Giải

a) Giả sử ô chính giữa không có sỏi và điểm số của cách xếp là 8. Như vậy 3 hàng, 3 cột và hai đường chéo đều có một số lẻ viên sỏi. Gọi *a, b, c, d* là số sỏi trong các ô như hình vẽ, $a,b,c,d \in \{0,1\}$. Khi đó các ô đối xứng với *a, b, c, d* qua tâm sẽ có số sỏi tương ứng là a',b',c',d' sao cho $a+a'=b+b'=c+c'=d+d'=1$.

a	b	c
	0	d

a	b	c
d	0	d
c'	b	a

Từ đó $(a+b+c)+(a'+b'+c')=3$ suy ra một trong hai tổng $a+b+c$ hoặc $a'+b'+c'$ là một số chẵn. Khi đó dòng thứ nhất hoặc dòng thứ ba có tổng số sỏi là một số chẵn, mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.

Vậy không tồn tại các xếp sỏi thỏa mãn điều kiện bài toán.

b) Ta gọi hai cách xếp sỏi là liên hợp với nhau nếu ô trên cùng bên trái của chúng có số sỏi khác nhau và các ô còn lại tương ứng có số sỏi như nhau.

a	b	c
f	e	d
g	h	i

(B)

a'	b	c
f	e	d
g	h	i

(B')

Như vậy, các cách xếp sỏi chia thành từng cặp đôi một liên hợp với nhau.

Xét hai cách xếp liên hợp với nhau (B) và (B'). Tổng số sỏi ở dòng 1, cột 1 và 1 đường chéo của hai bảng đôi một khác nhau về tính chẵn lẻ. Các dòng, cột và đường chéo còn lại của hai bảng có số sỏi như nhau. Do đó điểm số của (B) và (B') khác nhau 3 đơn vị, suy ra số điểm của (B) và (B') có tính chẵn lẻ khác nhau.

Vậy hai cách xếp liên hợp với nhau, một cách xếp có điểm số chẵn, cách xếp còn lại cố điểm số là một số lẻ suy ra điều phải chứng minh.

Câu 12. Cho một hình phẳng có diện tích bằng 1 được phủ kín bởi hữu hạn các hình tròn. Chứng minh rằng trong số các đường tròn đó có thể chọn được 1 hình tròn có diện tích không bé hơn $\frac{1}{9}$ hoặc chọn được 1 số hình tròn đôi một rời nhau có tổng diện tích không bé hơn $\frac{1}{9}$.

Kí hiệu: $(O;R)$ – đường tròn tâm O bán kính R.

dtF – diện tích hình phẳng F.

Do số các đường tròn là hữu hạn nên luôn chọn được hình tròn có bán kính lớn nhất. Gọi đường tròn đó là $(O_1;R_1)$.

Gọi F_1 là hình phẳng tạo bởi $(O_1;R_1)$ và các hình tròn có điểm chung với hình tròn$(O_1;R_1)$

.

Dễ thấy, tất cả các hình tròn tạo nên F_1 đều nằm trong hình tròn$(O_1;3R_1)$.

Do đó: $dtF_1 \le dt(O_1;3R_1) = 9dt(O_1;R_1) \Rightarrow dt(O_1;R_1) \ge \frac{dtF_1}{9}$ (1)

Trường hợp 1: $(O_1;R_1)$ có điểm chung với tất cả các hình tròn còn lại.

Do các hình tròn phủ kín hình phẳng có diện tích bằng 1 nên $dtF_1 \ge 1$. Từ (1) ta được

$dt(O_1;R_1) \ge \frac{1}{9}$ (đpcm)

Trường hợp 2: Tồn tại hình tròn không có điểm chung với$(O_1;R_1)$.

Do số các đường tròn là hữu hạn nên ta có thể chọn được trong số các hình tròn đó k (k ≥1) các hình tròn $(O_2;R_2);(O_3;R_3);...;(O_{k+1};R_{k+1})$ thỏa mãn 2 điều kiện:

a) Với mỗi $i = 2, 3,...,k + 1$ thì $(O_i;R_i)$ là hình tròn có bán kính lớn nhất không có điểm chung với các hình tròn $(O_1;R_1);...,(O_{i-1};R_{i-1})$ đã chọn trước đó.

b) Không tồn tại hình tròn không có điểm chung với ít nhất 1 đường tròn trong các đường tròn $(O_1;R_1);(O_2;R_2);...;(O_{k+1};R_{k+1})$

Với mỗi $i = 2,..., k + 1$ gọi F_i là hình phẳng tạo bởi $(O_i;R_i)$ và các hình tròn có điểm chung với hình tròn$(O_i;R_i)$. Do a) nên tất cả các hình tròn tạo nên F_i đều nằm trong hình tròn$(O_i;3R_i)$.

Do đó: $dtF_i \le dt(O_i;3R_i) = 9dt(O_i;R_i) \Rightarrow dt(O_i;R_i) \ge \frac{dtF_i}{9}$ (2)

Từ b) do các hình tròn phủ kín hình phẳng có diện tích bằng 1 nên: $dtF_1 + dtF_2 + ... + dtF_{k+1} \ge 1$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\Rightarrow dt(O_1;R_1) + ... + dt(O_{k+1};R_{K+1}) \ge \frac{1}{9}$.

Theo các xác định các hình tròn thì $(O_1;R_1);(O_2;R_2);...;(O_{k+1};R_{k+1})$ rời nhau (đpcm).

Câu 13. Cho 2015 điểm trên đường thẳng, tô các điểm bằng một trong 3 màu xanh, đỏ, vàng (mỗi điểm chỉ tô một màu). Có bao nhiêu cách tô khác nhau sao cho không có 3 điểm liên tiếp nào cùng màu.

Giải

Gọi S_n là số cách tô màu thỏa mãn cho n điểm (bài toán của ta là $n = 2015$). Ta sẽ tính theo n, xét hai điểm cuối cùng của có hai trường hợp xảy ra:

+Nếu hai điểm cuối cùng màu thế thì điểm thứ $n+1$ khác màu 2 điểm cuối.

+Nếu hai điểm cuối khác màu thì điểm thứ $n+1$ tô bất kì.

Từ đó sinh ra hai số đặc trưng là số cách tô n điểm mà hai điểm cuối cùng màu, là số cách tô màu n điểm mà hai điểm cuối khác màu và cả hai cùng thỏa mãn 3 điểm liên tiếp khác màu.

Ta có: $S_{n+1} = 2M_n + 3P_n$, $P_{n+1} = 2S_n; M_{n+1} = P_n$.

Thế thì $S_{n+1} = 2P_{n-1} + 6S_{n-1} = 4S_{n-2} + 6S_{n-1}$. Vậy ta có hệ thức truy hồi: $S_{n+1} - 6S_{n-1} - 4S_{n-2} = 0$.

Bây giờ ta tính S_3, S_4 thấy ngay $S_3 = 27 - 3 = 24$, $S_4 = 4! - 3 - 12 = 49$. Phương trình đặc trưng $X^2 - 6X - 4 = 0$ có nghiệm là:.

Công thức xác định $S_n = ax_1^n + bx_2^n$ với a, b thỏa mãn:

$$\begin{cases} a(3+\sqrt{13})^3 + b(3-\sqrt{13})^3 = 24 \\ a(3+\sqrt{13})^4 + b(3-\sqrt{13})^4 = 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{24\sqrt{13} - 23}{2\sqrt{13}(3+\sqrt{13})^3} \\ b = \dfrac{24\sqrt{13} - 23}{2\sqrt{13}(3-\sqrt{13})^3} \end{cases}$$

Sau đó cho $n = 2015$ ta được kết quả bài toán.

Câu 14. Gọi $a_1a_2...a_n$ với $a_i \in \{2;0\}$ là một xâu có độ dài n.

Gọi xâu 20 là xâu OLIMPIC nếu 2 và 0 là hai phần tử liên tiếp theo thứ tự đó ở trong xâu có độ dài n đã cho (ví dụ như xâu 2220022 có độ dài là 7 và trong đó có 1 xâu OLIMPIC). Xét các xâu có độ dài 30 và chứa k xâu OLIMPIC, biết rằng có C_{31}^9 xâu như thế. Tìm k ?

Giải

Gọi H là số là xâu chứa toàn là số 2 có độ dài lớn hơn hay bằng 1

Gọi K là số là xâu chứa toàn là số 0 có độ dài lớn hơn hay bằng 1.

Ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1. HKHKHK…HK (*) (có k xâu loại H, k xâu loại K)

Trường hợp 2. HKHKHK…HKH (có k+ 1 xâu loại H, k xâu loại K)

Trường hợp 3. KHKHK…KHK (có k xâu loại H, k+1 xâu loại K)

Trường hợp 4. KHKHK…KHKH(có k+1 xâu loại H, k+1 xâu loại K)

Xét trường hợp 1.

Gọi x_1 là số phần tử ở xâu H (H ở vị trí đầu tiên trong (*)) , $x_1 \ge 1$

Gọi x_2 là số phần tử ở xâu K (K ở vị trí thứ hai trong (*)) , $x_2 \ge 1$.

…

Gọi x_{2k} là số phần tử ở xâu K (K ở vị trí cuối trong (*)) , $x_{2k} \ge 1$

Ta có : $x_1 + x_2 + ... + x_{2k} = 30$.

Theo bài toán chia kẹo Euler : Số xâu có độ dài 30 và chứa k xâu OLIMPIC trong trường hợp 1 là C_{29}^{2k-1}.

Tương tự như vậy ta có các trường hợp còn lại và kết hợp với quy tắc cộng ta có :

$C_{29}^{2k-1} + C_{29}^{2k} + C_{29}^{2k} + C_{29}^{2k+1} = C_{31}^{9}$

$\Leftrightarrow C_{31}^{2k+1} = C_{31}^{9} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 9 = 2k+1 \\ 9 = 31 - (2k+1) \end{array} \right. \Rightarrow k = 4$

Vậy $k = 4$.

Câu 15. Cho số nguyên $n \ge 1$. Tìm số lớn nhất các cặp gồm 2 phần tử phân biệt của tập $\{1;2;...;n\}$ sao cho tổng của các cặp khác nhau là các số nguyên khác nhau và không vượt quá n .

Giải

Giả sử có k cặp thỏa mãn đề bài. Gọi S là tổng của k cặp đó, thì

$$S \ge 1 + 2 + ... + 2k = k(2k+1)$$

Dễ thấy $S \le n + (n-1) + ... + (n-k+1) = nk - \frac{k(k-1)}{2}$. Do đó,

$$k(2k+1) \le nk - \frac{k(k-1)}{2} \Leftrightarrow k \le \left[\frac{2n-1}{5} \right]$$

Bây giờ ta xây dựng $\left[\frac{2n-1}{5} \right]$ cặp thỏa mãn đề bài như sau

Trường hợp 1: Số n có dạng $5k+1$ hoặc $5k+2$. Khi ấy, $\left[\frac{2n-1}{5} \right] = 2k$. Ta xét các cặp sau

$$(4k+1;k), (4k;k-1), ... (3k+2;1), (3k;2k), (3k-1;2k-1), ... (2k+1;k+1)$$

Rõ ràng dãy trên có $2k$ cặp thỏa mãn đề bài.

Trường hợp 2: Số n có dạng $5k+3$ hoặc $5k+4$ hoặc $5k+5$. Khi ấy, $\left[\frac{2n-1}{5} \right] = 2k+1$. Ta xét các cặp sau

$$(4k+2;k+1), (4k+1;k), ..., (3k+2;1), (3k+1;2k+1), (3k;2k), ..., (2k+1;k+1)$$

Dãy trên có $2k+1$ thỏa mãn đề bài.

Vậy số lớn nhất các cặp thỏa mãn đề bài là $\left[\frac{2n-1}{5} \right]$

Có n ($n \ge 4$) cặp vợ chồng tham dự buổi dạ tiệc. Biết rằng mỗi người đều có thể trò chuyện với tất cả những người khác, trừ vợ hoặc chồng mình. Các cuộc trò chuyện lập thành các nhóm người $C_1, C_2, ..., C_k$ với tính chất sau: Không có một cặp vợ chồng nào nói chuyện trong cùng một nhóm và hai người bất kì không phải vợ chồng thì đều có đúng một nhóm để họ trò chuyện.Chứng minh rằng: $k \ge 2n$.

*) Gọi g_i($i = 1,2,\ldots,2n$) là số nhóm mà người thứ i tham gia trò chuyện.

Do người thứ i nói chuyện với ít nhất một cặp vợ chồng (A,B) và tồn tại hai nhóm khác nhau chứa A và chứa B nên ta có $g_i \ge 2 i = 1,2,\ldots,2n$.

*) Trường hợp 1 : Tồn tại i sao cho $g_i = 2$.

Giả sử $C_m \cap C_h = \{i\}$. Khi đó mỗi cặp vợ chồng không phải vợ chồng của i có một người tham gia vào nhóm C_m và người kia tham gia vào nhóm C_h.

Khi đó mỗi người của nhóm $C_m \setminus \{i\}$ sẽ nói chuyện với người không phải bạn đời của mình trong nhóm $C_h \setminus \{i\}$. Do các nhóm này phân biệt nên có tất cả $(n-1)(n-2)$ nhóm như vậy.

Do đó: $k \geq (n-1)(n-2)+2 \geq 2n$ với $n \geq 4$.

*) Trường hợp 2: $g_i \geq 3$ với mọi $i = 1,2,\ldots,2n$

Khi đó ta gán cho người thứ i biến số x_i.

Xét hệ phương trình $2n$ ẩn: $\sum_{i\in C_t} x_i = 0$; $t = 1,2,\ldots,k$. (*)

Giả sử $k < 2n$. Khi đó hệ trên có số phương trình ít hơn số ẩn nên tồn tại i sao cho x_i khác 0.

Đặt $y_t = \sum_{i\in C_t} x_i$; $M = \{(i,j)$ với i,j là vợ chồng}; M* = {(i,j) với i,j khônglà vợ chồng}

Khi đó:

$$\sum_{t=1}^{k} y_t^2 = \sum_{t=1}^{k}\left(\sum_{i\in C_t} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{2n} g_i x_i^2 + 2\sum_{(i,j)\in M^*} x_i x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{2n}(g_i-1)x_i^2 + \sum_{i=1}^{2n} x_i^2 + 2\sum_{i\neq j} x_i x_j - 2\sum_{(i,j)\in M} x_i x_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n}(g_i-1)x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{2n} x_i\right)^2 - 2\sum_{(i,j)\in M} x_i x_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n}(g_i-2)x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{2n} x_i\right)^2 + \sum_{(i,j)\in M}(x_i - x_j)^2$$

Vậy , $\sum_{t=1}^{k} y_t^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0; \forall i = 1,2,...,2n$

Hay, $y_t = 0, \forall t = 1,2,...,k \Leftrightarrow x_i = 0; \forall i = 1,2,...,2n$

Vậy hệ (*) có nghiệm $x_i = 0; \forall i = 1,2,...,2n$ (vô lý)

Nên $k \geq 2n$.

Câu 16. Tập hợp M gồm hữu hạn điểm trên mặt phẳng sao cho với mọi điểm X thuộc M tồn tại đúng 4 điểm thuộc M có khoảng cách đến X bằng 1.

Hỏi tập hợp M có thể chứa ít nhất là bao nhiêu phần tử?

Giải

+) Rõ ràng có ít nhất hai điểm P,Q thuộc M sao cho $PQ \neq 1$.

Ký hiệu : $M_P = \{X \in M \ / \ PX = 1\}$. Từ giả thiết $|M_P| = 4$ ta có: $|M_p \cap M_q| \leq 2$.

Nếu tồn tại P, Q sao cho $|M_p \cap M_q| \leq 1$ thì M chứa ít nhất 9 điểm.

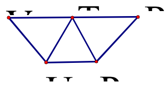
+(1.50 đ) Trường hợp với mọi P,Q sao cho $PQ \neq 1$ và $|M_p \cap M_q| = 2$.

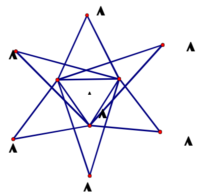
Khi đó $M_p \cap M_q = \{R,S\}$, lúc đó $M_P = \{R,S,T,U\}$ và $M_q = \{R,S,V,W\}$ và giả sử $M = \{P,Q,R,S,T,U,V,W\}$ ta có $TQ \neq 1$, $UQ \neq 1$, $VP \neq 1$, $WP \neq 1$.

- Nếu TR, TS, UR, US khác 1: suy ra $M_t \cap Mq = M_u \cap M_q = \{V, W\}$ suy ra T hay U trùng với Q , vô lý.
- Nếu TR, TS, UR, US có một số bằng 1: Không giảm đi tính tổng quát, giả sử $TV = 1$ lúc đó $TS \neq 1$ và $TV = 1$ hay TW = 1. Giả sử $TV = 1$ lúc đó $TW \neq 1$ suy ra $TU = 1$, và $M_t = \{P, R, U, V\}$ và $M_u = \{P, T, V, W\}$ lúc đó UTV, RPT, UTV là các tam giác đều cạnh 1, ta có hình 1. Điều này mâu thuẫn vì $VR > 2$.

+(0.50 đ) Vậy M chứa ít nhất là 9 điểm. Dấu bằng xảy ra với hình2.

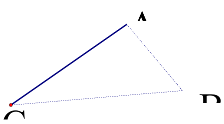
Vậy M có thể chứa ít nhất là 9 điểm.

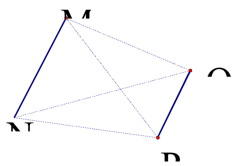




Câu 17. Tìm số nhỏ nhất trong các cặp tập hợp có giao khác tập $\varnothing$ trong 2000 tập hợp phân biệt sao cho với 3 tập hợp bất kì trong 2000 tập hợp đó đều có ít nhất một cặp tập hợp có giao khác tập $\varnothing$.

- Giải tổng quát đối với n tập hợp (trong bài $n = 2000$).
  Ta có hình biểu diễn (K) của n tập hợp như sau: n tập hợp được biểu diễn bởi n điểm phân biệt trong mặt phẳng (không có 3 điểm nào thẳng hàng), hai tập hợp có giao khác $\varnothing$ biểu diễn bởi 1 đường liền nét(__) nối với hai điểm biểu diễn, hai tập hợp có giao bằng $\varnothing$ biểu diễn 1 đường không liền nét (---) nối hai điểm biểu diễn.
  Kí hiệu P là tập hợp n điểm, $k(n)$ là số đoạn nối liền nét của một biểu diễn (K) thỏa giả thiết bài toán (tức là: với 3 điểm bất kỳ của P có ít nhất một đoạn liền nét). Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất $d(n)$ của $k(n)$.





- Ta luôn luôn có thể giả thiết rằng : Trong biểu diễn (K) tồn tại hai điểm A, B mà đoạn nối AB là không liền nét. Đặt $Q = P \setminus \{A, B\}$, như vậy, Q có $n-2$ điểm, trong biểu diễn (K) ta bỏ đi đoạn AB và tất cả các đoạn nối với A, nối với B và ta được biểu diễn (K*) của tập Q thỏa điều kiện bài toán. Gọi k(n-2) là số các đoạn liền nét trong biểu diễn (K*).

- Lấy C∈Q, suy ra các đoạn CA, CB phải có ít nhất một đoạn liền nét (vì đoạn AB không liền nét). Vì Q có $n-2$ điểm, nên suy ra : $k(n)\geq n-2\ +\ k(n-2)$ (*).
- Công thức truy hồi (*) cho ta : $k(n)\geq(n-2)+(n-4)+\ \ldots\ +4+k(4)$ vì n chẵn.
- Suy ra $k(n)\geq(n-2)+(n-4)+\ \ldots\ +4+d(4)\geq(n-2)+(n-4)+\ \ldots\ +4\ +\ 2=\dfrac{n(n-2)}{4}$

  (do $d(4)=2$).

  Chứng tỏ : Tồn tại $d(n)\ =\dfrac{n(n-2)}{4}$.
- Chọn n tập hợp để có $d(n)=\dfrac{n(n-2)}{4}$ như sau : Nhóm X gồm $\dfrac{n}{2}$ tập hợp giao nhau khác ∅ từng đôi một, nhóm Y gồm $\dfrac{n}{2}$ tập hợp giao nhau khác ∅ từng đôi một. Mỗi tập hợp của nhóm này thì không có giao khác ∅ với bất kỳ một tập hợp của nhóm kia. Cách chọn trên thỏa giả thiết bài toán.
- Số đoạn nối liền nét giữa $\dfrac{n}{2}$ điểm của X là : $(\dfrac{n}{2}-1)+(\dfrac{n}{2}-2)+(\dfrac{n}{2}-3)+\ldots+1=\dfrac{n(n-2)}{8}$
- Số đoạn nối liền nét giữa n điểm của X và Y là : $\dfrac{n(n-2)}{4}$.
- Vậy $d(n)\ =\dfrac{n(n-2)}{4}$. Thế n = 2000 ta được số cần tìm là: $\dfrac{20001998}{4}=999000$.