$$\Leftrightarrow x=\frac{-1-\sqrt{19-2\sqrt{21}}}{2} \text{ hoặc } x=\frac{-1+\sqrt{19-2\sqrt{21}}}{2}.$$

Câu 19. Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{x+2}{2}}-1=\sqrt[3]{3(x-3)^2}+\sqrt[3]{9(x-3)}$.

Hướng dẫn giải.

Điều kiện $x\ge -2$

Đặt $t=\sqrt[3]{9(x-3)}$ ta có

$$x=\frac{t^3+27}{9};\sqrt{\frac{x+2}{2}}=\sqrt{\frac{t^3+45}{18}};\sqrt[3]{3(x-3)^2}=\frac{t^2}{3}$$

Phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{\frac{t^3+45}{18}}=\frac{t^2}{3}+t+1\Leftrightarrow\sqrt{\frac{t^3+45}{2}}=t^2+3t+3$$

Ta có $t^2+3t+3=\left(t+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ nên $\dfrac{t^3+45}{2}=\left(t^2+3t+3\right)^2$

Ta được phương trình $(2t-1)(t+3)\left(t^2+3t+9\right)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}\vee t=-3$

Với $t=\dfrac{1}{2}$ thì $x=\dfrac{217}{72}$

Với $t=-3$ thì $x=0$

Câu 20. Giải phương trình $2x^2+\sqrt{1-x}+2x\sqrt{1-x^2}=1$.

Hướng dẫn giải.

Ta có phương trình tương đương với

$$\sqrt{1-x}=1-2x^2-2x\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow 1-x=1+4x^4+4x^2(1-x^2)-4x^2-4x\sqrt{1-x^2}+8x^3\sqrt{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow x(1-4\sqrt{1-x^2}+8x^2\sqrt{1-x^2})=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 1-4\sqrt{1-x^2}+8x^2\sqrt{1-x^2}=0(1) \end{array}\right.$$

Xét (1), đặt $y=\sqrt{1-x^2}$, suy ra $y\ge 0$ và $x^2=1-y^2$.

Ta được $1-4y+8y(1-y^2)=0\Leftrightarrow 8y^3-4y-1=0$

$$\Leftrightarrow (2y+1)(4y^2-2y-1)=0$$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. Từ đó suy ra $x=\pm\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Thử lại ta được nghiệm của phương trình là $x=0$ và $x=-\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Câu 21. Giải phương trình $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình tương đương với $x^3+2x=2x-1+2\sqrt[3]{2x-1}$.

Đặt $t=\sqrt[3]{2x-1}$, ta có phương trình $x^3+2x=t^3+2t$

$\Leftrightarrow (x-t)(x^2+xt+t^2)+2(x-t)=0$

$\Leftrightarrow (x-t)(x^2+xt+t^2+2)=0 \quad (1)$

Vì $x^2+xt+t^2+2=\left(x+\frac{t}{2}\right)^2+\frac{3t^2}{4}+2>0$ nên $(1)\Leftrightarrow x=t$

$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2x-1}\Leftrightarrow x^3-2x+1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Tập nghiệm $S=\left\{1;\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Câu 22. *(Chuyên Hưng Yên)* Giải phương trình $8x^2-15x+9=\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{5x^2-2x-2}$

Hướng dẫn giải

$8x^2-15x+9=\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{5x^2-2x-2}$

$\Leftrightarrow 8x^3-15x^2+9x=(x+1)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1)+3x^2-3x-1}(x\neq 0)$

$\Leftrightarrow (2x-1)^3-(3x^2-3x-1)=(x+1)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1)+3x^2-3x-1}$

Đặt $u=2x-1$, $v=\sqrt[3]{5x^2-2x-2}$, ta được hệ: $\begin{cases} u^3-(3x^2-3x-1)=(x+1)v \\ v^3-(3x^2-3x-1)=(x+1)u\end{cases}$

Trừ vế với vế hai phương trình trên, ta được:

$(u-v)(v^2+uv+u^2)=(x+1)(v-u)\Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+x+1)=0$

TH1: $u=v\Leftrightarrow 2x-1=\sqrt[3]{5x^2-2x-2}\Leftrightarrow 8x^3-17x^2+8x+1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(8x^2-9x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{9\pm\sqrt{113}}{16}\end{array}\right.$

TH2: $u^2+uv+v^2+x+1=0\Leftrightarrow (v+\frac{u}{2})^2+\frac{3}{4}(2x-1)^2+x+1=0$

$\Leftrightarrow 4(v+\frac{u}{2})^2+12x^2-8x+7=0$

$\Leftrightarrow 4(v+\frac{u}{2})^2+4x^2+2(2x-1)^2+5=0$ phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x=1; x=\frac{9\pm\sqrt{113}}{16}$

Câu 23. Giải phương trình : $x^2-4x+3=\sqrt{x+5}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{x+5}\quad (t\ge 0)$.

Từ phương trình đã cho ta có : $t^4-14t^2-t+48=0\quad (*)$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow (t-3)\left(t^3+3t^2-5t-16\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t^3+3t^2-5t-16=0\ (**) \end{array}\right.$$

Với $t=3$ ta có $x=4$

Đặt $y=t+1\quad (y\ge 1)$ từ phương trình (**) ta có : $y^3-8y-9=0\,(***)$

Dùng máy tính điện tử hoặc khảo sát hàm số $f(y)=y^3-8y-9$ trên $[1;+\infty)$ ta thấy (***) có một nghiệm duy nhất y_0

Ta biểu diễn y_0 dưới dạng: $y_0=u_0+v_0$

Ta có : $u_0^3+v_0^3+(u_0+v_0)(3u_0v_0-8)-9=0$ nên có thể chọn $u_0;v_0$ sao cho : $u_0v_0=\dfrac{8}{3}$

Vậy ta có : $\begin{cases} u_0^3v_0^3=\dfrac{512}{27} \\ u_0^3+v_0^3=9 \end{cases}$

Như vậy $u_0^3;v_0^3$ được chọn là nghiệm của phương trình : $z^2+9z-\dfrac{512}{27}=0$

Suy ra: $\begin{cases} u_0^3=\dfrac{9}{2}+\sqrt{\dfrac{139}{108}} \\ v_0^3=\dfrac{9}{2}-\sqrt{\dfrac{139}{108}} \end{cases}$

Ta tìm được nghiệm của (***) là

$y_0=\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}+\sqrt{\dfrac{139}{108}}}+\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}-\sqrt{\dfrac{139}{108}}}$ .Suy ra : $x=\left(\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}+\sqrt{\dfrac{139}{108}}}+\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}-\sqrt{\dfrac{139}{108}}}-1\right)^2-5$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x=4\ ;\ x=\left(\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}+\sqrt{\dfrac{139}{108}}}+\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}-\sqrt{\dfrac{139}{108}}}-1\right)^2-5$$

Câu 24. Giải phương trình sau: $x^2-3x+1=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4+x^2+1}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)>0$

Û $x^2-3x+1=2(x^2-x+1)-(x^2+x+1)$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}},t>0$. Phương trình trở thành:

$$2t^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-3}{2\sqrt{3}} < 0 \\ t = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\Leftrightarrow x = 1$

Dạng 3. Sử dụng hàm số

Câu 1. Giải các phương trình sau:

a) $8x^3 + 4x - 3 + \ln\left(4x^2 - 2x + 1\right) = 0$.

b) $\ln\left(x^2 + 6x + 10\right) + x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = 0$.

Câu 2. Giải phương trình sau:

a) $\log_{2007}\left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 2006\right) + \left(\dfrac{1}{2007}\right)^{4x - x^2 - 2} = 2$

b) $\log_{2007}\left(\dfrac{2x^2 + 3}{x^4 + x^2 + 1}\right) = x^4 - x^2 - 2$

Câu 3. Giải phương trình $\log_{2007}\left(\sqrt{1 - \sin x} + 1\right) = 2007^{\sqrt{1 - \sin x}} - 1$.

Giải phương trình: $x.3^{x^2 - 1} + (x^2 - 1).3^x + 1 - x - x^2 = 0$

- Phương trình đã cho tương đương với: $(x^2 - 1).(3^x - 1) + x.(3^{x^2 - 1} - 1) = 0$
- Xét x = 0; x = ± 1: Thay vào (1) ta thấy đều thỏa nên phương trình có các nghiệm: x = 0; x = ± 1.
- Xét x ≠ 0; x ≠ ± 1: Khi đó (1) ⇔ $\dfrac{3^x - 1}{x} + \dfrac{3^{x^2 - 1} - 1}{x^2 - 1} = 0 \quad (2)$

  Với t ≠ 0, xét hàm số: $f(t) = \dfrac{3^t - 1}{t}$.

  * Với t > 0 thì $3^t - 1 > 0 \Rightarrow f(t) > 0$ và với t < 0 thì $3^t - 1 < 0 \Rightarrow f(t) > 0$, do đó:
  Vì (2) ⇔ $f(x) + f(x^2 - 1) = 0$ nên (2) vô nghiệm.
- Vậy phương trình đã cho có tất cả là 3 nghiệm: x = 0; x = ± 1.

Câu 4. *[Đề chọn hsg tỉnh Trà Vinh, 2014-2015]* Giải phương trình :
$\sqrt[3]{3x - 5} = 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25$

Câu 5. Giải phương trình: $8x^3 - 17x^2 + 10x - 2 = 2\sqrt[3]{5x^2 - 1}$.

Ta có $8x^3 - 17x^2 + 10x - 2 = 2\sqrt[3]{5x^2 - 1} \Leftrightarrow (2x - 1)^3 + 2(2x - 1) = (5x^2 - 1) + 2\sqrt[3]{5x^2 - 1}$ (1).
Đặt $f(t) = t^3 + 2t$ thì $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t$ do đó f đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$.
Từ đó:
$(1) \Leftrightarrow f(2x - 1) = f\left(\sqrt[3]{5x^2 - 1}\right) \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt[3]{5x^2 - 1}$.

$$\Leftrightarrow x(8x^2-17x+6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{17\pm\sqrt{97}}{16} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 6. Giải phương trình $-2x^3+10x^2-17x+8=2x^2\sqrt[3]{5x-x^3}$ (1)

Hướng dẫn giải

Có $x=0$ không là nghiệm của (1)

Xét $x\neq 0$, chia hai vế cho x^3, được

$$-2+\frac{10}{x}-\frac{17}{x^2}+\frac{8}{x^3}=2\sqrt[3]{\frac{5}{x^2}-1}$$

Đặt $y=\frac{1}{x}(y\neq 0)$, khi đó có PT

$$8y^3-17y^2+10y-2=2\sqrt[3]{5y^2-1}$$

$$(2y-1)^3+2(2y-1)= 5y^2-1+ 2\sqrt[3]{5y^2-1}$$

Suy ra $f(2y-1)=f\left(\sqrt[3]{5y^2-1}\right)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ .Vì f(t) là hàm số đồng biến trên R

nên $f(2y-1)=f\left(\sqrt[3]{5y^2-1}\right) \leftrightarrow 2y-1 = \sqrt[3]{5y^2-1}$

$\leftrightarrow 8y^3-17y^2+6y=0 \leftrightarrow y\left(8y^2-17y +6\right)=0$

Giải tìm được y = 0 (loại); $y=\dfrac{17\pm\sqrt{97}}{16}$

Tính x theo $x=\dfrac{1}{y}$

Tập nghiệm của phương trình (1) là $\left\{\dfrac{17-\sqrt{97}}{12};\dfrac{17+\sqrt{97}}{12}\right\}$

Câu 7. Giải phương trình $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{5-x}=\sqrt[4]{\dfrac{x+5}{3}}+\sqrt[4]{\dfrac{10-x}{3}}$ $(x\in\mathbb{R})$.

Hướng dẫn giải.

Điều kiện: $0\le x\le 5$

Phương trình $\Leftrightarrow 2\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{5-x}=\sqrt[4]{\dfrac{x+2x}{3}}+\sqrt[4]{\dfrac{(5-x)+2x}{3}}+\sqrt[4]{\dfrac{x+2(5-x)}{3}}$ (1)

Ta có: x = 0, x = 5 không là nghiệm phương trình.

Xét hàm số $f(x)=x^\alpha$, $x>0$; ta có: $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$; $f''(x)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ (*)

Áp dụng (*) với $\alpha=\dfrac{1}{4}$

Ta có: $2\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{5-x}\le\sqrt[4]{\frac{x+2x}{3}}+\sqrt[4]{\frac{(5-x)+2x}{3}}+\sqrt[4]{\frac{x+2(5-x)}{3}}$

$(1)\Leftrightarrow x=5-x\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$. Vậy $x=\frac{5}{2}$ là nghiệm phương trình.

Câu 8. Giải phương trình $5\sqrt[3]{2x^3-3x^2-5x-4}=-x^3+13x-2,\ (x\in\mathbb{R})$.

Hướng dẫn giải.

Đặt $a=\sqrt[3]{2x^3-3x^2-5x-4}$ ta được: $\begin{cases}5a=-x^3+13x-2 & (1)\\ a^3=2x^3-3x^2-5x-4 & (2\end{cases}$

$(1)+(2)\Rightarrow a^3+5a=(x-1)^3+5(x-1)$ (*)

Xét hàm số $f(t)=t^3+5t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+5>0\quad\forall t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$; (*) $\Leftrightarrow\sqrt[3]{2x^3-3x^2-5x-4}=x-1$

$$\Leftrightarrow x^3-8x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x^2+3x+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Thử lại, ta được: $x=3;\ x=\frac{-3-\sqrt{5}}{2};\ x=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ là nghiệm phương trình.

Câu 9. Giải phương trình : $x^3+x^2-3x-2=2\sqrt{x+2}$ trên $[-2;2]$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x=2\cos t$ .Với $x\in[-2;2]$ ta có $t\in[0;\pi]$.

Phương trình đã cho trở thành : $4\cos^3 t-3\cos t+2\cos^2 t-1=2\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ (*)

Với $t\in[0;\pi]$ Ta có: $(*)\Leftrightarrow\cos 3t+\cos 2t=2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{t}{2}\right)=0\\ \cos\left(\frac{5t}{2}\right)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\pi\\ t=0\\ t=\frac{4\pi}{5}\end{array}\right.$

Vậy trên $[-2;2]$ phương trình đã cho có nghiệm $x=-2$ $,x=2,x=2\cos\frac{4\pi}{5}$.

Câu 10. Giải phương trình: $16^{x^2(2x-1)}-2.4^{2x-1}=0$.

Lời giải

Biến đổi phương trình: $16^{x^2(2x-1)}-2.4^{2x-1}=0\Leftrightarrow 2^{4x^2(2x-1)}=2^{4x-1}\Leftrightarrow 8x^3-4x^2-4x+1=0$ (1)

Đa thức $f(x)=8x^3-4x^2-4x+1=0$ có tối đa 3 nghiệm và ta có: $f(-1)=-7$; $f(0)=1$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$; $f(1)=1$. $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-1;1)$ và $f(-1).f(0)<0$, $f(0).f\left(\frac{1}{2}\right)<0$, $f\left(\frac{1}{2}\right).f(1)<0$ nên $f(x)=0$ có 3 nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

Do $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm trong khoảng $(-1;1)$, nên ta có thể đặt $x=\cos a$ với $0<a<\pi$
.

Phương trình (1) trở thành:

$8\cos^3 a-4\cos^2 a-4\cos a+1=0 \Leftrightarrow 4\cos a\left(2\cos^2 a-1\right)=4\left(1-\sin^2 a\right)-1$

$\Leftrightarrow 4\cos a.\cos 2a=3-4\sin^2 a \Leftrightarrow 4\sin a.\cos a.\cos 2a=3\sin a-4\sin^3 a$ (do $\sin a>0$)

$\Leftrightarrow \sin 4a=\sin 3a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4a=3a+k2\pi\\4a=\pi-3a+k2\pi\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$ (với $0<a<\pi$)

$\Leftrightarrow a=\frac{\pi}{7}$ hay $a=\frac{3\pi}{7}$ hay $a=\frac{5\pi}{7}$.

Câu 11. Giải phương trình sau: $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}=2$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x\in(-\sqrt{2};\sqrt{2})\setminus\{0\}$.

Đặt $y=\sqrt{2-x^2}$;y>0 .

Từ phương trình đã cho ,ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x+y=2xy\\x^2+y^2=2\end{cases}$

Đặt S = x + y; P = xy đưa đến hệ phương trình: $\begin{cases}S=2P\\S^2-2P=2\end{cases}$

$\Rightarrow S^2-S-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}S=-1\\S=2\end{array}\right.$

$S=2;\ \text{P=1} \Rightarrow x\text{=y=1}$

$S=-1;\ \text{P=-}\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\\y=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\end{cases};\begin{cases}\text{x=}\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\\\text{y=}\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

Kết hợp với điều kiện, nghiệm pt đã cho là: $x=1$ và x=$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

Câu 12. Giải phương trình: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16.(x\in\mathbb{R})$.

(Chưa giải)

Câu 13. Giải phương trình: $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$.

(Chưa giải)

Dạng 3: Sử dụng hàm số

Bài 1. Cho phương trình: $x^n - x^2 - x - 1 = 0$ với $n \in \mathbb{N}, n > 2$. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n > 2$, thì phương trình có một nghiệm dương duy nhất x_n

Hướng dẫn giải:

Xét hàm số $f(x) = x^n - x^2 - x - 1$ với n nguyên, $n > 2$ (1)

+) Ta có: $f'(x) = nx^{n-1} - 2x - 1$. Do $n > 2$, nên khi $x > 1$ thì $f'(x) > 0$. Vậy $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Lại có: $f(1) = -2 < 0; f(2) = 2^n - 7 > 0$ (vì n nguyên và $n > 2 \Rightarrow n \geq 3$)

Ta có: $f(1)f(2) < 0$ và $f(x)$ liên tục, đồng biến nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất trên $(1;+\infty)$.

+) Mặt khác với $0 < x < 1$ thì $x^n < x^2 \,(do\ n > 2)$ suy ra $f(x) < 0$ với mọi $0 < x < 1$.

Như vậy ta đã chứng minh được (1) có nghiệm dương duy nhất với mọi n nguyên, $n > 2$.

Bài 2. Cho phương trình: $x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 5x^3 + x^2 + 4x - 1 = 0$ (1).

1. Chứng tỏ phương trình (1) có đúng 5 nghiệm.
2. Với $x_i \left(i = \overline{1,5}\right)$ là nghiệm của phương trình nghiệm, tính tổng: $S = \sum_{i=1}^{5} \frac{x_1 + 1}{2x_i^5 - x_i^4 - 2}$

Hướng dẫn giải

1. Xét hàm số: $f(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 5x^3 + 4x - 1$.

* f(x) là hàm số xác định và liên tục trên R.

* Ta có: $f(-2) = -5$; $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2$; $f(0) = -1$;

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$; $f(1) = -\frac{1}{2}$; $f(3) = \frac{175}{2}$

$\Rightarrow f(-2).f\left(-\frac{3}{2}\right) < 0$; $f\left(-\frac{3}{2}\right).f(0) < 0$; $f(0).f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

$f\left(-\right) f\left(\frac{1}{2}\right).f(1) < 0$; $f(1).f(3) < 0$

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt $x_1, x\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$

sao cho: $-2 < x_1 < \frac{-3}{2} < x_2 < 0 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4 < 1 < x_5 < 3$

* Ta có x_i là nghiệm của (1) nên:

$$x_i^5 - \frac{1}{2}x_i^4 - 5x_i^3 + 4x_i - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x_i^5 - x_i^4 - 2 = 2\left(5x_i^3 - x_i^2 - 4x_i\right)$$

Do đó: $S = \sum_{i=1}^{5} \frac{x_i + 1}{2\left(5x_i^3 - x_i^2 - 4x_i\right)}$

Xét biểu thức: $g(x) = \frac{x+1}{5x^3 - x^2 - 4x} = \frac{x+1}{x(x-1)(5x+4)}$

Đồng nhất thức ta được:

$g(x) = -\frac{1}{4x} + \frac{2}{9(x-1)} + \frac{5}{36(5x+4)}$

Do vậy: $S = -\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i} + \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i - 1} + \frac{1}{72}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i + \frac{4}{5}}$

Mặt khác: $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$

$$f'(x) = (x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) + (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) + \ldots$$

$\Rightarrow$ Với $x \neq x_i$ ta được: $\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x - x_i}$

và $f'(x) = 5x^4 - 2x^3 - 15x^2 + 2x + 4$

Do đó: $\frac{f'(1)}{f(1)} = \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{1 - x_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i - 1} = -\frac{f'(1)}{f(1)} = -12$

$\frac{f'(0)}{f(0)} = \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{-x_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i} = -\frac{f'(0)}{f(0)} = 4$

$-\frac{f'\left(-\frac{4}{5}\right)}{f\left(-\frac{4}{5}\right)} = \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{-\frac{4}{5} - x_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i + \frac{4}{5}} = -\frac{f'\left(-\frac{4}{5}\right)}{f\left(\frac{4}{5}\right)} = -\frac{12900}{4789}$

Vậy: $S = -\frac{8959}{4789}$.

Dạng 4: Đánh giá

Bài 1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$2x^2 + 3y^2 - 5xy + 3x - 2y - 3 = 0$$

Hướng dẫn giải

Xem (1) là phương trình bậc hai ẩn x ta có: (1) $\Leftrightarrow 2x^2 + (3 - 5y)x + 3y^2 - 2y - 3 = 0$.

* Để (1) có nghiệm x nguyên điều kiện cần là:
$\Delta = (3-5y)^2 - 4.2(3y^2-2y-3) = y^2-14y+33 = k^2$ (k nguyên, không âm)

* Lại xem $y^2-14y+33-k^2=0$ là phương trình bậc hai ẩn y . Để có nghiệm nguyên y điều kiện cần là $\delta' = 49-(33-k^2) = 16+k^2 = m^2$ là một số chính phương (m nguyên dương).

Do $m^2-k^2=16 \Leftrightarrow (m+k)(m-k)=16$ và 16 = 16.1 = 8.2 = 4.4 nên ta có các trường hợp.

+) TH1: $\begin{cases} m+k=8 \\ m-k=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=5 \\ k=3 \end{cases}$ suy ra phương trình (1) có nghiệm $(x;y)=(15;12),(1,2)$.

+) TH2: $\begin{cases} m+k=4 \\ m-k=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=4 \\ k=0 \end{cases}$ suy ra phương trình (1) có nghiệm $(x;y)=(13;11),(3,3)$.

+) TH3 : $\begin{cases} m+k=16 \\ m-k=1 \end{cases}$ Loại.

Bài 2. *[Đề xuất, Chuyên Hùng Vương Phú Thọ, DHĐBBB, 2015]* Giải phương trình
$4\sqrt{x+1} + 2\sqrt{2x+3} = (x-1)(x^2-2)$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq -1$.

Nhận thấy $x=-1$ là một nghiệm của phương trình.

Xét $x > -1$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$4\left(\sqrt{x+1}-2\right) + 2\left(\sqrt{2x+3}-3\right) = x^3 - x^2 - 2x - 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-3)}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4(x-3)}{\sqrt{2x+3}+3} = (x-3)(x^2+2x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{4}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{2x+3}+3} - (x+1)^2 - 3\right) = 0. \qquad (1)$$

Vì $x > -1$ nên $\sqrt{x+1} > 0$ và $\sqrt{2x+3} > 1$. Suy ra

$$\frac{4}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{2x+3}+3} < 3,$$

vì vậy

$$\frac{4}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{2x+3}+3} - (x+1)^2 - 3 < 0.$$

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=-1$ hoặc $x=3$.

Bài 3. *[Đề thi hsg tỉnh Nghệ An, bảng A, 2015-2016]* $\sqrt[3]{x^3+5x^2} - 1 = \sqrt{\frac{5x^2-2}{6}}$.