\frac{y_{n+1}}{n+1}\right)^2 < \frac{y_2^2 + n - 1}{(n+1)^2}$. Mà $\lim \frac{y_2^2 + n - 1}{(n+1)^2} = 0$ nên theo định lý kẹp ta có.

$\lim\left(\frac{y_{n+1}}{n+1}\right)^2 = 0 \Rightarrow \lim \frac{y_{n+1}}{n+1} = 0 \Rightarrow \lim \frac{y_n}{n} = 0$.

Bài 14. Cho (u_n) là một dãy số dương. Đặt $S_n = u_1^3 + u_2^3 + ... + u_n^3$ với $n = 1, 2, ...$ Giả sử $u_{n+1} \leq \left((S_n - 1)u_n + u_{n-1}\right)\frac{1}{S_{n+1}}$ với $n = 2, 3, ...$ Tìm $\lim u_n$.

Hướng dẫn giải

Ta có $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}^3 > 0, n = 1, 2, ... \Rightarrow (S_n)$ là dãy số tăng.

Nếu dãy số (S_n) bị chặn trên thì (S_n) là một dãy hội tụ và $\lim u_n^3 = \lim(S_{n+1} - S_n) = 0 \Rightarrow \lim u_n = 0$.

Xét trường hợp dãy số (S_n) không bị chặn trên thì $\lim S_n = +\infty$.