Ta được $(v_n)\begin{cases} v_1 = 12 \\ v_2 = 30 \\ v_{n+2} = 5v_{n+1} - 6v_n \end{cases}$.

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ có nghiệm $\lambda = 2 \vee \lambda = 3$.

Khi đó $v_n = a.2^n + b.3^n$.

Ta có $\begin{cases} v_1 = 12 \\ v_2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 12 \\ 4a + 9b = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$.

Suy ra $v_n = 3.2^n + 2.3^n$.

Khi đó $u_n = v_n - 12 = 3.2^n + 2.3^n - 12$.

Ta có $u_n = 6\left(2^{n-1} + 3^{n-1} - 2\right)$ nên $u_n$ chia hết cho $6$.

Mặt khác $n$ là số nguyên tố nên theo định lý Fermat.

$\begin{cases} 2^n \equiv 2 (\bmod n) \\ 3^n \equiv 3 (\bmod n) \end{cases}$ hay $\begin{cases} 3.2^n \equiv 6 (\bmod n) \\ 2.3^n \equiv 6 (\bmod n) \end{cases}$.

Từ đó $u_n = (3.2^n + 2.3^n - 12) \equiv 0 (\bmod n)$.

Suy ra $u_n$ chia hết cho $n$.

Với $n$ là số nguyên tố và $n > 3 \Rightarrow (n,6) = 1$.

Suy ra $u_n$ chia hết cho $6n$.

**Bài 8.** Cho dãy số $(x_n)$ với $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+5)\left(x_n^2 + 5x_n + 8\right) + 16} \end{cases} \quad \left(n \in N^*\right)$.

a) Chứng minh $x_n > 5^{n-1}$, với mọi $n \geq 2$.

b) Đặt $y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k + 3}$. Tìm $\lim_{n \to +\infty} y_n$.

## Hướng dẫn giải

a) Chứng minh $x_n > 5^{n-1}$, với mọi $n \geq 2$.

$x_2 = 10 > 5 = 5^{2-1}$.

Giả sử ta có $x_n > 5^{n-1}$ $(n \geq 2)$.

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n\left(x_n+5\right)\left(x_n^{\ 2}+5x_n+8\right)+16}=\sqrt{\left(x_n^{\ 2}+5x_n\right)\left(x_n^{\ 2}+5x_n+8\right)+16}$$
$$=x_n^{\ 2}+5x_n+4>5x_n>5.5^{n-1}=5^n.$$

Suy ra $x_{n+1}>5^n$.

Vậy theo qui nạp $x_n>5^{n-1}$ với $\forall n\geq 2$.

b) Đặt $y_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k+3}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$.

Ta có:.

$x_{n+1}=x_n^{\ 2}+5x_n+4\Leftrightarrow x_{n+1}+2=x_n^2+5x_n+6=\left(x_n+2\right)\left(x_n+3\right)$.

$$\Rightarrow\frac{1}{x_{n+1}+2}=\frac{1}{\left(x_n+2\right)\left(x_n+3\right)}=\frac{1}{x_n+2}-\frac{1}{x_n+3}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{x_n+3}=\frac{1}{x_n+2}-\frac{1}{x_{n+1}+2}.$$

$$y_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k+3}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_k+2}-\frac{1}{x_{k+1}+2}\right)=\frac{1}{x_1+2}-\frac{1}{x_{n+1}+2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{x_{n+1}+2}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{x_{n+1}+2}\right)=\frac{1}{3}$ (vì $x_{n+1}>5^n\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{x_{n+1}}=0$).

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=\frac{1}{3}$.

**Bài 9.** Cho dãy số $(u_n)$ được xác định như sau:. $\begin{cases}u_1=2\\u_n=3u_{n-1}+2n^3-9n^2+9n-3,\forall n\geq 2\end{cases}$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố $p$ thì $2014\sum\limits_{i=1}^{p-1}u_i$ chia hết cho $p$.

## Hướng dẫn giải

Với mọi $n\geq 2$ ta có: $u_n+n^3=3\left(u_{n-1}+(n-1)^3\right)$.

Từ đó có: $u_n+n^3=3\left(u_{n-1}+(n-1)^3\right)=3^2\left(u_{n-2}+(n-2)^3\right)=...=3^{n-1}\left(u_1+1^3\right)=3^n$.

Vậy $u_n=3^n-n^3,\forall n\geq 2$, lại có $u_1=2=3^1-1^3$ nên $u_n=3^n-n^3,\forall n\geq 1$.

+ Nếu $p=2$: có ngay đpcm.

+ Nếu $p$ là số nguyên tố lẻ: $\sum\limits_{i=1}^{p-1}u_i=(3+3^2+...+3^{p-1})-\left(1^3+2^3+...+(p-1)^3\right)$.

$$=\frac{1}{2}(3^p-3)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p-1}\left[i^3+\left(p-1\right)^3\right]=\frac{1}{2}\left\{(3^p-3)+\sum_{i=1}^{p-1}\left[i^3+\left(p-i\right)^3\right]\right\}.$$

Theo Định lí Fermat nhỏ, suy ra $3^p-3$ chia hết cho $p$. Mặt khác $i^3+(p-i)^3$ cũng chia hết cho $p, \forall i=\overline{1,p-1}$ nên: $(3^p-3)+\sum_{i=1}^{p-1}\left[i^3+(p-i)^3\right]$ chia hết cho $p$. Từ đó.

$2014\sum_{i=1}^{p-1}u_i=1007\left\{(3^p-3)+\sum_{i=1}^{p-1}\left[i^3+(p-i)^3\right]\right\}$ chia hết cho $p$.

Vậy bài toán được chứng minh cho mọi trường hợp.

**Bài 10.** Cho dãy số $(x_n)$ xác định bởi $\begin{cases} x_0=20; x_1=30 \\ x_{n+2}=3x_{n+1}-x_n, \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$. Tìm $n$ để $x_{n+1}.x_n+1$ là số chính phương.

**Hướng dẫn giải**

Từ công thức truy hồi của $x_n$ ta có.

$\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+1}^2+x_n^2-3x_{n+1}x_n=x_{n+1}^2+x_n\left(x_n-3x_{n+1}\right)=x_{n+1}^2-x_{n+2}x_n$

và $x_{n+1}^2+x_n^2-3x_{n+1}x_n=x_{n+1}\left(x_{n+1}-3x_n\right)+x_n^2=x_n^2-x_{n+1}x_{n-1}$

*Suy* ra $x_{n+1}^2-x_{n+2}x_n=x_n^2-x_{n+1}x_{n-1}=\ldots=x_1^2-x_0x_2=-500$

$\Rightarrow x_{n+1}^2+x_n^2-3x_{n+1}x_n=-500$

$\Leftrightarrow x_{n+1}^2+x_n^2=3x_{n+1}x_n-500$

$\Leftrightarrow \left(x_{n+1}-x_n\right)^2=x_{n+1}x_n-500$

Vậy $x_{n+1}x_n-500$ là số chính phương.

Giả sử n là số thỏa mãn $x_{n+1}x_n-500$ là số chính phương.

Đặt $x_{n+1}x_n-500=b^2, x_{n+1}x_n+1=a^2, a,b\in\mathbb{N}, a>b$.

Ta có $a^2-b^2=501\Leftrightarrow(a-b)(a+b)=1.501=3.167$.

Khi đó ta tìm được $a=201, b=1$ thì $x_{n+1}x_n=12600\Rightarrow n=2$.

Với $a=85, b=82$ thì $x_{n+1}x_n=\dfrac{7224}{5}\Rightarrow\nexists n$.

Vậy $n=2$ thì $x_{n+1}.x_n+1$ là số chính phương.

**Bài 11.** Bài 3. Cho phương trình $x^2-\alpha x-1=0$ với $\alpha$ là số nguyên dương. Gọi $\beta$ là nghiệm dương của phương trình. Dãy số $(x_n)$ được xác định như sau $x_0=\alpha,\ x_{n+1}=[\beta x_n],\ n=0,1,2,3,\ldots$. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số tự nhiên $n$ sao cho $x_n$ chia hết cho $\alpha$.

**Hướng dẫn giải**

Đầu tiên ta chứng minh $\beta$ là số vô tỉ. Thật vậy, nếu $\beta$ là số hữu tỉ thì $\beta$ là số nguyên (do hệ số cao nhất của $x^2$ là 1) và $\beta$ là ước của 1. Do đó $\beta = 1$ suy ra $\alpha = 0$, trái giả thiết.

Do đó $[\beta x_{n-1}] < \beta x_{n-1} < [\beta x_{n-1}] + 1$.

$\Leftrightarrow x_n < \beta x_{n-1} < x_n + 1$.

$\Rightarrow \dfrac{x_n}{\beta} < x_{n-1} < \dfrac{x_n}{\beta} + \dfrac{1}{\beta} \Rightarrow x_{n-1} - \dfrac{1}{\beta} < \dfrac{x_n}{\beta} < x_{n-1}$.

$\Rightarrow \left[\dfrac{x_n}{\beta}\right] = x_{n-1} - 1$ (1). Lại có $\beta^2 - \alpha\beta - 1 = 0$, suy ra $\beta = \alpha + \dfrac{1}{\beta}$.

$\Rightarrow \beta x_n = \alpha x_n + \dfrac{x_n}{\beta} \Rightarrow x_{n+1} = \left[\alpha x_n + \dfrac{x_n}{\beta}\right] = \alpha x_n + \left[\dfrac{x_n}{\beta}\right] = \alpha x_n + x_{n-1} - 1$ (do (1)).

Vậy $x_{n+1} \equiv x_{n-1} - 1 \pmod{\alpha}$. Từ đó bằng quy nạp ta có với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2k+1$, thì $x_{n+1} \equiv x_{n-(2k+1)} - (k+1) \pmod{\alpha}$ (2).

Chọn $k + 1 = l\alpha$ $\left(l \in \mathbb{N}^*\right)$, $n + 1 = 2l\alpha$, từ (2) ta có.

$x_{2l\alpha} \equiv x_0 - l\alpha = \alpha - l\alpha \equiv 0 \pmod{\alpha}$.

Vậy $x_{2l\alpha}$ chia hết cho $\alpha$, $\forall l \in \mathbb{N}^*$..

**Bài 12.** Cho dãy số $(a_n)$ xác định bởi $\begin{cases} a_0 = a_1 = 2004 \\ a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n - 3978, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Chứng minh rằng $\dfrac{a_n + 10}{2014}$ là số chính phương.

**Hướng dẫn giải**

Ta có.

$$a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n - 3978 \Leftrightarrow \frac{a_{n+2} + 10}{2014} = 7.\frac{a_{n+1} + 10}{2014} - \frac{a_n + 10}{2014} - 2.$$

Đặt $v_n = \dfrac{a_n + 10}{2014}$. Ta được dãy số $(v_n)$ xác định bởi $\begin{cases} v_0 = v_1 = 1 \\ v_{n+2} = 7v_{n+1} - v_n - 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Ta phải chứng minh $v_n$ là số chính phương.

Thật vậy, xét dãy số $(x_n)$ xác định bởi $\begin{cases} x_0 = 1; x_1 = 1 \\ x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Hiển nhiên dãy số $(x_n)$ là dãy số nguyên.

Ta có
$$\begin{aligned}&\forall n\in\mathbb{N},\, x_{n+1}^2+x_n^2-3x_{n+1}x_n=x_{n+1}^2+x_n(x_n-3x_{n+1})\;=x_{n+1}^2-x_nx_{n+2}.\\&\text{và}\;\; x_{n+1}^2+x_n^2-3x_{n+1}x_n=x_{n+1}(x_{n+1}-3x_n)+x_n^2=x_n^2-x_{n+1}x_{n-1}.\\&\Rightarrow\; x_{n+1}^2-x_nx_{n+2}=\;x_n^2-x_{n+1}x_{n-1}=x_1^2-x_0x_2=-1.\\&\Rightarrow x_{n+1}^2+x_n^2-3x_{n+1}x_n=-1,\forall n\in\mathbb{N}.\qquad(2)\end{aligned}$$
.

Ta sẽ chứng minh $v_n=x_n^2,\forall n\in\mathbb{N}$ (1) bằng quy nạp.

Thật vậy, rõ ràng với $n=0, n=1$, (1) đúng.

Giả sử (1) đúng đến $n=k+1, k\in\mathbb{N}$, tức là $v_n=x_n^2, n=1,2,...,k+1$..

ta chứng minh (1) đúng với $n = k+2$, nghĩa là chứng minh $v_{k+2}=x_{k+2}^2$.

Thật vậy, theo công thức truy hồi của dãy số $(a_n)$, giả thiết quy nạp, tính chất (2) của dãy số $(x_n)$, công thức truy hồi của dãy số $(x_n)$, ta có.

$$\begin{aligned}v_{k+2}&=7v_{k+1}-v_k-2=7x_{k+1}^2-x_k^2-2=7x_{k+1}^2-x_k^2+2(x_{k+1}^2+x_k^2-3x_{k+1}x_k)\\&=9x_{k+1}^2-6x_{k+1}x_k+x_k^2\quad=(3x_{k+1}-x_k)^2\quad=x_{k+2}^2.\end{aligned}$$
.

Do đó $v_n$ là số chính phương. Vậy ta có điều phải chứng minh.

**Bài 13.** Cho dãy số $(x_n)$ được xác định bởi $x_n=2013n+a\sqrt[3]{8n^3+1},\forall n=1,2,...$ a là số thực

a)) Tìm a sao cho dãy số có giới hạn hữu hạn.

b) Tìm a sao cho dãy số $(x_n)$ là dãy số tăng (kể từ số hạng nào đó).

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có $x_n=(2a+2013)n+ay_n$, trong đó $y_n=\sqrt[3]{8n^3+1}-2n$.

$$=\frac{8n^3+1-(2n)^3}{\sqrt[3]{(8n^3+1)^2}+2n\sqrt[3]{8n^3+1}+4n^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{(8n^3+1)^2}+2n\sqrt[3]{8n^3+1}+4n^2}\to 0 \text{ Khi } n\to+\infty.$$

Do đó tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ khi và chỉ khi $a=-\frac{2013}{2}$.

b) Từ lý luận phần a) ta suy ra)

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\begin{cases}+\infty\; khi\;\; a>-\frac{2013}{2}\\0\; khi\;\; a=-\frac{2013}{2}\\-\infty\; khi\;\; a<-\frac{2013}{2}\end{cases}.$$

Bởi vậy điều kiện cần để tồn tại $m\in N^*$ sao cho $x_m<x_{m+1}<x_{m+2}<....$ là $a\geq-\frac{2013}{2}$.

Ta đi chứng minh $a \ge -\frac{2013}{2}$ là điều kiện đủ để có kết luận trên.

Thật vậy: Với $a \ge -\frac{2013}{2}$.

$$x_{n+1} - x_n = 2013(n+1) + a\sqrt[3]{8(n+1)^3+1} - 2013n - a\sqrt[3]{8n^3+1}$$
$$= 2013 + a(\sqrt[3]{8(n+1)^3+1} - \sqrt[3]{8n^3+1}) \ge$$
$$2013 - \frac{2013}{2}(\sqrt[3]{8(n+1)^3+1} - \sqrt[3]{8n^3+1}) = \quad .$$
$$\frac{2013}{2}[2 - (\sqrt[3]{8(n+1)^3+1} - \sqrt[3]{8n^3+1})] =$$
$$\frac{2013}{2}(2 + \sqrt[3]{8n^3+1} - \sqrt[3]{8(n+1)^3+1}) > 0$$

Vì.

$$(2 + \sqrt[3]{8n^3+1})^3 = 8 + 12\sqrt[3]{8n^3+1} + 6\left(\sqrt[3]{8n^3+1}\right)^2 + 8n^3 + 1 >$$
$$8 + 12.2n + 6(2n)^2 + 8n^3 + 1 = 8(1 + 3n + 3n^2 + n^3) + 1 \quad .$$
$$= 8(n+1)^3 + 1$$

Suy ra $x_1 < x_2 < x_3 < ....$.

Vậy dãy số $(x_n)$ là dãy số tăng kể từ số hạng nào đó với $a \ge -\frac{2013}{2}$ và trong trường hợp đó $(x_n)$ là dãy số tăng từ $x_1$.