Dễ thấy $2<3<...<44<45<46<...<87<2.87<3.86<...<44.45$.

Vì $44.45=1980<2013$ nên toàn bộ các phần tử của 43 bộ ba đều là khác nhau và đều nằm trong tập hợp A.

Vì ta tách ra khỏi A tối đa 42 phần tử, nên phần còn lại của A (sau khi tách) phải có ít nhất một bộ ba nói trên. Vậy mọi cách tách như thế không thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

Kết luận: Số phần tử ít nhất cần tách khỏi A là 43 phần tử.

Câu 10: Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1+x_2+x_3+x_4=25$ thỏa mãn điều kiện $x_1\le 3; x_2\ge 2; x_3>4$.

Hướng dẫn giải.

Ta viết điều kiện thành $x_1\le 3; x_2\ge 2; x_3\ge 5$.

Xét các điều kiện sau: $x_2\ge 2; x_3\ge 5$ (**); $x_1\ge 4; x_2\ge 2; x_3\ge 5$ (***).

Gọi p,q,r lần lượt là số các nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa mãn các điều kiện (*)(**)(***).

Ta có $p=q-r$. Đặt $x_1'=x_1, x_2'=x_2-2, x_3'=x_3-5, x_4'=x_4$.

Kết hợp với (**) phương trình (1) trở thành $x'_1+x'_2+x'_3+x'_4=18\ (2)$.

Số nghiệm không âm của phương trình (1) thỏa mãn điều kiện (**) bằng số nghiệm nguyên không âm của phương trình (2). Theo công thức tổ hợp lặp ta có số nghiệm đó là $K_4^{18}=C_{4+18-1}^{18}=C_{21}^{18}$ vậy $q=C_{21}^{18}$. Lý luận tương tự ta có $r=K_4^{14}=C_{4+14-1}^{14}=C_{17}^{14}$.

Suy ra $p=q-r=C_{21}^{18}-C_{17}^{14}=650$.

Câu 11: Tìm các số nguyên dương a,b,c sao cho $A=\dfrac{2^a+2^b+1}{2^c-1}$ là một số nguyên.

Hướng dẫn giải.

Dễ nhận thấy $(a, b, 1)$ thỏa mãn với mọi a, b nguyên dương.

Xét $c>1\Rightarrow 2^c-1\ge 3$.

Đặt $n=2^c-1$; $a=kc+r_a$; $b=mc+r_b$ với $0\le r_a; r_b\le c$.

Khi đó.

$2^a\equiv (2^c)^k 2^{r_a} \pmod n \equiv 2^{r_a} \pmod n$.

$2^b\equiv (2^c)^m 2^{r_b} \pmod n \equiv 2^{r_b} \pmod n$.

Do đó $2^a+2^b+1\equiv 2^{r_a}+2^{r_b}+1 \pmod n$.

+Nếu $r_a=r_b=c-1$ thì $2^{r_a}+2^{r_b}+1\equiv 2^c+1 \pmod n \equiv 2 \pmod n$.

Mà $n\ge 3$ nên n không thể là ước của 2. Do đó trường hợp này không thỏa mãn.

+Nếu r_a hoặc r_b nhỏ hơn c thì.

$$2^c-1\le 2^{r_a}+2^{r_b}+1\le 2^{c-1}+2^{c-2}+1=\frac{3.2^c}{4}+1\Rightarrow 2^c\le 8\Rightarrow c\le 3.$$

Nếu $c=1$ thì A nguyên với mọi a,b nguyên dương.

Nếu $c=2$ thì $n=3$ $\Rightarrow r_a=r_b=0$ $\Rightarrow a,b$ chẵn.

Nếu $c=3$ thì $n=7\Rightarrow r_a=r_b=2$ $\Rightarrow$ $a=3k+2$; $b=3l+2$.

Câu 12: Cho m và n là các số nguyên dương thỏa mãn 2016^m+1 là ước của 2016^n+1 .Chứng minh rằng m là ước của n.

Hướng dẫn giải.

Đặt $n=mq+r$ $(0\le r<m)$. Khi đó ta viết.

$$2016^n+1=2016^{mq+r}+1=2016^{mq}.2016^r+1.$$

Ta xét các trường hợp sau:.

* TH1: Nếu q là số lẻ thì $2016^n+1=\left[\left(2016^m\right)^q+1\right].2016^r+1-2016^r$.

Kết hợp với $\left(2016^m+1\right)\left|\left(2016^n+1\right)\right.$ thu được.

$$\left(2016^m+1\right)\left|\left(2016^r-1\right)\right.\Rightarrow r=0\Rightarrow m|n.$$

* TH2: Nếu q là số chẵn thì $2016^n+1=\left[\left(2016^m\right)^q-1\right].2016^r+2016^r+1$.

Kết hợp với $\left(2016^m+1\right)\left|\left(2016^n+1\right)\right.$ và $\left(2016^m+1\right)\left|\left[\left(2016^m\right)^2-1\right]\right.$.

ta thu được $\left(2016^m+1\right)\left|\left(2016^r+1\right)\right.$ (vô lí vì $0\le r<m$).

Vậy ta có đpcm.

Câu 13: Cho a,b là hai số nguyên dương với $b\le a$. Biết rằng tồn tại cặp số nguyên dương (u,v) sao cho $u^2+v^2-auv=b$. Chứng minh rằng b là số chính phương.

Hướng dẫn giải.

Sắp xếp thứ tự của 10 số lớn thứ ba của các hàng là $a_1>a_2>...>a_{10.}$ Ta thấy tối đa là 20 số có thể lớn hơn a_1 (là các số lớn thứ nhất và thứ hai ở mỗi hàng).

Vì vậy $a_1\ge 80$. Tương tự có tối đa 28 số có thể lớn hơn a_2. Vì vậy $a_2\ge 72$. Từ đó.

$$a_1+a_2+...+a_{10}\ge 80+72+\left(a_{10}+7\right)+\left(a_{10}+6\right)+...+a_{10}=8a_{10}+180..$$

Trong khi đó, tổng các số ở hàng chứa a_{10} không lớn hơn.

$$100+99+a_{10}+\left(a_{10}-1\right)+...+\left(a_{10}-7\right)=8a_{10}+171..$$

Do $8a_{10}+171<8a_{10}+180$ nên hàng chứa a_{10} là hàng thỏa mãn yêu cầu.

Chọn cặp (u,v) trong các cặp thỏa mãn yêu cầu sao cho $u+v$ nhỏ nhất với $u \ge v$.

Coi $u^2 - a.v.u + (v^2 - b) = 0$ là phương trình bậc hai ẩn u.

Vì sự tồn tại của u nên phương trình này còn có nghiệm thứ hai là u'.

Theo định lý Vi – ét ta có.

$u + u' = a.v \Rightarrow u' \in \mathbb{Z}$..

Vì $u'^2 + v^2 \le a(u'v+1)$ nên $u' \ge 0$.

(Do $u'^2 + v^2 = avu' + b \le avu' + a = a(vu'+1)$).

Nếu $u' = 0$ thì $v^2 = b$ là số chính phương.

Nếu $u' > 0$ thì $u.u' = v^2 - b \Rightarrow u' < v \le u \Rightarrow u' + v \le u + v$ (vô lý vì tổng $u+v$ nhỏ nhất).

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 14: Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho trong mặt phẳng tồn tại n đường thẳng mà mỗi đường thẳng cắt đúng 2014 đường khác.

Hướng dẫn giải.

Xét n đường trong mặt phẳng, mà mỗi đường thẳng cắt đúng 2014 đường khác.

Nếu a là một đường thẳng trong n đường và có đúng k đường song song với nó $(0 \le k < n)$.

Cho b là đường thẳng bất kỳ cắt a, khi đó b cắt tất cả các đường không song song với a và b với số giao điểm bằng số giao điểm của a với các đường thẳng đó đồng thời b cắt các đường thẳng song song với a mà mỗi đường thẳng cắt đúng 2014 đường khác.

Suy ra có đúng k đường song song với b.

Vậy n đường được chia thành S nhóm, mỗi nhóm gồm $k+1$ đường thẳng song song với nhau.

$\Rightarrow$ Số giao điểm của mỗi đường với các đường khác là $(k+1)(S-1) = 2014$.

Mà $2014 = 2.19.53$ và $k+1$ là ước nguyên dương của 2014.

$\Rightarrow k+1 \in \{1;2;19;53;38;106;1007;2014\}$.

$n = (k+1)S = 2014 + k + 1$.

$\Rightarrow n \in \{2015;2016;2033;2067;2120;2510;3021;4028\}$.

Câu 15: Cho số nguyên dương $n \ge 3$. Chứng minh rằng tập hợp $X = \{1;\ 2;\ 3;...;\ n^2 - n\}$ có thể chia thành hai tập con không giao nhau sao cho không tập nào trong chúng chứa n phần tử $a_1,a_2,...,a_n$ với $a_1<a_2<...<a_n$ và $a_k\le\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ với mọi $k=2;\,3;\,...,\,n-1$.

Hướng dẫn giải.

Đặt $S_k=\left\{k^2-k+1;\,k^2-k+2;\,...;k^2\right\}$; $T_k=\left\{k^2+1;\,k^2+2;\,...;k^2+k\right\}$.

$S=\bigcup_{k=1}^{n-1}S_k$; $\quad T=\bigcup_{k=1}^{n-1}T_k$. Ta chứng minh $S,\,T$ là các tập con cần tìm của X.

Dễ dàng thấy $S\cap T=\varnothing$ và $S\cup T=X$. Ta chứng minh phản chứng.

Giả sử S gồm các phần tử $a_1,a_2,...,a_n$ với $a_1<a_2<...<a_n$ và $a_k\le\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ với mọi $k=2;\,3;\,...,\,n-1$.

Khi đó ta có $a_k-a_{k-1}\le a_{k+1}-a_k$, với mọi $k=2;\,3;\,...,\,n-1$ (1).

Nếu $a_1\in S_i$., ta có $i<n-1$ do $\left|S_{n-1}\right|<n$. Suy ra tồn tại ít nhất $n-\left|S_i\right|=n-i$ phần tử thuộc $\{a_1;\,a_2;\,...;\,a_n\}\cap\left(S_{i+1}\cup S_{i+2}\cup...\cup S_{n-1}\right)$.

Áp dụng nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất một tập $S_j,\,(i<j<n)$ chứa ít nhất 2 phần tử trong số các phần tử $a_1,a_2,...,a_n$.

Tức là tồn tại a_k sao cho $a_k,\,a_{k+1}\in S_j$ và $a_{k-1}\in S_1\cup S_2\cup...\cup S_{j-1}$.

Khi đó ta có $a_{k+1}-a_k\le\left|S_j\right|-1=j-1;\;\; a_k-a_{k-1}\ge\left|T_{j-1}\right|+1=j$.

Suy ra $a_{k+1}-a_k<a_k-a_{k-1}$. Điều này, mâu thuẫn với (1).

Vậy S không chứa các phần tử $a_1,a_2,...,a_n$ với $a_1<a_2<...<a_n$ và $a_k\le\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ với mọi $k=2;\,3;\,...,\,n-1$.Chứng minh tương tự ta cũng có tập T không chứa các phần tử $a_1,a_2,...,a_n$ với $a_1<a_2<...<a_n$ và $a_k\le\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ với mọi $k=2;\,3;\,...,\,n-1$.

Vậy $S,\,T$ là các tập con cần tìm của X.

Câu 16: Tìm tất cả số nguyên x sao cho $x+3$ chia hết cho x^2+1.

Hướng dẫn giải.

$x+3$ chia hết cho x^2+1 $\Rightarrow(x+3)(x-3)$ chia hết cho x^2+1.

x^2+1-10 chia hết cho x^2+1 $\Rightarrow-10$ chia hết cho x^2+1.

Từ đó tìm được $x=0;x=-1;x=1;x^2=2$.

Câu 17: Cho $P(x)$ là đa thức có bậc $n>1$ với hệ số nguyên. Chứng minh rằng có tối đa n số nguyên t sao cho $P\left(P(t)\right)=t$.

Hướng dẫn giải.

+TH1 :Nếu mọi số nguyên t thỏa mãn $P\left(P(t)\right)=t$ đêu thỏa mãn $P(t)=t$ mà $P(t)=t$ có tối đa n nghiệm nguyên dương nên bài toán được chứng minh.

+TH2 :Nếu tồn tại số nguyên t_1 mà $P\left(P(t_1)\right)=t_1$ nhưng $P(t_1)=t_2$,$(t_1\neq t_2)$ thì $P(t_2)=t_1;\ P(t_1)=t_2$.

Vì $\deg P=n>1$ nên nếu chỉ có t_1 thỏa mãn $P\left(P(t)\right)=t$ thì bài toán được chứng minh.

Giả sử có t_3 sao cho $P\left(P(t_3)\right)=t_3\ (t_1\neq t_3)$, đặt : $P(t_3)=t_4\Rightarrow P(t_4)=t_3$.

Ta có t_1-t_3 là ước của $P(t_1)-P(t_3)=t_2-t_4$.

Tương tự t_2-t_4 là ước của $P(t_2)-P(t_4)=t_1-t_3$.

Suy ra $t_1-t_3=\pm(t_2-t_4)$.

Nếu $t_1-t_3=t_2-t_4\Rightarrow t_1-t_2=t_3-t_4=u$, chứng minh tương tự ta thu được.

$$t_1-t_4=\pm(t_2-t_3)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t_1-t_4=t_2-t_3\\ t_1-t_4=t_3-t_2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t_1+u-t_3=-u+t_1-t_3\\ t_1+u-t_3=t_3+u-t_1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\\ t_1=t_3\end{array}\right..$$

điều này vô lí.

Do đó $t_1-t_3=t_4-t_2\Leftrightarrow t_1+P(t_1)=t_3+P(t_3)=c.$.

Khi đó các nghiệm thoản mãn $P\left(P(t)\right)=t$ đều thỏa mãn $P\left(P(t)\right)+t=c$. Mà $P\left(P(t)\right)+t=c$ là phương trình bậc n nên $P\left(P(t)\right)=t$ có tối đa n nghiệm nguyên.

KL.

Câu 18: .Cho n là số nguyên dương. Cho $2n$ điểm trên phân biệt trên một đường tròn được gán giá trị bởi các số $1;2;...;2n$ (2 điểm khác nhau được gán giá trị khác nhau) theo một cách nào đó. Mỗi dây cung được nối 2 điểm trong các điểm trên và được gán giá trị bằng độ chênh lệch dương giữa 2 đầu mút. Chứng minh rằng ta có thể chọn được n dây cung đôi một không cắt nhau sao cho tổng giá trị của các dây cung bằng n^2.

Hướng dẫn giải.

Bổ đề: Trên một được tròn có $2n$ điểm phân biệt. Người ta tô màu $2n$ điểm này bằng 1 trong 2 màu màu xanh đỏ sao cho có đúng n điểm được tô màu xanh và đúng n điểm được tô màu đỏ. 2 điểm khác màu nhau bất kì được nối bởi 1 dây cung. Khi đó với mỗi cách tô màu luôn tồn tại n dây cung mà không có 2 dây cung nào cắt nhau.

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh bổ đề trên bằng quy nạp.

Dễ thấy bổ đề đúng với $n=1$.

Giả sử bổ đề đúng với mọi $n=m$.

Xét $n = m + 1$.

Do các điểm chỉ được tô bởi 1 trong 2 màu nên phải tồn tại 2 điểm kề nhau mà chúng được tô khác màu. Ta chọn dây cung có 2 đầu mút là 2 điểm này.

Theo giả thiết quy nạp tồn tại cách chọn m cung trong số các dây cung có đầu mút là các điểm trong $2m$ điểm còn lại mà không có 2 dây cung nào cắt nhau. Rõ ràng không có dây cung nào trong m dây cung này cắt dây cung vừa chọn phía trên.

Như vậy tồn tại cách chọn $m+1$ dây cung mà không có 2 dây cung nào cắt nhau, Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán:.

Ta tô các điểm có giá trị là $1; 2; ...; n$ bằng màu đỏ, các điểm $n+1; ...; 2n$ bằng màu xanh. Khi đó theo bổ đề tồn tại cách chọn n dây cung mà mỗi dây cung có 2 đầu mút được tô bởi 2 màu khác nhau và chúng đôi một không cắt nhau. Tổng giá trị của các dây cung sẽ bằng: $(n+1)+(n+2)+...2n-1-2-...-n=n^2$ (ĐPCM).