Ta xét trường hợp các số cạnh nhau cách nhau xa nhất

$$\begin{cases} a_1 = a_3 = \cdots = a_{2015} = 100 \\ a_2 = a_4 = \cdots = a_{2014} = 0 \end{cases}$$

Đặt $S = (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2014} - a_{2015})$ lúc đầu tiên chưa tác động thì $S = -100 \cdot 1007$

Sau hữu hạn lần tác động tất cả các số bằng nhau do đó khi đó $S = 0$.

Ta nhận xét rằng

Tác động lên các cặp $(a_2, a_3), (a_2, a_3), \ldots, (a_{2014}, a_{2015})$ Thì S không đổi

Tác động lên cặp (a_1, a_2) Thì S tăng lên một đơn vị

Tác động lên cặp (a_{2015}, a_1) Thì S giảm 1 đơn vị.

Bộ (a_1, a_2) bị tác động lớn hơn hoặc bằng 100.1007 lần thì $k \geq 100.1007$. Ta sẽ chứng minh $k = 100.1007$ là giá trị nhỏ nhất thoả mãn.

Tác động cặp (a_{i-1}, a_i) số lần là $a_{i+1} + a_{i+3} + \cdots$

Tác động cặp (a_i, a_{i+1}) số lần là $a_{i+2} + a_{i+4} + \cdots$

Sau các lần tác động như vậycác số bằng nhau và bằng $a_1 + a_2 + \cdots a_{2014} + a_{2015}$.nên số lần tác động ≤ 100.1007 suy ra điều phải chứng minh.

Câu 11. Cho n là số nguyên lẻ và $n \geq 5$. Gọi k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $kn+1$ là số chính phương và l là số nguyên dương nhỏ nhất sao ln là số chính phương. Chứng minh rằng n là số nguyên tố khi và chỉ khi $k > \frac{n}{4}$ và $l > \frac{n}{4}$.

Hướng dẫn giải

Nếu $n = p$ là số nguyên tố, khi đó $l = p > \frac{p}{4}$.

$kp+1$ chính phương nên tồn tại y nguyên dương mà $kp = (y+1)(y-1)$.

Do đó $y - 1 = k_1$; $y + 1 = k_2 p$ hoặc $y - 1 = k_1 p$; $y + 1 = k_2$.

Trong cả hai trường hợp thì ta đều có $2y > p$.

Nếu $k \leq \frac{p}{4} \Rightarrow 4k < p \Rightarrow y^2 = kp + 1 < \frac{p^2}{4} + 1 \Rightarrow p^2 < 4y^2 < p^2 + 4$

Điều này không thể xảy ra vì không có số chính phương nào nằm giữa p^2 và $p^2 + 4 \ khi\ p > 4$.

Chiều ngược lại, ta sẽ chứng minh bằng phản chứng rằng không tồn tại hợp số n lẻ, $n > 3$ nào mà $4l > n$ và $4k > n$.

Giả sử tồn tại $n = x^2 p_1 p_2 ... p_s$ với p_i là các số nguyên tố. Khi đó $l = p_1 p_2 \ldots p_s$ và ta có $4 p_1 p_2 .. p_s = 4l > n = x^2 p_1 p_2 .. p_s$, suy ra $x = 1$. Vậy $n = p_1 p_2 .. p_s$.

Gọi y là số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn 1 sao cho $y^2 - 1$ chia hết cho n (y tồn tại vì $(n+1)^2 - 1$ chia hết cho n).

Rõ ràng $kn + 1 = y^2$ nên $k > \frac{n}{4}$, hay $2y > n$.

Ta viết $n = pr$, với $p = p_i$ nào đó và r là tích các số nguyên tố còn lại, $r > 1$.

Theo định lý Thặng dư Trung Hoa, tồn tại duy nhất số T nguyên, không âm và $T < n$ sao cho

$T \equiv 1 \pmod{r}$

$T \equiv -1 \pmod{p}$

Xét số $S = n - T$, ta có

$S \equiv -1 \pmod{r}$

$S \equiv 1 \pmod{p}$

Khi đó $T^2 \equiv S^2 \equiv 1 \pmod{n}$, rõ ràng T, S đều không nhỏ hơn y. Mà một trong hai số S, T nhỏ hơn $\frac{n}{2}$, do đó $k < \frac{n}{4}$, mâu thuẫn.

Vậy n là số nguyên tố.(đpcm)

Câu 12. Cho $0 < a_1 < a_2 < ... < a_n \le 2n$ là các số nguyên thỏa mãn bội số chung nhỏ nhất của hai số bất kì trong chúng đều lớn hơn $2n$. Chứng minh rằng $a_1 > \left[\frac{2n}{3}\right]$.

($[x]$ là kí hiệu phần nguyên của số thực x).

Hướng dẫn giải

Rõ ràng, trong các số trên không tồn tại cặp số nào mà số này chia hết cho số kia (vì nếu trái lại thì bội chung nhỏ nhất của chúng nhỏ hơn hoặc bằng). Ta viết $a_k = 2^{t_k} A_k$ với A_k là số lẻ. Ta thấy các giá trị A_k là phân biệt. Thật vậy, nếu tồn tại $A_i = A_j = A$ thì

$\text{lcm}(a_i, a_j) = 2^{t_i} A = a_i \le 2n$ hoặc $\text{lcm}(a_i, a_j) = 2^{t_j} A = a_j \le 2n$ mâu thuẫn với giả thiết.

Mặt khác từ 1 đến $2n$ ta có n số lẻ phân biệt. Do đó các giá trị A_k là các số lẻ từ 1 đến theo một thứ tự nào đó.

Xét $a_1 = 2^{t_1} A_1$.

Nếu $a_1 \le \left[\frac{2n}{3}\right]$ thì $3a_1 = 2^{t_1} 3A_1 \le 2n \Rightarrow 3A_1 \le 2n$. Do đó $3A_1$ là một số lẻ nhỏ hơn , tức là $3A_1 = A_j$ nào đó.

Như vậy $a_j = 2^{t_j} 3A_1$. Khi đó $\text{lcm}(a_1, a_j) = 2^{t_1} 3A_1 = 3a_1 \ge 2n$ mâu thuẫn với giả thiết hoặc $\text{lcm}(a_1, a_j) = 2^{t_j} 3A_1 = a_j \ge 2n$, mâu thuẫn với điều giả sử.

Vậy điều giả sử là sai, tức là ta có $a_1 > \left[\frac{2n}{3}\right]$.

Câu 13. Ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Giải phương trình

$$x^2 - (1 + [x])x + 2015 = 0.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $x \ne 0$.

$$\text{pt} \Leftrightarrow [x] = \frac{x^2 - x + 2015}{x} \Leftrightarrow x - 1 < \frac{x^2 - x + 2015}{x} \le x \Leftrightarrow x \ge 2015.$$

$[x]=a\in\mathbb{N}\ (a\ge 2015)\Rightarrow x^2-(a+1)x+2015=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{a+1\pm\sqrt{(a+1)^2-8060}}{2}$ (*)

$Do\ a\ge 2015\Rightarrow x^2-(a+1)x+2015=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{a+1+\sqrt{(a+1)^2-8060}}{2}\ge 2015$ (t/m);

$\dfrac{a+1-\sqrt{(a+1)^2-8060}}{2}\le\dfrac{a+1-\sqrt{(a+1)^2-4a}}{2}<2015\ (loai)$

Vậy $S=\left\{\dfrac{a+1+\sqrt{(a+1)^2-8060}}{2};\ a\in\mathbb{N};a\ge 2015\right\}$

Câu 14. Cho $x,\ y$ là các số nguyên khác -1 thỏa mãn $\dfrac{x^3+1}{y+1}+\dfrac{y^3+1}{x+1}$ là một số nguyên. Chứng minh rằng $\left(x^{30}-1\right)\vdots(y+1)$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\dfrac{x^3+1}{y+1}=\dfrac{a}{b};\dfrac{y^3+1}{x+1}=\dfrac{c}{d}$ với $a,\ b,\ c,\ d$ là các số nguyên và $b,\ d>0,\ (a,b)=1;\ (c,d)=1$.

Ta có $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$ là số nguyên. Do đó $(ad+bc)\vdots bd\Rightarrow ad+cb\ \vdots\ b\Rightarrow ad\ \vdots\ b\Rightarrow d\ \vdots\ b$

Mặt khác $\dfrac{a}{b}.\dfrac{c}{d}=\dfrac{x^3+1}{y+1}.\dfrac{y^3+1}{x+1}=\left(x^2-x+1\right)\left(y^2-y+1\right)$ là số nguyên $\Rightarrow ac\ \vdots\ bd\Rightarrow ac\ \vdots d$

$\Rightarrow a\ \vdots d$

Vì $(c,d)=1$ nên $a\ \vdots\ b\Rightarrow b=1$. Do

$\dfrac{x^3+1}{y+1}=\dfrac{a}{b}\Rightarrow x^3+1\vdots(y+1)\Rightarrow x^{30}-1=(x^{15}-1)(x^{15}+1)\vdots(y+1)$

Câu 15. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình:

$2x^2+3y^2-5xy+3x-2y-3=0$

Hướng dẫn giải

Xem (1) là phương trình bậc hai ẩn x ta có (1) $\Leftrightarrow 2x^2+(3-5y)x+3y^2-2y-3=0$

* Để (1) có nghiệm x nguyên điều kiện cần là:

$\Delta=(3-5y)^2-4.2\left(3y^2-2y-3\right)=y^2-14y+33=k^2$ (k nguyên, không âm)

* Lại xem $y^2-14y+33-k^2=0$ là phương trình bậc hai ẩn y. Để có nghiệm nguyên y điều kiện cần là $\delta'=49-\left(33-k^2\right)=16+k^2=m^2$ là một số chính phương (m nguyên dương).

Do $m^2-k^2=16\Leftrightarrow(m+k)(m-k)=16$ và $16=16.1=8.2=4.4$ nên ta có các trường hợp

+) TH1: $\begin{cases} m+k=8 \\ m-k=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=5 \\ k=3 \end{cases}$ suy ra phương trình (1) có nghiệm $(x;y)=(15;12),(1,2)$

+) TH2: $\begin{cases} m+k=4 \\ m-k=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=4 \\ k=0 \end{cases}$ suy ra phương trình (1) có nghiệm $(x;y)=(13;11),(3,3)$

+) TH3: $\begin{cases} m+k=16 \\ m-k=1 \end{cases}$ (Loại).

Câu 16. Cho a, b là các số nguyên dương phân biệt sao cho $a^2+ab+b^2 \mid ab(a+b)$. Chứng minh rằng $|a-b|>\sqrt[3]{ab}$.

Hướng dẫn giải

Câu 17. Cho m,n là hai số nguyên dương lẻ sao cho n^2-1 chia hết cho $\left|m^2+1-n^2\right|$. Chứng minh rằng $\left|m^2+1-n^2\right|$ là số chính phương.

Hướng dẫn giải

* Nếu $m=n$ thì ta có ngay đpcm

* Nếu $m \neq n$: Đặt $\begin{cases} m+n=2x \\ m-n=2y \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{Z};x>0;y\neq 0)$

Khi đó $\begin{cases} m=x+y \\ n=x-y \end{cases}$ và từ $x+y>0;x-y>0$ suy ra $x>|y|$

Do $n^2-1 \vdots \left|m^2+1-n^2\right| \Rightarrow m^2 \vdots \left|m^2+1-n^2\right| \Rightarrow m^2=k\left(m^2+1-n^2\right)$ (1), $k\in\mathbb{Z}$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow (x+y)^2=k(4xy+1) \Leftrightarrow x^2-2(2k-1)xy+(y^2-k)=0$ (*)

Phương trình (*) có một nghiệm nguyên là x nên có một nghiệm nữa là x_1.

Ta có $\begin{cases} x+x_1=2(2k-1) \\ xx_1=y^2-k \end{cases} \Rightarrow x_1\in\mathbb{Z}$.

- Nếu $x_1>0$ thì (x_1,y) là cặp nghiệm thỏa mãn (*), suy ra $x_1>|y|$

Khi đó $y^2-k=xx_1>|y|^2=y^2 \Rightarrow k<0$. Suy ra $0<x+x_1=2(2k-1)<0$, mâu thuẫn.

- Nếu $x_1<0$ thì $xx_1=y^2-k<0 \Rightarrow k>y^2 \Rightarrow k>0 \Rightarrow 4xy+1>0 \Rightarrow y>0$.

Ta có $k=x_1^2-2(2k-1)x_1y+y^2=x_1^2+2(2k-1)|x_1|y+y^2$

Suy ra $k>2(2k-1)|x_1|y\geq 2(2k-1)>k$, mâu thuẫn.

Vậy $x_1=0$. Khi đó $k=y^2$ và $\dfrac{m^2}{k}=m^2+1-n^2$ là số chính phương.

Do đó $\left|m^2+1-n^2\right|$ là số chính phương (đpcm).

Câu 18. Tìm tất cả các số nguyên x,y thỏa mãn phương trình

$$(x-1)\left(y^5-y^4-y^3-4y\right)=x^{11}-1.$$

Hướng dẫn giải

*) Ta thấy các cặp $(x;y)=(1;t),t\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn bài toán.

*) Xét $x\neq 1$. Phương trình được viết lại dưới dạng

$$y(y-2)\left(y^3+y^2+y+2\right)=\frac{x^{11}-1}{x-1} \quad (1).$$

Gọi p là ước nguyên tố bất kỳ của $\dfrac{x^{11}-1}{x-1}$, suy ra $p \mid x^{11}-1$.

Gọi $h = ord_p(x)$, suy ra $h \mid 11 \Rightarrow h \in \{1,11\}$.

- Nếu $h=1$ thì $x \equiv 1 \pmod{11}$. Vì $p \mid x^{10}+x^9+\cdots+x+1$ nên $p \mid 11$ suy ra $p=11$. (2)
- Nếu $h=11$ thì từ $x^{p-1}-1 \,\vdots\, p$ suy ra $p \equiv 1 \pmod{11}$. (3)

Vì p là ước nguyên tố bất kỳ của $\dfrac{x^{11}-1}{x-1}$ nên từ (2), (3) suy ra với mọi ước số d của $\dfrac{x^{11}-1}{x-1}$ đều có tính chất $d \equiv 0$ hoÆc $1 \pmod{11}$. (4)

Từ (1) suy ra $y, y-2$ vµ y^3+y^2+y+2 đều là ước số của $\dfrac{x^{11}-1}{x-1}$. (5)

Vì $y, y-2 \mid \dfrac{x^{11}-1}{x-1}$ nên suy ra $y \equiv 0,1,2$ hoÆc $3 \pmod{11}$.

- Nếu $y \equiv 0 \pmod{11}$ thì $y^3+y^2+y+2 \equiv 2 \pmod{11}$, trái với (4), (5).
- Nếu $y \equiv 1 \pmod{11}$ thì $y^3+y^2+y+2 \equiv 5 \pmod{11}$, trái với (4), (5).
- Nếu $y \equiv 2 \pmod{11}$ thì $y^3+y^2+y+2 \equiv 5 \pmod{11}$, trái với (4), (5).
- Nếu $y \equiv 3 \pmod{11}$ thì $y^3+y^2+y+2 \equiv 8 \pmod{11}$, trái với (4), (5).

Từ các trường hợp trên, suy ra phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là $(x;y)=(1;t)$ víi $t \in \mathbb{Z}$.

Câu 19. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $(n-1)!$ không chia hết cho n^2.

Hướng dẫn giải

Nhận xét rằng khi n là số nguyên tố thì do $(n-1) < n$ nên $(n-1)!$ hiển nhiên không chia hết cho n, và do đó không chia hết cho n^2.

Ta sẽ tìm n không nguyên tố thỏa $(n-1)!$ không chia hết cho n^2.

Ta có: $(n-1)! \not\vdots\; n^2 \Leftrightarrow n! \not\vdots\; n^3$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi tồn tại ít nhất một ước số p của n sao cho bậc của p (số mũ lũy thừa của p trong phân tích thừa số nguyên tố) trong $n!$ là bé hơn bậc của p trong n^3.

Giả sử $n = p^t.k$ (với (p, k)=1). Theo lí luận trên ta có bất đẳng thức:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots < 3t \quad (*)$$

Suy ra: $3t \geq \left[\dfrac{n}{p}\right]+\left[\dfrac{n}{p^2}\right]+\left[\dfrac{n}{p^3}\right]+\ldots+\left[\dfrac{n}{p^t}\right] \Leftrightarrow 3t \geq k.(p^{t-1}+p^{t-2}+\ldots+1)$

$\Leftrightarrow 3t \geq \dfrac{k(p^t-1)}{p-1}$ (**). Suy ra: $3t \geq \dfrac{1.(2^t-1)}{2-1} = 2^t-1 \Rightarrow t \in \{1,2,3\}$

Ta xét 3 trường hợp và dùng các phép thử lại để làm rõ kết quả bài toán

• **TH1**: $t=1$. Ta có: (**) $\Rightarrow 3 \geq k$. Suy ra $k=2$ hoặc $k=3$ (Do $k=1$ thì n trở thành số nguyên tố)

+ Với $k=2$: $n=2p$ (p nguyên tố).