Điều đó chứng tỏ a_n luôn chia hết cho n với mọi n nguyên dương.

b) Gọi r_n là số dư của b_n cho 2015 với $n=1;2;3\ldots$.

Trước tiên ta chứng minh (r_n) là một dãy tuần hoàn. Thật vậy: Ta có $b_{n+2}=b_{n+1}+b_n \Rightarrow r_{n+2}\equiv r_{n+1}+r_n \pmod{2015}$..

Vì có vô hạn các cặp $(r_1;r_2)$, $(r_2;r_3)$, ., $(r_n;r_{n+1})$ nhưng chỉ nhận hữu hạn giá trị khác nhau nên tồn tại ít nhất hai phần tử của dãy trùng nhau. Ta giả sử là $(r_m;r_{m+1})=(r_{m+T};r_{m+T+1})$ (với T là một số nguyên dương).

Ta chứng minh (r_n) tuần hoàn với chu kỳ T..

+) Ta có: $r_{m+2}\equiv r_{m+1}+r_m \pmod{2015}$; $r_{m+T+2}=r_{m+T+1}+r_{m+T} \pmod{2015}$.

$\Rightarrow r_{m+2}\equiv r_{m+T+2} \pmod{2015} \Rightarrow r_{m+2}=r_{m+T+2}$..

Tiếp tục như vậy ta chứng minh được: $r_{m+k}=r_{m+T+k}$ với mọi $k\ge 0$. (1).

+) Ta có: $r_{m-1}\equiv r_{m+1}-r_m \pmod{2015}$; $r_{m+T-1}\equiv r_{m+T+1}-r_{m+T} \pmod{2015}$.

$\Rightarrow r_{m-1}\equiv r_{m+T-1} \pmod{2015}$.

$\Rightarrow r_{m-1}=r_{m+T-1}$..

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $r_{m-k}=r_{m+T-k}$ với $k=1;2;3;\ldots;m-1$. (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(r_n), n>0$ là một dãy tuần hoàn.

Bổ sung vào dãy (b_n) phần tử $b_0=0$ thỏa mãn $b_0+b_1=b_2$ suy ra $r_0=0$..

Khi đó dãy (r_n) là dãy tuần hoàn bắt đầu từ phần tử đầu tiên $r_0=0$. Do đó tồn tại vô số phần tử trong dãy (r_n) bằng 0.Như vậy câu b) được chứng minh xong.

Bài 7. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $u_0=0,\ u_1=1,\ u_{n+2}=2u_{n+1}+u_n,\ n=0,1,2,\ldots$ Chứng minh rằng $2^{2014}\,|\,u_n$ khi và chỉ khi $2^{2014}\,|\,n$.

Hướng dẫn giải

Công thức tổng quát $u_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n-\left(1-\sqrt{2}\right)^n\right)$.

Đặt $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=a,\ \left(1-\sqrt{2}\right)^n=b\Rightarrow ab=(-1)^n$.

Ta có $u_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(a-b)$, $u_{2n}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(a^2-b^2\right)=u_n(a+b)$.

Đặt $S_n = a + b = \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n$. Khi đó ta được dãy (S_n) được xác định như sau: $S_1 = 2$, $S_2 = 6,\ S_{n+2} = 2S_{n+1} - S_n,\ n = 1, 2, \ldots$.

Do $S_1 \equiv 2 \pmod 4),\ S_2 \equiv 2 \pmod 4$ nên bằng quy nạp ta được: $S_n \equiv 2 \pmod 4$ hay $a + b \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow a + b = 2t, (t,2) = 1$.

Do đó $u_{2n} = 2u_n.t,\ (t,2) = 1$.

Giả sử $n = 2^k.t,\ (t,2) = 1 \Rightarrow u_n = u_{2^k.t} = 2^k.u_t.A_k$, trong đó u_t, A_k đều lẻ.

Bài 8. Cho dãy số $(a_n): a_1 \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = a_n^3 + 2019,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh có nhiều nhất 1 số hạng của dãy là số chính phương.

Hướng dẫn giải

So sánh đồng dư của a_n, a_{n+1} và a_{n+2} theo modun 4 ta có (chú ý $2019 \equiv 3 \pmod 4$).

a_n	0	1	2	3
a_{n+1}	3	0	3	2
a_{n+2}	2	3	2	3

Một số chính phương khi chia 4 có số dư là 0 hoặc 1.

Vì vậy từ số hạng thứ 3 trở đi, dãy không có số chính phương nào.

Nếu cả a_1 và a_2 đều chính phương, giả sử $a_1 = a^2,\ a_2 = b^2$,.

suy ra $b^2 = a^6 + 2019 \Leftrightarrow \left(b - a^3\right)\left(b + a^3\right) = 2019$.

Hơn nữa khi phân tích 2019 thành tích chỉ có 2 cách $2019 = 1.2019 = 3.673$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} b - a^3 = 1 \\ b + a^3 = 2019 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1010 \\ a^3 = 1009 \end{cases}$, vô lí do 1009 không là lập phương.

Trường hợp 2: $\begin{cases} b - a^3 = 3 \\ b + a^3 = 673 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 338 \\ a^3 = 335 \end{cases}$, vô lí do 335 không là lập phương.

Vậy điều giả sử sai, nghĩa là dãy trên có nhiều nhất 1 số chính phương.

Bài 9. Cho dãy (u_n) thỏa mãn các điều kiện sau : $\begin{cases} u_n \in N \\ u_{m+n} - u_m - u_n \in \{0;1\} \\ u_2 = 0 \\ u_3 > 0 \\ u_{9999} = 3333 \end{cases}$. Tìm u_{2013}.

Hướng dẫn giải

Ta có : $u_{m+n}=u_m+u_n+\varepsilon\ \ (\varepsilon\in\{0;1\})$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $u_{n_1+n_2+...+n_k}\ge u_{n_1}+u_{n_2}+...+u_{n_k}$, với mọi $n_1,n_2,...,n_k$.

Ta có: $u_2\ge u_1+u_1\Rightarrow u_1=0$.

$u_3=u_2+u_1+\varepsilon=0+\varepsilon\Rightarrow u_3=1$.

Ta chứng minh rằng nếu $n<3333$ thì $u_{3n}=n$ (1).

Thật vậy:.

Với $n=1$ thì (1) đúng.

Ta có $u_{3n}\ge n.u_3=n,\forall n$.

Giả sử, tồn tại $n_0<3333$, mà $u_{3n_0}>n_0\Rightarrow u_{3(n_0+1)}=u_{3n_0+3}\ge u_{3n_0}+u_3>n_0+1$, điều này chứng tỏ, với mọi $n\ge n_0$ thì $u_{3n}>n$. Điều này mâu thuẫn với $u_{9999}=3333$.

Vậy, với $n<3333$ thì $u_{3n}=n.$.

Do đó $u_{2013}=671$.

Bài 10. Cho dãy số x_n xác định bởi: $x_1=5;x_2=\dfrac{17}{2};x_{n+1}=\dfrac{1}{4}x_n.x_{n-1}^2-2x_n-4$. Tìm n chẵn thỏa mãn $n\in N^*$ và $[x_n]+3$ là lập phương của 1 số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Nhận xét thấy :.

$x_1=2^{2^{1-1}+1}+\dfrac{4}{2^{2^{1-1}+1}};x_2=2^{2^{2-1}+1}+\dfrac{4}{2^{2^{2-1}+1}};$.

Khi đó, giả sử : $x_n=2^{2^{n-1}+1}+\dfrac{4}{2^{2^{n-1}+1}}\forall n\le k;k\in N^*$..

Cần chứng minh: $x_{k+1}=2^{2^k+1}+\dfrac{4}{2^{2^k+1}}$.(1) thật vậy ta có.

$$x_{k+1}=\frac{1}{4}x_kx_{k-1}{}^2-2x_k-4=\frac{1}{4}(2^{2^{k-1}+1}+\frac{4}{2^{2^{k-1}+1}})(2^{2^{k-2}+1}+\frac{4}{2^{2^{k-2}+1}})^2-2(2^{2^{k-1}+1}+\frac{4}{2^{2^{k-1}+1}})-4.$$

$=\ 2^{2^k+1}+\dfrac{4}{2^{2^k+1}}$ suy ra (1) đúng.

$\Rightarrow\ x_n=2^{2^{n-1}+1}+\dfrac{4}{2^{2^{n-1}+1}}\forall n\in N^*$

.

Khi đó $[x_n]+3=2^{2^{n-1}+1}+3$, giả sử tồn tại n chẵn để $[x_n]+3$ là lập phương của 1 số tự nhiên:.

Khi đó $2^{2^{n-1}+1}+3=c^3$. Mặt khác n chẵn suy ra $n-1$ lẻ suy ra $2^{n-1}+1\vdots 3$ khi đó đặt.

$2^{2^{n-1}+1}=2^{3k}\Rightarrow 2^{3k}+3=c^3 \Rightarrow \left(c-2^k\right)\left(c^2+c.2^k+2^{2k}\right)=3$ mà $c^2+c.2^k+2^{2k}>c-2^k$ nên:.

$c-2^k=1; c^2+c.2^k+2^{2k}=3$ (2). Giải hệ (2) ta được hệ không có nghiệm nguyên với mọi $k>0$ suy ra không tồn tại n chẵn.

Vậy không tồn tại n chẵn để $[x_n]+3$ là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 11. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $u_0=0,\ u_1=1,\ u_{n+2}=2u_{n+1}+u_n,\ n=0,1,2,...$ Chứng minh rằng $2^{2014}\left|u_n\right.$ khi và chỉ khi $2^{2014}\left|n\right.$.

Hướng dẫn giải

Công thức tổng quát $u_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n-\left(1-\sqrt{2}\right)^n\right)$.

Đặt $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=a,\ \left(1-\sqrt{2}\right)^n=b\Rightarrow ab=(-1)^n$.

Ta có $u_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}(a-b)$, $u_{2n}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(a^2-b^2\right)=u_n(a+b)$.

Đặt $S_n=a+b=\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n$. Khi đó ta được dãy (S_n) được xác định như sau: $S_1=2, S_2=6, S_{n+2}=2S_{n+1}-S_n,\ n=1,2,...$.

Do $S_1\equiv 2(\bmod 4), S_2\equiv 2(\bmod 4)$ nên bằng quy nạp ta được: $S_n\equiv 2(\bmod 4)$ hay $a+b\equiv 2(\bmod 4)\Rightarrow a+b=2t, (t,2)=1$.

Do đó $u_{2n}=2u_n.t,\ (t,2)=1$.

Giả sử $n=2^k.t,\ (t,2)=1\Rightarrow u_n=u_{2^k.t}=2^k.u_t.A_k$, trong đó $u_t,\ A_k$ đều lẻ.

Từ đẳng thức này ta được $2^k\left|u_n\right.$ khi và chỉ khi $2^k\left|n\right.$.

Bài 12. Cho dãy số thực $\{x_n\}$ được xác định như sau: $\begin{cases}x_1=1\\ x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{2x_n}, \forall n\ge 1\end{cases}$. Chứng minh rằng: $[25x_{625}]=625$ (kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của số thực x).

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh rằng: $n\le\sqrt{n}\,x_n<n+\frac{1}{8}H_n, \forall n\ge 1$, với $H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

$x_{n+1}^2 = x_n^2 + \frac{1}{4x_n^2} + 1$, $x_1^2 = 1$ quy nạp $x_n^2 \geq n$. Với $n = 1$ đúng giả sử đúng đến n. Tức là $x_n^2 \geq n$.

Từ đó suy ra.

$$x_{n+1}^2 \geq n + 1 + \frac{1}{4x_n^2} > n + 1 \Rightarrow \sqrt{n}x_n \geq n.$$

$$x_n^2 = x_{n-1}^2 + \frac{1}{4x_{n-1}^2} + 1 = \cdots = x_1^2 + (n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4x_k^2} \leq n + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

$$< n + \frac{1}{4}H_n < \left(n + \frac{1}{8\sqrt{n}}H_n\right)^2 \Rightarrow \sqrt{n}x_n \leq n + \frac{1}{8}H_n.$$

Việc tiếp theo ta chứng minh $H_{625} < 8$. Ta có BĐT $H_n \leq 1 + \ln n$ thật vậy,.

Xét hàm số $f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \quad \forall x > 0$.

$f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} < 0, \forall x > 0$ hàm số $f(x)$ giảm trên khoảng.

$(0; +\infty) \Rightarrow f(x) > 0, \forall x > 0$, ta suy ra $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x \quad (*)$ áp dụng.

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{625} < 1 + \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + \ln 625 - \ln 624 = 1 + \ln 625 < 8.$$

Từ đó: $625 \leq \sqrt{625}\, x_{625} < 625 + \frac{1}{8}H_{625} < 626 \Rightarrow [25x_{625}] = 625$.