Hướng dẫn giải

* $y=\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}-1$

* $\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\ge 2$

* $y\ge 1\Rightarrow$ GTNN y = 1

* y = 1 $\Leftrightarrow \cos^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow \cos^4 x=1\Rightarrow \sin x=0\Rightarrow x=k\pi\,,k\in\mathbb{Z}$

Câu 49. Giải phương trình $\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=2$

Hướng dẫn giải

$$\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=2\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x=1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x.\cos\frac{\pi}{6}-\sin 2x.\sin\frac{\pi}{6}=1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{6}=k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\,,k\in\mathbb{Z}$$

Câu 50. Tìm tất cả giá trị thực m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt thuộc $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$: $\cot^2 x+2(m-1)\cot x-3m+1=0$

Hướng dẫn giải

* t = cotx , $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t>0$

* $\cot^2 x+2(m-1)\cot x-3m+1=0$ (1)

$\Leftrightarrow t^2+2(m-1)t-3m+1=0$ (2)

Pt(1) có 2 nghiệm phân biệt $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow$ pt(2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ keát quaû ñuùng : m < - 1 v 0 < m< $\dfrac{1}{3}$

Câu 51. Giải phương trình $(7+5\sqrt{2})^{\cos x}-(17+12\sqrt{2})^{\cos^3 x}=\cos 3x$

Hướng dẫn giải

Tập xác định: D = R.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$(1+\sqrt{2})^{3\cos x}-(1+\sqrt{2})^{4\cos^3 x}=4\cos^3 x-3\cos x$$

$$\Leftrightarrow (1+\sqrt{2})^{3\cos x}+3\cos x=4\cos^3 x+(1+\sqrt{2})^{4\cos^3 x}$$

Xét hàm số f(t) = $(1+\sqrt{2})^t+t$, ta có f(t) đồng biến với mọi t nên ta có: f(3cosx) = f(4cos^{3}x) ⇔ 3cosx = 4cos^{3}x

⇔ cos3x = 0 ⇔ x = $\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$, k ∈ Z

Câu 52. Tìm m để bất phương trình sau đúng với mọi x. | 1 + 2cosx| + | 1 + sin2x| ≤ 2m – 1

Hướng dẫn giải

Đặt f(x) = | 1 + 2cosx| + | 1 + 2sinx| . Bài toán trở thành: tìm m sao cho maxf(x) ≤ 2m – 1.

Ta có f^2(x) = 6 + 4(sinx + cosx) + 2| 1 + 2(sinx + cosx) + 4sinxcosx|

Đặt t = sinx + cosx, $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$. Ta có:

f^2(x) = g(t) = 6 + 4t + 2| 2t^2 + 2t – 1| với $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$.

Xét sự biến thiên của g(t) ta có: $\max\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} g(t)=4(\sqrt{2}+1)^2$

Vì f(x) ≥ 0 nên ta có:

maxf(x) = $\sqrt{\max f^2(x)}=\sqrt{\max g(t)}=2(\sqrt{2}+1)$

Vậy ta có: $2(\sqrt{2}+1)\le 2m-1 \Leftrightarrow m\ge\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 53. Rút gọn tổng S = $\frac{1}{\cos x\cos 2x}+\frac{1}{\cos 2x\cos 3x}+...+\frac{1}{\cos nx\cos(n+1)x}$ trong đó n là một số tự nhiên.

Câu 54. Biết rằng sin^2x + sin^2y = $\frac{1}{2}$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của S = tg^2x + tg^2y.

Câu 55. Rút gọn : P = $\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{3\pi}{2n+1}...\cos\frac{n\pi}{2n+1}$.

Câu 56. Chứng minh rằng nếu ta có $\frac{tg\alpha}{tg\beta}=\frac{1+\cos^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}$ thì $\sin(3\alpha+\beta)=7\sin(\alpha-\beta)$.

Câu 57. Trong tam giác ABC có $A = 36^0$, $AB = AC = 1$ và $BC = x$. Giả sử $x=\frac{p+\sqrt{q}}{2}$, hãy tìm cặp số nguyên (p, q).

Câu 58. Cho $\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$. Chứng minh rằng: $\frac{\sin^8 x}{a^3}+\frac{\cos^8 x}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}$, $(a > 0, b > 0)$.

Câu 59. Cho $tg^2xtg^2y+tg^2ytg^2z+tg^2ztg^2x+2tg^2xtg^2ytg^2z=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z$

Câu 60. Tính giá trị của biểu thức: $Q=\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}}+\dfrac{1}{\cos\dfrac{3\pi}{7}}+\dfrac{1}{\cos\dfrac{5\pi}{7}}$.

Câu 61. Cho tam giác ABC bất kỳ. Tìm đặc điểm của tam giác khi biểu thức $M=\cos\dfrac{A}{2}\sqrt{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 62. Cho các số thực *a, b, c* thoả mãn $a^2+b^2+c^2=4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a+b\sqrt{2}\sin x+c\sin 2x$, trong đó $x\in(0;\dfrac{\pi}{2})$.

Câu 63. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)=\dfrac{x}{2}+\sin^2 x$ với $x\in[\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}]$.

Câu 64. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=\left(1+\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)^n+\left(1+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^n$ với *n* là số tự nhiên.

Câu 65. Cho tam giác ABC thoả mãn: $2tgB = tgA + tgC$. Chứng minh rằng:

a) $B\geq\dfrac{\pi}{3}$, b) $\cos A+\cos C\leq\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 66. Cho tam giác ABC thoả mãn: $tg\dfrac{A}{2}tg\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông là $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{10}$.

Câu 67. Tính tổng S = $\sin 39^0+\sin 69^0+\sin 183^0+\sin 213^0$.

Câu 68. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{\cos\dfrac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\dfrac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\dfrac{6\pi}{7}}=\sqrt[3]{\dfrac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}$.

Câu 69. Cho *x, y, z, t* là các số thực nằm giữa $\dfrac{-\pi}{2}$ và $\dfrac{\pi}{2}$ thoả mãn:

$\begin{cases}\sin x+\sin y+\sin z+\sin t=1\\ \cos 2x+\cos 2y+\cos 2z+\cos 2t\geq\dfrac{10}{3}\end{cases}$. Chứng minh rằng: $0\leq x, y, z, t\leq\dfrac{\pi}{6}$.

Câu 70. Tìm GTNN của hàm số $y=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x},\quad x\in(0;\frac{\pi}{2})$.

Câu 71. Tìm GTNN, GTLN của hàm số: $y=\sin\frac{2x}{1+x^2}+\cos\frac{4x}{1+x^2}+1$.

Câu 72. Tìm GTLN, GTNN của hàm số: $y=\frac{2\cos^2 x+|\cos x|+1}{|\cos x|+1}$.

Câu 73. Cho tam giác ABC có $C=2B=4A$. Gọi *O, H* lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm của tam giác ABC. Tính tỷ số $\frac{OH}{R}$ trong đó *R* là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Câu 74. Cho tam giác ABC vuông ở *C*. Gọi *r* là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác, m_a, m_b lần lượt là độ dài các đường trung tuyến của tam giác kẻ từ *A, B*. Tìm giá trị lớn nhất của: $\frac{r^2}{m_a^2+m_b^2}$.

Câu 75. Giải các phương trình sau:

1/ $\sin^3 x+\cos^3 x+\sin^3 x\cot gx+\cos^3 xtgx=\sqrt{2\sin 2x}$.

2/ $2\cos x+\sqrt{2}\sin 10x=3\sqrt{2}+2\cos 28x.\sin x$.

3/ $\frac{\sin 3x}{3}=\frac{\sin 5x}{5}$.

4/ $2\sqrt{3}\sin(x-\frac{\pi}{8})\cos(x-\frac{\pi}{8})+2\cos^2(x-\frac{\pi}{8})=\sqrt{3}+4\left[\sin^2 x+\cos(\frac{\pi}{3}-x)\cos(\frac{\pi}{3}+x)\right]$

5/ $2\sin 5x(16\sin^4 x-20\sin^2 x+5)=1$.

6/ $(16\sin^4 x-20\sin^2 x+5)(16\sin^4 5x\_20\sin^2 5x+5=1$

Câu 76. Chứng minh rằng: $4\cos 36^0+\cot g7^0 30'=\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$

Câu 77. Cho $\frac{1}{tg^2 x}+\frac{1}{\cot g^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=7$. Tính $\sin^2 2x$.

Câu 78. Chứng minh rằng: $\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$.

Câu 79. Thu gọn tổng S $=tga.tg2a+tg2a.tg3a+...+tg(na).tg(n+1)a$.

Câu 80. Thu gọn P = (2cos*a*-1)(2cos2*a*-1)...$(2\cos 2^{n-1}a-1)$

Câu 81. Tính các tổng:

$S = \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{2\pi}{7}} + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{3\pi}{7}} + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{6\pi}{7}}$, P = $tg^8\dfrac{\pi}{18} + tg^8\dfrac{5\pi}{18} + tg^8\dfrac{7\pi}{18}$, R = $tg^6\dfrac{\pi}{18} + tg^6\dfrac{5\pi}{18} + tg^6\dfrac{7\pi}{18}$

Câu 82. Gọi *M* và *m* là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số *F(x)*=cos(2006*x*)+*k*cos(*x* $+\alpha)$ trong đó k,α là các tham số thực. Chứng minh rằng: $M^2 + m^2 \geq 2$

Câu 83. Hãy xác định dạng của tam giác ABC nếu các góc của tam giác ABC thoả mãn đẳng thức sau:

$$\frac{tg\dfrac{A}{2}}{1+tg\dfrac{B}{2}tg\dfrac{C}{2}} + \frac{tg\dfrac{B}{2}}{1+tg\dfrac{C}{2}tg\dfrac{A}{2}} + \frac{tg\dfrac{C}{2}}{1+tg\dfrac{A}{2}tg\dfrac{B}{2}} = \frac{1}{4tg\dfrac{A}{2}tg\dfrac{B}{2}tg\dfrac{C}{2}}$$

Câu 84.