Ta có $A_i \cap A_j = \left\{a \in \mathbb{N}^* \mid a \le n, a \vdots \left(a_i a_j\right)\right\} \Rightarrow \left|A_i \cap A_j\right| = \left[\dfrac{n}{a_i a_j}\right]$ (Do $(a_i, a_j) = 1$)

Hoàn toàn tương tự ta cũng có

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k = \left\{a \in \mathbb{N}^* \mid a \le n, a \vdots \left(a_1 a_2 \ldots a_k\right)\right\} \Rightarrow \left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k\right| = \left[\frac{n}{a_1 a_2 \ldots a_k}\right]$$

Vậy

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k}|A_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le k}\left|A_{i_1} \cap A_{i_2}\right| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le k}\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}\right| + \ldots + (-1)^{k+1}\left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{n}{a_i}\right] - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le k}\left[\frac{n}{a_{i_1} a_{i_2}}\right] + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le k}\left[\frac{n}{a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3}}\right] - \ldots + (-1)^{k+1}\left[\frac{n}{a_1 a_2 \ldots a_n}\right]$$

Câu 19. Với mỗi số nguyên dương n có tồn tại hay không một hoán vị $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ của tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ thỏa mãn: trong các số $0; a_1; a_1 + a_2; a_1 + a_2 + a_3; \ldots; a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho n + 1.

Hướng dẫn giải bài 19

+ Nếu n chẵn ta có $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1 + 2 + \ldots + n = (n+1)\dfrac{n}{2}$ đồng dư với 0 modun n + 1. Vậy với n chẵn thì không tồn tại hoán vị nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với n lẻ ta đi xây dựng một hoán vị của $\{1; 2; \ldots; n\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Đặt $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

- Xét dãy $1; 2k; 3; 2k-2; 5; 2k-3; \ldots; 2; 2k+1$ hay $\begin{cases} a_{2i} = 2i \\ a_{2i+1} = 2k + 1 - 2i \end{cases}, \forall i \in \mathbb{N}$. (2)

Ta có k + 1 số lẻ $1, 3, \ldots, 2k+1$ và k số chẵn $2, 4, \ldots, 2k$ được xếp xen kẽ với nhau trong đó các chữ số lẻ xếp theo thứ tự tăng dần các số chẵn xếp theo thứ tự giảm dần, do đó dễ thấy mỗi số trong tập $\{1, 2, \ldots, 2k+1\}$ xuất hiện trong dãy (2) đúng một lần.

- Tìm số dư của $b_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m, m \in \mathbb{N}^*$ khi chia cho $n + 1 = 2k + 2$.

Với m lẻ ta có

$a_1 \equiv 1 \left(\operatorname{mod} 2k+2\right)$, $a_2 + a_3 = a_4 + a_5 = \ldots = a_{2k} + a_{2k+1} = 2k + 3 \equiv 1 \left(\operatorname{mod} 2k+2\right)$

do đó $b_m = a_1 + \left(a_2 + a_3\right) + \ldots + \left(a_{m-1} + a_m\right) \equiv \dfrac{m+1}{2}\left(\operatorname{mod} 2k+1\right)$.

$\Rightarrow \{b_1, b_3, \ldots, b_{2k+1}\} \equiv \{1, 2, \ldots, k+1\}\left(\operatorname{mod} 2k+2\right)$

Với m chẵn ta có

$a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = \ldots = a_{2k-1} + a_{2k} = 2k + 1 \equiv -1\left(\operatorname{mod} 2k+2\right)$

do đó $b_m \equiv -\dfrac{m}{2}\left(\operatorname{mod} 2k+2\right) \Rightarrow \{b_2, b_4, \ldots, b_{2k}\} \equiv \{-1, -2, \ldots, -k\}\left(\operatorname{mod} 2k+2\right)$.

Vậy với n lẻ luôn tồn tại một hoán vị của $\{1; 2; \ldots; n\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 20. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 2$ tồn tại một tập hợp S gồm n số tự nhiên sao cho ab chia hết cho $(a-b)^2$ với mọi số $a \ne b$ phân biệt thuộc S.

Hướng dẫn giải bài 20

Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp toán học.

Với n = 2 chọn $S_2 = \{0;1\}$.

Giả sử bài toán đúng đến n = k nghĩa là ta chọn được tập S_k thỏa mãn bài toán. Ta sẽ chứng minh bài toán đúng với n = k + 1.

Gọi L là bội số chung nhỏ nhất của các số khác 0 có dạng $(a-b)^2$ và ab với tất cả các bộ $a,b \in S_k$. Xét $S_{k+1} = \{L+a \mid a \in S_k\} \cup \{0\}$. Suy ra S_{k+1} có $k+1$ phần tử. Ta sẽ chứng minh nó thỏa mãn bài toán. Thật vậy:

Nếu một trong 2 số a hoặc b bằng 0 thì $ab \vdots (a-b)^2$.

Nếu 2 số có dạng $L+a$ và $L+b$ thì ta có $(L+a)(L+b) = L(L+a+b) + ab \vdots ab$

$\Rightarrow (L+a)(L+b) \vdots \left[(L+a)-(L+b)\right]^2$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh

Câu 21. Giả sử n là một số nguyên dương thỏa mãn: Tồn tại a,b,c nguyên dương sao cho $7^n = (a+bc)(b+ac)$. Chứng minh rằng n là số chẵn.

Hướng dẫn giải bài 21

Từ giả thiết suy ra tồn tại p,q nguyên dương thỏa mãn $\begin{cases} a+bc = 7^p \\ b+ac = 7^q \end{cases}$ (1). Không mất tổng quát, giả sử $a \ge b$. Từ (1) suy ra

$\begin{cases} a+b+bc+ac = (a+b)(c+1) = 7^p + 7^q \\ b-a+ac-bc = (a-b)(c-1) = 7^q - 7^p \end{cases}$ (2).

Vì $a \ge b$ nên $q \ge p$, do đó

$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)(c+1) = 7^p(7^{q-p}+1) \\ (a-b)(c-1) = 7^p(7^{q-p}-1) \end{cases}$ (3).

*) Nếu $7 \mid c+1$ thì $7 \nmid c-1$, do đó $(3) \Rightarrow 7^p \mid a-b \Rightarrow a+bc \mid a-b$ (*). Mặt khác, từ $|a+bc| > |a-b|$ và (*) suy ra $a-b=0 \Rightarrow (a+bc)(b+ac) = (a+bc)^2 = 7^n \Rightarrow n \vdots 2$.

*) Nếu $7 \nmid c+1$ thì $7^p \mid a+b$, do đó $a+bc \mid a+b$ (**). Vì $a+bc \ge a+b$ nên (**) suy ra $c=1$. Khi đó $(a+bc)(b+ac) = (a+b)^2 = 7^n \Rightarrow n \vdots 2$. Vậy trong mọi trường hợp ta luôn có $2 \mid n$.

Câu 22. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x,y,z thỏa mãn $11^n = xy(z^2+1) + (x^2+y^2)z$.

Câu 23. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 2, thì $\left[(2+\sqrt{5})^p\right] - 2^{p+1} \vdots p$.

Hướng dẫn giải bài 23

p lẻ, suy ra $(2+\sqrt{5})^p + (2-\sqrt{5})^p$ nguyên.

$-1 < (2-\sqrt{5})^p < 0 \Rightarrow \left[(2+\sqrt{5})^p\right] = (2+\sqrt{5})^p + (2-\sqrt{5})^p$

$$\Rightarrow \left[(2+\sqrt{5})^p\right] = 2\left(2^p + C_p^2.2^{p-2}.5^{\frac{2}{2}} + C_p^4.2^{p-4}.5^{\frac{4}{2}} + \ldots + C_p^{p-1}.2.5^{\frac{p-1}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \left[(2+\sqrt{5})^p\right] = 2\left(2^p + C_p^2.2^{p-2}.5^{\frac{2}{2}} + C_p^4.2^{p-4}.5^{\frac{4}{2}} + \ldots + C_p^{p-1}.2.5^{\frac{p-1}{2}}\right)$$

$\Rightarrow\ A=\left[(2+\sqrt{5})^p\right]-2^{p+1}=2\left(C_p^2.2^{p-2}.5^{\frac{2}{2}}+C_p^4.2^{p-4}.5^{\frac{4}{2}}+...+C_p^{p-1}.2.5^{\frac{p-1}{2}}\right)$

Do các hệ số $C_p^2, C_p^4,..., C_p^{p-1}$ đều chi hết cho p, nên A chia hết cho p, đpcm.

Câu 24. Tìm giá trị lớn nhất của $P=a^2+b^2$, trong đó a, b là các số nguyên thoả mãn $1\le a; b\le 2014$ và $(b^2-ab-a^2)^2=1$.

Hướng dẫn giải bài 24

Tìm giá trị lớn nhất của $P=a^2+b^2$, trong đó a, b là các số nguyên thoả mãn $1\le a; b\le 2014$ và $(b^2-ab-a^2)^2=1$.

Ta xét các nghiệm nguyên dương $(x;y)$ của phương trình: $(x^2-xy-y^2)^2=1$ (1) với $x>y$.

Gọi $(b;a)$ là một nghiệm như thế ($b>a$)

+ Xét bộ $(a+b;b)$ ta có: $\left((a+b)^2-(a+b)b-b^2\right)^2=\left(-(b^2-ab-a^2)\right)^2=1$

Suy ra $(a+b;b)$ cũng là một nghiệm của (1)

Rõ ràng (2; 1) là một nghiệm của (1), nên ta có các bộ sau cũng là nghiệm của (1):
$(3;2), (5;3), (8;5), (13;8), (21;13), (34;21),...$

+ Xét bộ $(a;b-a)$ ta có: $\left(a^2-a(b-a)-(b-a)^2\right)^2=\left(-(b^2-ab-a^2)\right)^2=1$

Suy ra $(a;b-a)$ cũng là một nghiệm của (1).

- Nếu $a\le b-a\Rightarrow b\ge 2a\Rightarrow b(b-a)\ge 2a^2\Rightarrow b^2-ab-a^2>1\ (a>1)$ (vô lí)
- Nếu $a>b-a$ thì bộ $(a;b-a)$ là một nghiệm của (1) nhỏ hơn nghiệm $(b;a)$.

Quá trình phải dừng lại và kết thúc ở nghiệm $(b;1)$ $(b>1)$. Chú ý thêm rằng (2; 1) là bộ duy nhất thoả mãn (1) mà $b=1$.

Tóm lại tất cả các nghiệm nguyên dương của (1) sẽ là: $\left(F_n;F_{n-1}\right)$ với $n\ge 2$ trong đó dãy số

$$\left(F_n\right):\begin{cases}F_1=F_2=1\\F_{n+1}=F_n+F_{n-1}\quad\forall n\ge 2\end{cases}$$

Như vậy giá trị lớn nhất của P bằng giá trị lớn nhất của $F_{n-1}^2+F_n^2$ với $F_n\le 2014$.

Dãy các số hạng của dãy Fibonacci thoả mãn là: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 987^2+1597^2.

Câu 25. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x,y) với x,y nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn phương trình: $2\left(x^3-x\right)=y^3-y$.

Hướng dẫn giải bài 25

+) Áp dụng đẳng thức $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$. Ta có :

$$\Leftrightarrow x^3+x^3+(-y)^3=2x-y\Leftrightarrow(x+x-y)\left(x^2+x^2+y^2-x.x+xy+yx\ \right)+3x.x.(-y)=2x-y$$

$$\Leftrightarrow(2x-y)\left(x^2+y^2+2xy-1\right)=3x^2y\ (*)\Rightarrow\begin{cases}(2x-y)\mid 3x^2y\\(2x-y)\mid 3x^2(2x-y)\end{cases}\Rightarrow(2x-y)\mid 6x^3$$

Mặt khác $\left(2x-y,6x^3\right)=\left(2x-y,6\right)$

(do $(x,y)=1\Rightarrow(2x-y,x)=1\Rightarrow\left(2x-y,x^3\right)=1$)

Suy ra, $(2x-y)\mid 6$ nên $2x-y\in\{1,2,3,6\}$ (do từ $(*)$ $2x-y\in\mathbb{N}^*$).

Trường hợp 1. $2x-y=1 \Leftrightarrow y=2x-1$ thay vào phương trình đã cho ta được:

$2\left(x^3-x\right)=(2x-1)^3-(2x-1) \Leftrightarrow 6x(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=1$

Trường hợp 2. $2x-y=2 \Leftrightarrow y=2x-2$ thay vào phương trình đã cho ta được:

$$(x-1)\left(x^2-3x+1\right)=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=0 \text{ (loại)}$$

Trường hợp 3. $2x-y=3 \Leftrightarrow y=2x-3$ thay vào phương trình đã cho ta được:

$(x-1)^2(x-4)=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow y=5$ (với $x=1 \Rightarrow y=0$ (loại))

Trường hợp 4. $2x-y=6 \Leftrightarrow y=2x-6$ thay vào phương trình đã cho ta được :

$x^3-12x^2+36x-35=0$ do $y \in \mathbf{Z}^+, x>3,\ x \mid 35 \Rightarrow x \in \{5,7,35\}$ thử lại không có giá trị nào thỏa mãn. Vậy các cặp số thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $(x,y)=(1\ ,\ 1)$ và $(x,y)=(4\ ,\ 5)$

Câu 26. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho với mỗi số nguyên tố p cho trước, tồn tại số nguyên a thỏa mãn: $2^p+3^p=a^n$.

Hướng dẫn giải bài 26

+) Với $n=1$ ta thấy luôn thỏa mãn.

+) Xét với $n>1$.

*) với $p=2$ thì $13=a^n$ không tồn tại a và n.

*) Với $p>2$ thì p lẻ. Giả sử tồn tại hai số a và n thỏa mãn. Ta có

$a^n=2^p+3^p=(2+3)\left(\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}2^{p-i}3^{i-1}\right)$ suy ra $a^n \vdots 5 \Rightarrow a \vdots 5$.

Hơn nữa $n \geq 2 \Rightarrow a^n \vdots 5 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}2^{p-i}3^{i-1}\right) \vdots 5 \quad (1)$.

Mặt khác với mỗi $i=1,2,\ldots,p-1$ ta có:

$(-1)^{i-1}.2^{p-i}.3^{i-1}=(-1)^{i-1}.2^{p-i}.(5-2)^{i-1} \equiv (-1)^{i-1}.2^{p-i}.(-2)^{i-1} \equiv 2^{p-1} \pmod 5$

Do đó $\left(\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}2^{p-i}3^{i-1}\right) \equiv p.2^{p-1} \pmod 5 \ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có $p.2^{p-1} \vdots 5$. Do $\left(2^{p-1},5\right)=1$ nên $p \vdots 5$. Vậy $p=5$.

Mà $a \vdots 5 \Rightarrow a=5k\ (k \in \mathbb{Z})$. Khi đó

$2^5+3^5=(5k)^n \Leftrightarrow 275=(5k)^n \Rightarrow 275 \vdots 5^n \Rightarrow n=2 \Rightarrow k^2=11$ vô lý. Vậy không tồn số nguyên $n>1$ thỏa mãn. Kết luận $n=1$.

Câu 27. Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên x,y không chia hết cho 2015 và thỏa mãn $x^2+8059y^2=4.2015^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Hướng dẫn giải bài 27

- Nếu $n=1$ thì $x=y=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Giả sử bài toán đúng đến n.
- Ta sẽ chứng minh bài toán đúng đến $n+1$.

Thật vậy,

$x^2+(4a-1)y^2=4a^n \Leftrightarrow 4a^{n+1}=ax^2+a(4a-1)y^2$.

$$\Leftrightarrow 4a^{n+1}=\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left[\frac{(4a-1)y}{2}\right]^2+(4a-1)\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2\right]$$

Ta có hai cách phân tích như sau:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left[\frac{(4a-1)y}{2}\right]^2+(4a-1)\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2\right]=\left[\frac{x+(4a-1)y}{2}\right]^2+(4a-1)\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

hoặc là

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left[\frac{(4a-1)y}{2}\right]^2+(4a-1)\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2\right]=\left[\frac{x-(4a-1)y}{2}\right]^2+(4a-1)\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

Đặt $\begin{cases} X_1=\dfrac{x+(4a-1)y}{2} \\ Y_1=\dfrac{x-y}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} X_2=\dfrac{x-(4a-1)y}{2} \\ Y_2=\dfrac{x+y}{2} \end{cases}$

Khi đó: $4a^{n+1}=X_1^2+(4a-1)Y_1^2$ (1) hoặc $4a^{n+1}=X_2^2+(4a-1)Y_2^2$ (2)

- Nếu $Y_1 \not\vdots\, a$ thì $X_1-Y_1=2ay \vdots a \Rightarrow X_1 \not\vdots\, a$. Kết hợp với (1) suy ra X_1, Y_1 thỏa mãn yêu cầu bài toán trong trường hợp $n+1$.
- Nếu $Y_2 \not\vdots\, a$ thì $X_2-Y_2=2ay \vdots a \Rightarrow X_2 \not\vdots\, a$. Kết hợp với (2) suy ra X_2, Y_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán trong trường hợp $n+1$. Vậy ta hoàn tất việc chứng minh.

Câu 28. Giả sử P là số nguyên tố có dạng $3n+2$. Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên x sao cho (x^2+3) chia hết cho P.

Hướng dẫn giải bài 28

Giả sử ngược lại, tồn tại các số nguyên tố p dạng $3n+2$ để phương trình đồng dư sau $(x^2+3)\equiv 0(\text{mod } p)$ có nghiệm. Gọi p_0 là số bé nhất

Trong các số đó, và giả sử $x=e(<p_0)$ thỏa mãn $(x^2+3)\equiv 0(\text{mod } p_0)$

Ta có thể giả sử e chẵn (có thể thay $p-e$)

Xét các trường hợp $e^2\equiv 1(\text{mod } 3)$ hoặc $e^2\equiv 0(\text{mod } 3)$

Trường hợp 1: Từ $e^2\equiv -3(\text{mod } p_0)$ ta có: $e^2=-3+fp_0$, trong đó $f<p_0$ và f lẻ

Suy ra $fp_0=e^2+3\equiv 4(\text{mod } 3)$.

Do $p_0\equiv 2(\text{mod } 3)$ nên $f\equiv 2(\text{mod } 3)$. Vậy f lẻ có dạng $3n+2$

Suy ra f phải có ước nguyên tố lẻ dạng q dạng $3n+2$

Ta có $e^2\equiv -3(\text{mod } q)$ mâu thuẫn với cách chon p_0

Trường hợp 2: $e^2\equiv 0(\text{mod } 3)$. Suy ra $e=3^a k$ với k không chia hết cho 3 và a nguyên dương.

Do $e^2\equiv -3(\text{mod } p_0)$ nên $3^{2a}k^2\equiv -3(\text{mod } p_0)$

Suy ra $3^{2a-1}k^2\equiv -1(\text{mod } p_0)$,

$3^{2a-1}k^2+1=p_0 h,\ h<p_0$, h lẻ

Do đó $p_0 h\equiv 1(\text{mod } 3)$ nhưng $p_0\equiv 2(\text{mod } 3)$ nên $h\equiv 2(\text{mod } 3)$

Suy ra h lẻ có dạng $3n+2$. Do đó tồn tại ước nguyên tố r của h có dạng $3n+2$

Vậy $3^{2a-1}k^2\equiv -1(\text{mod } h)\equiv -1(\text{mod } r)$, tức là $3^{2a}k^2\equiv -3(\text{mod } r)$ mâu thuẫn p_0 bé nhất

Vậy rằng không tồn tại số nguyên x sao cho (x^2+3) chia hết cho p.

(với p là số nguyên tố có dạng $3n+2$)