$f(x)\le f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{2}\right)\le 2\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$.

$f(x)\le 2\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\Rightarrow f(x)\le f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{2}\right)\le 4\left(e^{\frac{x}{4}}-1\right)$.

Dùng quy nạp theo $n=1,2,...$ ta CM được $f(x)\le 2^n\left(e^{\frac{x}{2^n}}-1\right)$.

Cố định $x_0\in\mathbb{R}$ ta có $f(x_0)\le 2^n\left(e^{\frac{x_0}{2^n}}-1\right)$.

Xét dãy $a_n=2^n\left(e^{\frac{x_0}{2^n}}-1\right)$ ta có:.

$$\lim a_n=\lim\left[\frac{e^{\frac{x_0}{2^n}}-1}{\frac{x_0}{2^n}}.x_0\right]=x_0.$$

Vậy $f(x_0)\le x_0 \quad \forall x_0\in\mathbb{R} \qquad (2)$.

Vậy $f(x)+f(-x)\le x+(-x)=0 \qquad (3)$.

Kết hợp (1) và (3) ta được $f(x)+f(-x)=0$.

Từ (2) $\Rightarrow f(-x)\le -x\Rightarrow f(x)\ge x \quad (4)$. Kết hợp (2) và (4) ta được $f(x)=x\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại $f(x)=x$ ta thấy đúng. Vậy $f(x)+f(-x)\le x+(-x)=0 \qquad (3)$.

Kết hợp (1) và (3) ta được $f(x)+f(-x)=0$.

Từ (2) $\Rightarrow f(-x)\le -x\Rightarrow f(x)\ge x \quad (4)$. Kết hợp (2) và (4) ta được $f(x)=x\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại $f(x)=x$ ta thấy đúng.

Bài 11. Cho dãy số xác định bởi $\begin{cases} x_1=\dfrac{2015}{2016} \\ x_{n+1}=x_n+\left(\dfrac{x_n}{n}\right)^2, n\ge 1\end{cases}$. Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn.

Hướng dẫn giải

Trước hết, bằng quy nạp, ta dễ dàng có $x_n>0 \quad \forall n\ge 1$ và dãy số đã cho là dãy tăng.

Ta có :.

$x_2 = x_1 + x_1^2 < 2x_1;$

$x_3 = x_2 + \frac{x_2^2}{4} < 2x_1 + x_1^2 < 3x_1;$.

Giả sử $x_k < kx_1$ với $k > 1$. Ta có: $x_{k+1} = x_k + \frac{x_k^2}{k^2} < kx_1 + x_1^2 < (k+1)x_1$.

Theo nguyên lý quy nạp ta có $x_n < nx_1 \quad \forall n > 1$.

Ta có : $x_m < m-1 \quad \forall m \geq 2017$ thật vậy : $mx_1 < m-1 \Leftrightarrow m\left(1-x_1\right) > 1 \Leftrightarrow m > \frac{1}{1-x_1} \Leftrightarrow m > \frac{1}{1-\frac{2015}{2016}} \Leftrightarrow m > 2016$;.

Do đó $x_m < mx_1 < m-1$.

Ta có với $\forall n \geq 2$ thì $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{x_{n+1}-x_n}{x_n x_{n+1}} = \frac{\frac{x_n^2}{n^2}}{x_n x_{n+1}} = \frac{x_n}{n^2 x_{n+1}} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

Do đó $\forall n \geq 2018$ thì $\frac{1}{x_{2017}} - \frac{1}{x_n} = \sum_{i=0}^{n-2018}\left(\frac{1}{x_{2017+i}} - \frac{1}{x_{2018+i}}\right) < \sum_{i=0}^{n-2018}\left(\frac{1}{2016+i} - \frac{1}{2017+i}\right) = \frac{1}{2016} - \frac{1}{n-1} < \frac{1}{2016}$.

Suy ra $\frac{1}{x_n} > \frac{1}{x_{2017}} - \frac{1}{2016} > 0 \Rightarrow x_n < \frac{2016x_{2017}}{2016 - x_{2017}}$.

Vậy dãy đã cho tăng và bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn.

Bài 12. Cho dãy số (u_n) xác định như sau $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$.

a) Xác định số hạng tổng quát u_n.

b) Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Hướng dẫn giải

Biến đổi ta được: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n - u_{n-1}\right)$ với $v_{n+1} = u_{n+1} - u_n$ khi đó: $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n, \forall n \geq 2$.

nghĩa là dãy $v_2, v_3, \ldots v_n, \ldots$ là một cấp số cộng của $v_2 = 1; q = \frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} v_n = u_n - u_{n-1} \\ v_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-2} \\ \text{........................} \\ v_2 = u_2 - u_1 \end{array}\right\} \to u_n - u_1 = v_2 + v_3 + \dots v_n$$
.

$$\Leftrightarrow u_n = 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty}\left(3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) = 3.$$

Bài 13. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau.

$u_1 = 2011; u_{n-1} = n^2(u_{n-1} - u_n),.$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

Từ công thức truy hồi của dãy ta được.

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)u_{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(n-1)^2}\right)u_{n-2} = \dots = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(n-1)^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)u_1.$$

Do đó $u_n = \frac{(n+1)(n-1)}{n^2}.\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\dots\frac{4.2}{3^2}.\frac{3.1}{2^2}.2011 = \frac{n+1}{2n}.2011$. Từ đó $\lim u_n = \frac{2011}{2}$.

Bài 14. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $(u_1) = 2014, u_{n+1} = \frac{u_n^4 + 2013^2}{u_n^3 - u_n + 4026}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k^3 + 2013}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $\lim v_n$.

Hướng dẫn giải

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $(u_1) = 2014, u_{n+1} = \frac{u_n^4 + 2013^2}{u_n^3 - u_n + 4026}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k^3 + 2013}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $\lim v_n$.

Ta có $u_{n+1} - 2013 = \frac{u_n^4 + 2013^2}{u_n^3 - u_n + 4026} - 2013 = \frac{(u_n - 2013)(u_n^3 + 2013)}{u_n(u_n^2 - 1) + 4026}$.

Từ đó bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n > 2013, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_{n+1}-2013=\frac{(u_n-2013)(u_n^3+2013)}{(u_n^3+2013)-(u_n-2013)} \qquad (1).$$

Từ (1) suy ra $\frac{1}{u_{n+1}-2013}=\frac{1}{u_n-2013}-\frac{1}{u_n^3+2013}\Rightarrow\frac{1}{u_n^3+2013}=\frac{1}{u_n-2013}-\frac{1}{u_{n+1}-2013}$.

Do đó $v_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{u_k-2013}-\frac{1}{u_{k+1}-2013}\right)=\frac{1}{u_1-2013}-\frac{1}{u_{n+1}-2013}=1-\frac{1}{u_{n+1}-2013}$.

Ta chứng minh $\lim u_n=+\infty$.

Thật vậy, ta có $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2-4026u_n+2013^2}{u_n^3-u_n+4026}=\frac{(u_n-2013)^2}{u_n^3-u_n+4026}>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Suy ra (u_n) là dãy tăng, ta có $2014=u_1<u_2<\ldots$.

Giả sử ngược lại (u_n) bị chặn trên và (u_n) là dãy tăng nên $\lim u_n=a<+\infty$ thì $a>2014$. Khi đó $a=\frac{a^4+2013^2}{a^3-a+4026}\Rightarrow a=2013<2014$ (vô lý). Suy ra (u_n) không bị chặn trên, do đó $\lim u_n=+\infty$.

Vậy $\lim v_n=\lim\left(1-\frac{1}{u_{k+1}-2013}\right)=1$.

Bài 15. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) biết.

$$\begin{cases} u_1=\frac{1}{2} \\ u_2=673 \\ u_{n+2}=\frac{2(n+2)^2u_{n+1}-(n^3+4n^2+5n+2)u_n}{n+3} \quad (n\in\mathbb{N},n\geq 1) \end{cases}.$$

Hướng dẫn giải

Vì $u_{n+2}=\frac{2(n+2)^2u_{n+1}-(n^3+4n^2+5n+2)u_n}{n+3}$ nên ta có:.

$(n+3)u_{n+2}=2(n+2)^2u_{n+1}-(n+2)(n+1)^2u_n$.

$\Leftrightarrow\frac{n+3}{n+2}u_{n+2}=2(n+2)u_{n+1}-(n+1)^2u_n$.

$\Leftrightarrow\frac{n+3}{n+2}u_{n+2}=(n+3)u_{n+1}+(n+1)u_{n+1}-(n+1)^2u_n.$.

Đặt $u_n=n!v_n$, $n\in\mathbb{N},n\geq 1$ thu được.

$(n+3)v_{n+2}=(n+3)v_{n+1}+(n+1)v_{n+1}-(n+1)v_n$.

$\Leftrightarrow (n+3)(v_{n+2}-v_{n+1})=(n+1)(v_{n+1}-v_n)$..

Đặt $w_n=v_n-v_{n-1},\ n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ thu được.

$(n+1)w_n=(n-1)w_{n-1}$.

$\Leftrightarrow (n+1)nw_n=n(n-1)w_{n-1}$.

Do đó.

$$\begin{aligned}(n+1)nw_n&=n(n-1)w_{n-1}=(n-1)(n-2)w_{n-2}=...=3.2.w_2\\&=6(v_2-v_1)=2016.\end{aligned}.$$

Như vậy $w_n=\dfrac{2016}{n(n+1)}=2016\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right), n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

Từ đó, với $n\in\mathbb{N}, n\geq 1$, ta có.

$v_n-v_1=2016\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}\right)=2016\dfrac{n-1}{n+1}$.

$\Leftrightarrow v_n=\dfrac{4033n-4031}{2(n+1)}$.

Vậy $u_n=n!\dfrac{4033n-4031}{2(n+1)},\ n\in\mathbb{N}, n\geq 1$.

Bài 16. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=1;\ \mathrm{u}_{n+1}=\dfrac{3}{2}\left(u_n-\dfrac{n+4}{n^2+3n+2}\right), \forall n\in \mathrm{N}^*$.

Tìm công thức số hạng tổng quát u_n của dãy số theo n.

Hướng dẫn giải

Vì $\mathrm{u}_{n+1}=\dfrac{3}{2}\left(u_n-\dfrac{n+4}{n^2+3n+2}\right)$ nên.

$2\mathrm{u}_{n+1}-3u_n=-\dfrac{3}{2}.\dfrac{n+4}{n^2+3n+2}=\dfrac{-1,5n-6}{(n+1)(n+2)}$.

$\Leftrightarrow 2\mathrm{u}_{n+1}-3u_n=2.\dfrac{1,5}{n+2}-3.\dfrac{1,5}{n+1}$.

$\Leftrightarrow 2\mathrm{u}_{n+1}-2.\dfrac{1,5}{n+2}=3u_n-3.\dfrac{1,5}{n+1}$.

$\Leftrightarrow \left(\mathrm{u}_{n+1}-\dfrac{1,5}{n+2}\right)=\dfrac{3}{2}\left(u_n-3.\dfrac{1,5}{n+1}\right)$.

Đặt $v_n = u_n - \frac{1,5}{n+1}$, khi đó ta có: $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n$.

Lại có: $v_1 = u_1 + \frac{1,5}{2} = \frac{1}{4}$.

Từ đẳng thức trên ta có công thức tổng quát của dãy (v_n) là: $v_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.\frac{1}{4}$.

Từ đó ta có công thức tổng quát của dãy (u_n) là: $u_n = v_n + \frac{1,5}{n+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.\frac{1}{4} + \frac{3}{2(n+1)}$.

Bài 17. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{3u_n{}^2 + 2}$ với mọi $n \geq 1$.

a) Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

b) Tính tổng $S = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + ... + u_{2011}^2$.

Hướng dẫn giải

a) Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in N^*$.

Từ $u_{n+1} = \sqrt{3u_n^2 + 2} \Leftrightarrow u_{n+1}^2 = 3u_n^2 + 2$.

Đặt $v_n = u_n^2$ thì có: $v_{n+1} = 3v_n + 2 \Leftrightarrow v_{n+1} + 1 = 3(v_n + 1)$.

Đặt $x_n = v_n + 1$ thì ta có: $x_{n+1} = 3x_n$. Từ đây suy ra (x_n) là cấp số nhân với $x_1 = 2$, công bội là 3.

Nên: $x_n = 2.3^{n-1} \Rightarrow v_n = 2.3^{n-1} - 1 \Rightarrow u_n = \sqrt{2.3^{n-1} - 1}$.

b) $S = 2.3^0 + 2.3^1 + 2.3^2 + ... + 2.3^{2010} - 2011$.

$= 2(3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^{2010}) - 2011$.

$= \frac{2(3^{2011} - 1)}{3 - 1} - 2011 = 3^{2011} - 2012$.

Bài 18. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + 2^n$ với mọi $n \geq 1$.

a) Chứng minh rằng: $u_n = 2^n - 1$.

b) Tính tổng $S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ theo n.

Hướng dẫn giải

a) Khi $n = 1$: $u_2 = u_1 + 2^1 = 1 + 2 = 2^2 - 1$ đúng.