$\Leftrightarrow L^p = a \Leftrightarrow L = \sqrt[p]{a}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt[p]{a}$.

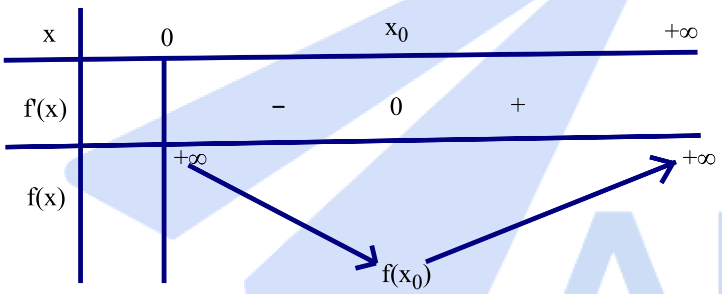
Bài 8. Cho trước số thực dương α và xét dãy số dương (x_n) thỏa mãn $x_{n+1}^{\alpha} + \dfrac{1}{x_n} < (\alpha+1)\alpha^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy (x_n) hội tụ và tìm giới hạn của nó.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(x) = x^{\alpha} + \dfrac{1}{x}, x > 0$.

Ta có $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\alpha x^{\alpha+1} - 1}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = \alpha^{-\frac{1}{\alpha+1}}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm f(x):.



Suy ra $f(x) \ge f(x_0) = \alpha^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} + \alpha^{\frac{1}{\alpha+1}} = (\alpha+1)\alpha^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}$.

Do đó $x_{n+1}^{\alpha} + \dfrac{1}{x_n} < (\alpha+1)\alpha^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \le x_{n+1}^{\alpha} + \dfrac{1}{x_{n+1}}$.

Suy ra $x_{n+1} < x_n$ hay (x_n) là dãy giảm. Kết hợp với $x_n > 0$ với mọi n ta suy ra dãy (x_n) hội tụ.

Đặt $\lim x_n = \beta > 0$. Chuyển qua giới hạn ta được $\beta^{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} \le (\alpha+1)\alpha^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \Rightarrow \beta = x_0$.

Vậy $\lim x_n = \alpha^{-\frac{1}{\alpha+1}}$.

Bài 9. Tìm tất cả các hằng số $c > 0$ sao cho mọi dãy số dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_n \in (0;1) \\ u_{n+1}(1-u_n) > c \end{cases} \quad \forall n \ge 1$ đều hội tụ. Với giá trị c tìm được hãy tính giới hạn của dãy (u_n).

Hướng dẫn giải

Ta xét các trường hợp sau.

+ Nếu $c > \frac{1}{4}$, thì từ giả thiết, ta có $u_{n+1} > \frac{c}{1-u_n} = \frac{cu_n}{u_n(1-u_n)} \geq 4cu_n;\ \forall n \geq 1$.

Từ đây bằng quy nạp, ta suy ra $u_n > (4c)^{n-1}u_1$. Do $4c > 1$ nên $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$. Do đó, $c > \frac{1}{4}$ không thỏa mãn.

+ Nếu $0 < c < \frac{1}{4}$, thì tồn tại $a, b \in \left(\frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}; \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}\right)$, $a < b$ sao cho $\begin{cases} a(1-b) > c \\ b(1-a) > c \end{cases}$. Thật vây, lấy $a \in \left(\frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}; \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}\right)$, đặt $b = a + x\ \ (x > 0)$, thì.

$a(1-b) > c \Leftrightarrow a(1-a-x) > c \Leftrightarrow x < \frac{a(1-a)-c}{a}$.

Chú ý là $b(1-a) > a(1-a) > c.$ Do đó, ta chỉ cần chọn $x > 0$ như trên và $b = a + x,$ thì được 2 bất đẳng thức nêu trên.

Xét dãy số (u_n) xác định bởi.

$u_n = \begin{cases} a & khi\ \ n = 2m \\ b & khi\ \ n = 2m+1 \end{cases}$.

thì dãy (u_n) thỏa mãn giả thiết nhưng không hội tụ. Thành thử, $0 < c < \frac{1}{4}$ cũng không thỏa mãn.

+ Nếu $c = \frac{1}{4}$, thì $u_{n+1} > \frac{1}{4(1-u_n)} = \frac{u_n}{4u_n(1-u_n)} \geq u_n$. Suy ra dãy (u_n) tăng và bị chặn. Do đó, (u_n) hội tụ.

Đặt $x = \lim u_n$, thì từ giả thiết ta có $x(1-x) \geq \frac{1}{4}$ hay $x = \frac{1}{2}$. Vậy $\lim u_n = \frac{1}{2}$..

Bài 10. Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $u_1 = 2$, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm giới hạn của dãy (s_n) với $s_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + ... + \frac{1}{u_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Hướng dẫn giải

Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n \geq 2$.

Xét tính đơn điệu của dãy (u_n). Từ hệ thức $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$ ta suy ra được $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)^2 > 0$, vậy dãy số (u_n) tăng.

Tính tổng: Từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được $u_{n+1}-1=u_n\left(u_n-1\right)$.

$$\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}-1}=\frac{1}{u_n\left(u_n-1\right)}=\frac{1}{u_n-1}-\frac{1}{u_n} \Rightarrow \frac{1}{u_n}=\frac{1}{u_n-1}-\frac{1}{u_{n+1}-1} \quad (*) \text{ với } n\in\mathbb{N}^*.$$

Thay n bởi 1, 2, 3,., n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra :.

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+...+\frac{1}{u_n}=1-\frac{1}{u_{n+1}-1}.$$

Do dãy $\left(u_n\right)$ là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:.

1) Dãy $\left(u_n\right)$ bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, nên $\left(u_n\right)$ tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn. Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=a \Rightarrow a\ge 2$. Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n\to+\infty$ ta có: $a=a^2-a+1 \Leftrightarrow a^2-2a+1=0 \Leftrightarrow a=1$, vô lý.

2) Dãy không bị chặn trên, do $\left(u_n\right)$ tăng và không bị chặn trên nên $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n-1\right)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{u_n}=0$.

Vì thế từ (2) ta suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+...+\frac{1}{u_n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{u_n}\right)=1$.

Bài 11. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn : $u_0=2016; u_{n+1}=u_n+\frac{1}{u_n^2}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n^3}{n}$.

Hướng dẫn giải

$$(u_{n+1})^3=\left(u_n+\frac{1}{u_n^2}\right)^3=u_n^3+3+\frac{3}{u_n^3}+\frac{1}{u_n^6}.$$

Do $u_n>0\ \forall n$ => $(u_{n+1})^3=u_n^3+3+\frac{3}{u_n^3}+\frac{1}{u_n^6}>u_n^3+3, \forall n$.

suy ra $(u_n)^3>u_0^3+3n=2016^3+3n, \forall n\in\mathbb{N}$ (1).

Lại có.

$$(u_{n+1})^3=\left(u_n+\frac{1}{u_n^2}\right)^3=u_n^3+3+\frac{3}{u_n^3}+\frac{1}{u_n^6}$$
$$<u_n^3+3+\frac{3}{2016^3+3n}+\frac{1}{\left(2016^3+3n\right)^2}<u_n^3+3+\frac{1}{n}+\frac{1}{(3n)^2}.$$

=> $(u_{n+1})^3<u_n^3+3+\frac{1}{n}+\frac{1}{(3n)^2}\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Suy ra.

$$(u_n)^3 < u_1^3 + 3(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{9k^2} < u_1^3 + 3n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{9k^2}.$$

Do $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n} < 2$.

và $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2 \le n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 2n$ (*Bất đẳng thức Bunhiacopxki*).

suy ra $(u_n)^3 < u_1^3 + 3n + \frac{2}{9} + \sqrt{2n}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra.

$$2016^3 + 3n < (u_n)^3 < u_1^3 + 3n + \frac{2}{9} + \sqrt{2n} \quad ,\forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{2016^3}{n} + 3 < \frac{(u_n)^3}{n} < \frac{u_1^3}{n} + 3 + \frac{2}{9n} + \sqrt{\frac{2}{n}} \quad ,\forall n \in \mathbb{N}.$$

Do đó $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n^3}{n} = 3$.

Bài 12. Cho số thực a, xét dãy số (x_n) xác định bởi: $x_1 = a,\ x_{n+1} = \ln(3 + \cos x_n + \sin x_n) + 2014,\ n = 1, 2...$ Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$..

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = \ln(3 + \sin x + \cos x) + 2014, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{3 + \sin x + \cos x}.$$

$$\Rightarrow 3f'(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}f'(x)\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 9(f'(x))^2 \le 2 + 2(f'(x))^2 \Rightarrow |f'(x)| \le \sqrt{\frac{2}{7}} = q, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Áp dụng định lí Lagrange cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thì với mọi số thực *x,y* tồn tại $z \in \mathbb{R}$ sao cho:.

$$|f(x) - f(y)| \le |f'(z)||x - y| \le q|x - y| \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le q|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Với $m > n\left(m, n \in \mathbb{N}^*\right)$, ta có: $|x_m - x_n| = |f(x_{m-1}) - f(x_{n-1})| \le q|x_{m-1} - x_{n-1}| \le ... \le q^{m-n-1}|x_{m-n+1} - x_1|$.

Mặt khác: $2014 < x_n < 2014 + \ln 5, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (x_n)$ bị chặn.

Do đó: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* : q^{m-n-1}\left|x_{m-n+1} - x_1\right| < \varepsilon, \forall m > n \geq N.$.

Vậy (x_n) là dãy Cauchy, nên dãy số đã cho hội tụ.

Bài 13. Cho hai dãy số $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ xác định như sau: $u_1 = 1, v_1 = 2,$ và $u_n = \dfrac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}, v_n = \sqrt{u_n v_{n-1}}$ khi $n \geq 2$. Chứng minh rằng hai dãy $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

Ta có $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ suy ra $u_1 = \cos\dfrac{\pi}{3} v_1$ mà $a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}$ khi $n \geq 2$.

Suy ra $u_2 = \dfrac{u_1 + v_1}{2} = 2\cos^2\dfrac{\frac{\pi}{3}}{2}, v_2 = \sqrt{u_2 v_1} = 2\cos\dfrac{\frac{\pi}{3}}{2}$.

$$u_3 = \frac{u_2 + v_2}{2} = 2\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{2}\cos^2\frac{\frac{\pi}{3}}{4}, v_3 = \sqrt{u_3 v_2} = 2\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{\pi}{3}.$$

bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được.

$$u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} = 2\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{2^2}\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{2^3}....\cos^2\frac{\frac{\pi}{3}}{2^{n-1}}.$$

$$v_n = \sqrt{u_n v_{n-1}} = 2\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{2^2}\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{2^3}....\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{2^{n-1}}.$$

Mặt khác $\cos\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$ nên ta có.

$$u_n = 2\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{2\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{2}}.\frac{\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{2}}{2\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{2^2}}....\frac{\sin^2\frac{\frac{\pi}{3}}{2^{n-2}}}{2^2\sin^2\frac{\frac{\pi}{3}}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2^{n-2}}\sin\frac{\pi}{3}\cot\frac{\frac{\pi}{3}}{2^{n-1}}.$$

$$v_n = 2\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{2\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{2}}.\frac{\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{2}}{2\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{2^2}}.......\frac{\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{2^{n-2}}}{2\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2^{n-2}}\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{2^{n-1}}}.$$

Do đó.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{n-2}}\sin\frac{\pi}{3}\cot\frac{\frac{\pi}{3}}{2^{n-1}}\right) = 2\sin\frac{\pi}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cot\frac{\frac{\pi}{3}}{2^{n-1}}}{2^{n-1}}\right).$$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\frac{\pi}{3}}{2^{n-1}}}{\tan\frac{\frac{\pi}{3}}{2^{n-1}}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$$

Bài 14. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $Q_n(x) = \prod_{i=0}^{n}\left(x - i^2\right)$.

a) Chứng minh đa thức $Q_n'(x)$ có duy nhất 1 nghiệm thực x_n thuộc $(0;1)$.

b) Chứng minh tồn tại giới hạn của dãy $\{x_n\}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $Q_n(0) = Q_n(1) = Q_n\left(2^2\right) = ... = Q_n\left(n^2\right) = 0$.

nên trong mỗi khoảng $(0;1)$, $(1;4),...,\left((n-1)^2;n^2\right)$ có 1 nghiệm của phương trình $Q_n'(x) = 0$
.

Mặt khác, ta có $\det Q_n'(x) = n$ nên đa thức $Q_n'(x)$ có duy nhất 1 nghiệm x_n thuộc khoảng $(0;1)$..

b) Ta có $Q_n'(x) = Q_n(x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1^2} + ... + \frac{1}{x-n^2}\right)$.

Do $Q_n'(x)$ có nghiệm không là nghiệm của $Q_n(x)$ nên nghiệm của phương trình $Q_n'(x) = 0$ là nghiệm của phương trình:.

$f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1^2} + ... + \frac{1}{x-n^2} = 0$.

Ta có: $f_n'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} + ... + \frac{1}{\left(x-n^2\right)^2} < 0$.

Nên $f_n(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Lại có: $f_n(x_n) = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n - 1^2} + ... + \frac{1}{x_n - n^2} = 0$.

$\Rightarrow \frac{1}{x_n - (n+1)^2} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n - 1^2} + ... + \frac{1}{x_n - n^2} + \frac{1}{x_n - (n+1)^2} < 0$.

$\Rightarrow f_{n+1}(x_n) < 0 = f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) \Rightarrow x_n > x_{n+1}$.

Do đó dãy $\{x_n\}$ là dãy giảm.

Lại có $x_n \in (0;1)$. Vậy dãy $\{x_n\}$ có giới hạn.

Bài 15. Cho $x_1 = a,\ x_2 = b\ (a,b\in\mathbb{R})$ và $n.x_{n+2} - (n-1).x_{n+1} - x_n = 0$, $n = 1,2,...$ Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Hướng dẫn giải

Ta có $x_{n+2} - x_{n+1} = -\dfrac{x_{n+1} - x_n}{n}$.

$$\Rightarrow x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n!}(x_2 - x_1) = -\frac{(-1)^n}{n!}.(b-a).$$

$$\Rightarrow x_{n+2} = x_1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.(b-a) = x_1 + (a-b) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.(b-a).$$

$$\Rightarrow \lim x_n = x_1 + a - b - \frac{1}{e} = 2a - b - \frac{1}{e}.$$

Bài 16. Cho dãy (u_n) axác định bởi: $u_1 = 2; u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Tìm M nhỏ nhất thỏa mãn $\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + ... + \dfrac{1}{u_n} < M, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Hướng dẫn giải

Ta có $u_1 = 2 > 1$ và $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + u_n$. Chứng minh bằng quy nạp ta được $u_n > 2, \forall n\in\mathbb{N}, n\ge 2$ (*).

Ta lại có: $u_{i+1} = u_i^2 - u_i + 1 \Rightarrow u_{i+1} - 1 = u_i(u_i - 1)$.

$$\Rightarrow \frac{1}{u_{i+1}-1} = \frac{1}{u_i - 1} - \frac{1}{u_i} \Rightarrow \frac{1}{u_i} = \frac{1}{u_i - 1} - \frac{1}{u_{i+1}-1}.$$

Do đó: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{u_i} = \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1}-1} = 1 - \frac{1}{u_{n+1}-1} \overset{(*)}{<} 1, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Suy ra $M \le 1$.

Mặt khác, chứng minh bằng quy nạp ta được dãy (u_n) tăng. Do đó nếu dãy có giới hạn hữu hạn L thì $L > 2$. Vì phương trình $L = L^2 - L + 1$ có duy nhất nghiệm là $L = 1$, bởi vậy dãy (u_n) không có giới hạn hữu hạn. Suy ra $\lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{u_i}\right) = 1$ (**).

Với mọi $a < 1$ thì từ $\lim\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{u_i}\right) = 1$ suy ra tồn tại n_0 sao cho $\displaystyle\sum_{i=1}^{n_0}\frac{1}{u_i} > a$. Do đó $M \ge 1 \Rightarrow M = 1$

.

Bài 17. Cho 4028 số thực: $a_1, a_2, ..., a_{2014}$, $b_1, b_2, ..., b_{2014}$. Xét dãy số (x_n) xác định như sau:.

$$x_n = \sum_{i=1}^{2014} [a_i.n + b_i], (n = 1, 2, 3, ...).$$

Biết dãy số lập thành một cấp số cộng, chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{2014} a_i$ là số nguyên (với $[a]$ là phần nguyên của số thực a – số nguyên lớn nhất không vượt quá a).

Hướng dẫn giải

Đặt $A = \sum_{i=1}^{2014} a_i$, $B = \sum_{i=1}^{2014} b_i$. Gọi d là công sai của cấp số cộng (x_n), thì: $n.d = x_{n+1} - x_1$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có: $a_i.n + b_i - 1 < [a_i.n + b_i] \le a_i.n + b_i, i = 1, 2, ..., 2014$.

Cộng vế với vế của 2014 bất đẳng thức cùng chiều, ta được:.

$A.n + B - 2014 < x_n \le A.n + B$.

Thay n bởi $n+1$ và thay n bởi 1, có:.

$A(n+1) + B - 2014 < x_{n+1} \le A(n+1) + B$.

$A + B - 2014 < x_1 \le A + B \Rightarrow -A - B \le -x_1 < -A - B + 2014$.

Cộng vế với vế của 2 bất đẳng thức cùng chiều nói trên thu được:.

$A.n - 2014 < x_{n+1} - x_1 < A.n + 2014$.

$\Leftrightarrow A.n - 2014 < n.d < A.n + 2014$.

$\Leftrightarrow |d.n - A.n| < 2014$.

$\Leftrightarrow |d - A| < \dfrac{2014}{n}$.

Vì $\lim \dfrac{2014}{n} = 0$ nên suy ra $d = A$. Mặt khác dãy (x_n) gồm toàn số nguyên nên công sai d cũng là số nguyên. Vậy A nguyên. (đpcm).

Bài 18. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{x_n^2}{n^2}; \forall n \ge 1 \end{cases}$. Chứng minh dãy số trên có giới hạn.

Hướng dẫn giải

*) Ta chứng minh $x_n + n^2 \ge \dfrac{n(n+1)}{\sqrt{2}}$ với mọi $n \ge 1$ (1).