$A = (\underbrace{11.....1}_{n})(10^{n+1} + 5) + 1 = \frac{10^{n+1}-1}{10-1}.(10^{n+1}+5)+1$

Đặt $a = 10^{n+1}$ thì $A = \frac{a-1}{9}(a+5)+1 = \frac{a^2+4a-5+9}{9} = \frac{a^2+4a+4}{9} = \left(\frac{a+2}{3}\right)^2$

b) $B = \underbrace{111.....1}_{n}\underbrace{555.....5}_{n-1}6$ (cĩ n số 1 và n-1 số 5)

$B = \underbrace{111.....1}_{n}\underbrace{555.....5}_{n} + 1 = \underbrace{111.....1}_{n}.\ 10^n + \underbrace{555.....5}_{n} + 1 = \underbrace{111.....1}_{n}.\ 10^n + 5\left(\underbrace{111.....1}_{n}\right) + 1$

Đặt $\underbrace{11.....1}_{n} = a$ thì $10^n = 9a + 1$ nên

$B = a(9a+1) + 5a + 1 = 9a^2 + 6a + 1 = (3a+1)^2 = \underbrace{33....3}_{n-1}4^2$

c) $C = \underbrace{11.....1}_{2n}.+ \underbrace{44.....4}_{n} + 1$

Đặt $a = \underbrace{11.....1}_{n}$ Thì $C = \underbrace{11.....1}_{n}\underbrace{11.....1}_{n} + 4.\ \underbrace{11.....1}_{n} + 1 =\ a.\ 10^n + a + 4\ a + 1$

$= a(9a+1) + 5a + 1 = 9a^2 + 6a + 1 = (3a+1)^2$

d) $D = \underbrace{99....9}_{n}8\underbrace{00.....0}_{n}1$. Đặt $\underbrace{99....9}_{n} = a \Rightarrow 10^n = a + 1$

$D = \underbrace{99....9}_{n}.\ 10^{n+2} + 8.\ 10^{n+1} + 1 = a\ .\ 100\ .\ 10^n + 80.\ 10^n + 1$

$= 100a(a+1) + 80(a+1) + 1 = 100a^2 + 180a + 81 = (10a+9)^2 = (\underbrace{99....9}_{n+1})^2$

e) $E = \underbrace{11.....1}_{n}\underbrace{22.....2}_{n+1}5 = \underbrace{11.....1}_{n}\underbrace{22.....2}_{n+1}00 + 25 = \underbrace{11.....1}_{n}.10^{n+2} + 2.\ \underbrace{11.....1}_{n}00 + 25$

$= [a(9a+1) + 2a]100 + 25 = 900a^2 + 300a + 25 = (30a+5)^2 = (\underbrace{33.....3}_{n}5)^2$

f) $F = \underbrace{44.....4}_{100} = 4.\underbrace{11.....1}_{100}$ là số chính phương thì $\underbrace{11.....1}_{100}$ là số chính phương

Số $\underbrace{11.....1}_{100}$ là số lẻ nên nó là số chính phương thì chia cho 4 phải dư 1

Thật vậy: $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ chia 4 dư 1

$\underbrace{11.....1}_{100}$ có hai chữ số tận cùng là 11 nên chia cho 4 thì dư 3 vậy $\underbrace{11.....1}_{100}$ không là số chính phương nên F = $\underbrace{44.....4}_{100}$ không là số chính phương

Bài 4:

a) Cho các số A = $\underbrace{11........11}_{2m}$; B = $\underbrace{11.......11}_{m+1}$; C = $\underbrace{66.....66}_{m}$

CMR: A + B + C + 8 là số chính phương .

Ta có: A $\frac{10^{2m}-1}{9}$; B = $\frac{10^{m+1}-1}{9}$; C = $6.\frac{10^m-1}{9}$ Nên:

$$A + B + C + 8 = \frac{10^{2m}-1}{9} + \frac{10^{m+1}-1}{9} + 6.\frac{10^m-1}{9} + 8 = \frac{10^{2m}-1+10^{m+1}-1+6(10^m-1)+72}{9}$$

$$= \frac{10^{2m}-1+10.10^m-1+6.10^m-6+72}{9} = \frac{\left(10^m\right)^2+16.10^m+64}{9} = \left(\frac{10^m+8}{3}\right)^2$$

b) CMR: Với mọi x,y Ỵ Z thì A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4 là số chính phương.

A = $(x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4$

= $(x^2 + 5xy + 4y^2)\,[(x^2 + 5xy + 4y^2) + 2y^2) + y^4$

= $(x^2 + 5xy + 4y^2)^2 + 2(x^2 + 5xy + 4y^2).y^2 + y^4 = [(x^2 + 5xy + 4y^2) + y^2)^2$

= $(x^2 + 5xy + 5y^2)^2$

Bài 5: Tìm số nguyên dương n để các biểu thức sau là số chính phương

a) $n^2 - n + 2$ b) $n^5 - n + 2$

Giải

a) Với n = 1 thì $n^2 - n + 2 = 2$ không là số chính phương

Với n = 2 thì $n^2 - n + 2 = 4$ là số chính phương

Với n > 2 thì $n^2 - n + 2$ không là số chính phương Vì

$(n - 1)^2 = n^2 - (2n - 1) < n^2 - (n - 2) < n^2$

b) Ta có $n^5 - n$ chia hết cho 5 Vì

$n^5 - n = (n^2 - 1).n.(n^2 + 1)$

Với n = 5k thì n chia hết cho 5

Với n = 5k $\pm$ 1 thì $n^2 - 1$ chia hết cho 5

Với n = 5k $\pm$ 2 thì $n^2 + 1$ chia hết cho 5

Nên $n^5 - n + 2$ chia cho 5 thì dư 2 nên $n^5 - n + 2$ có chữ số tận cùng là 2 hoặc 7 nên $n^5 - n + 2$ không là số chính phương

Vậy : Không có giá trị nào của n thoả mãn bài toán

Bài 6 :

a)Chứng minh rằng : Mọi số lẻ đều viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương

b) Một số chính phương có chữ số tận cùng bằng 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn

Giải

Mọi số lẻ đều có dạng a = 4k + 1 hoặc a = 4k + 3

Với a = 4k + 1 thì $a = 4k^2 + 4k + 1 - 4k^2 = (2k + 1)^2 - (2k)^2$

Với a = 4k + 3 thì $a = (4k^2 + 8k + 4) - (4k^2 + 4k + 1) = (2k + 2)^2 - (2k + 1)^2$

b)A là số chính phương có chữ số tận cùng bằng 9 nên

$A = (10k \pm 3)^2 = 100k^2 \pm 60k + 9 = 10.(10k^2 \pm 6) + 9$

Số chục của A là $10k^2 \pm 6$ là số chẵn (đpcm)

Bài 7:

Một số chính phương có chữ số hàng chục là chữ số lẻ. Tìm chữ số hàng đơn vị

Giải

Gọi $n^2 = (10a + b)^2 = 10.(10a^2 + 2ab) + b^2$ nên chữ số hàng đơn vị cần tìm là chữ số tận cùng của b^2

Theo đề bài , chữ số hàng chục của n^2 là chữ số lẻ nên chữ số hàng chục của b^2 phải lẻ

Xét các giá trị của b từ 0 đến 9 thì chỉ có $b^2 = 16$, $b^2 = 36$ có chữ số hàng chục là chữ số lẻ, chúng đều tận cùng bằng 6

Vậy : n^2 có chữ số hàng đơn vị là 6

Bài tập về nhà:

Bài 1: Các số sau đây, số nào là số chính phương

a) $A = \underbrace{22.....2}_{50}4$ b) B = 11115556 c) $C = \underbrace{99....9}_{n}\underbrace{00....0}_{n}25$

d) $D = \underbrace{44.....4}_{n}\underbrace{88....8}_{n-1}9$ e) $M = \underbrace{11.....1}_{2n} - \underbrace{22....2}_{n}$ f) $N = 1^2 + 2^2 + ... + 56^2$

Bài 2: Tìm số tự nhiên n để các biểu thức sau là số chính phương

a) $n^3 - n + 2$

b) $n^4 - n + 2$

Bài 3: Chứng minh rằng

a)Tổng của hai số chính phương lẻ không là số chính phương

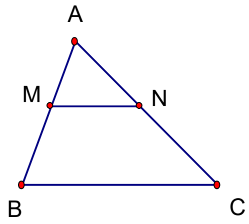
b) Một số chính phương có chữ số tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ

Bài 4: Một số chính phương có chữ số hàng chục bằng 5. Tìm chữ số hàng đơn vị

CHUYÊN ĐỀ 6 - CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐỊNH LÍ TA-LÉT

A.Kiến thức:

1. Định lí Ta-lét:



* §Þnh lÝ Ta-lÐt: $\left.\begin{array}{l}\Delta ABC\\ MN // BC\end{array}\right\} \Leftrightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

* HÖ qu¶: MN // BC $\Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

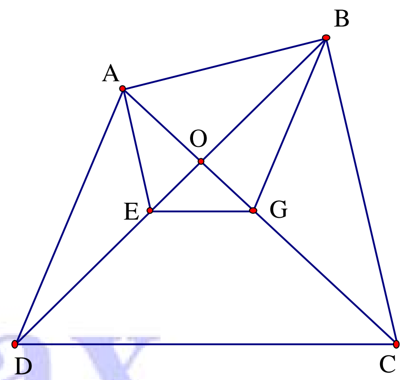
B. Bài tập áp dụng:

1. Bài 1:

Cho tứ giác ABCD, đường thẳng qua A song song với BC cắt BD ở E, đường thẳng qua B song song với AD cắt AC ở G

a) chứng minh: EG // CD

b) Giả sử AB // CD, chứng minh rằng AB^2 = CD. EG



Giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD

a) Vì AE // BC $\Rightarrow \dfrac{OE}{OB} = \dfrac{OA}{OC}$ (1)

BG // AC $\Rightarrow \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{OG}{OA}$ (2)

Nhân (1) với (2) vế theo vế ta có: $\dfrac{OE}{OD} = \dfrac{OG}{OC} \Rightarrow$ EG // CD

b) Khi AB // CD thì EG // AB // CD, BG // AD nên

$$\frac{AB}{EG} = \frac{OA}{OG} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{EG} = \frac{CD}{AB} \Rightarrow AB^2 = CD.\,EG$$

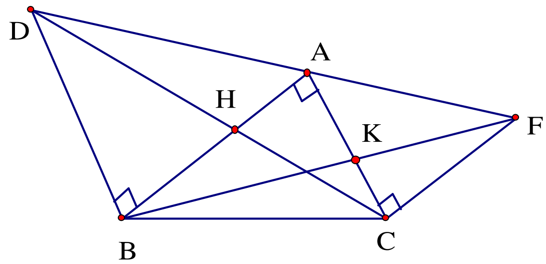
Bài 2:

Cho ABC vuông tại A, Vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABD vuông cân ở B, ACF vuông cân ở C. Gọi H là giao điểm của AB và CD, K là giao điểm của Ac và BF.

Chứng minh rằng:

a) AH = AK

b) $AH^2 = BH. CK$



Giải

Đặt AB = c, AC = b.

BD // AC (cùng vuông góc với AB)

nên $\frac{AH}{HB} = \frac{AC}{BD} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{AH}{HB + AH} = \frac{b}{b + c}$

Hay $\frac{AH}{AB} = \frac{b}{b + c} \Rightarrow \frac{AH}{c} = \frac{b}{b + c} \Rightarrow AH = \frac{b.c}{b + c}$ (1)

AB // CF (cùng vuông góc với AC) nên $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{CF} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{AK}{KC + AK} = \frac{c}{b + c}$

Hay $\frac{AK}{AC} = \frac{b}{b + c} \Rightarrow \frac{AK}{b} = \frac{c}{b + c} \Rightarrow AK = \frac{b.c}{b + c}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: AH = AK

b) Từ $\frac{AH}{HB} = \frac{AC}{BD} = \frac{b}{c}$ và $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{CF} = \frac{c}{b}$ suy ra $\frac{AH}{HB} = \frac{KC}{AK} \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{KC}{AH}$ (Vì AH = AK)

$\Rightarrow AH^2 = BH . KC$

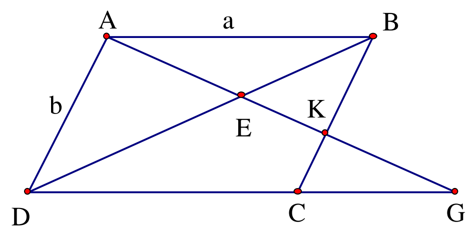
3. Bài 3: Cho hình bình hành ABCD, đường thẳng a đi qua A lần lượt cắt BD, BC, DC theo thứ tự tại E, K, G. Chứng minh rằng:

a) $AE^2 = EK. EG$

b) $\frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG}$

c) Khi đường thẳng a thay đổi vị trí nhưng vẫn qua A thì tích BK. DG có giá trị không đổi

Giải



a) Vì ABCD là hình bình hành và K $\in$ BC nên AD // BK, theo hệ quả của định lí Ta-lét ta có:

$\frac{EK}{AE} = \frac{EB}{ED} = \frac{AE}{EG} \Rightarrow \frac{EK}{AE} = \frac{AE}{EG} \Rightarrow AE^2 = EK.EG$

b) Ta có: $\frac{AE}{AK} = \frac{DE}{DB}$; $\frac{AE}{AG} = \frac{BE}{BD}$ nên

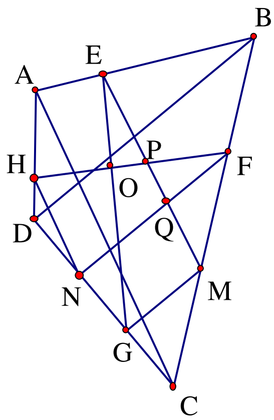
$$\frac{AE}{AK}+\frac{AE}{AG}=\frac{BE}{BD}+\frac{DE}{DB}=\frac{BD}{BD}=1\Rightarrow AE\left(\frac{1}{AK}+\frac{1}{AG}\right)=1\ \Rightarrow\ \frac{1}{AE}=\frac{1}{AK}+\frac{1}{AG}\ \text{(đpcm)}$$

c) Ta có: $\frac{BK}{KC}=\frac{AB}{CG}\Rightarrow\frac{BK}{KC}=\frac{a}{CG}$ (1); $\frac{KC}{AD}=\frac{CG}{DG}\Rightarrow\frac{KC}{b}=\frac{CG}{DG}$ (2)

Nhân (1) với (2) vế theo vế ta có: $\frac{BK}{b}=\frac{a}{DG}\Rightarrow BK.\,DG=ab$ không đổi (Vì a = AB; b = AD là độ dài hai cạnh của hình bình hành ABCD không đổi)

4. Bài 4:

Cho tứ giác ABCD, các điểm E, F, G, H theo thứ tự chia trong các cạnh AB, BC, CD, DA theo tỉ số 1:2. Chứng minh rằng:



a) EG = FH

b) EG vuông góc với FH

Giải

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của CF, DG

Ta có CM = $\frac{1}{2}$ CF = $\frac{1}{3}$BC $\Rightarrow \frac{BM}{BC}=\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ \frac{BE}{BA}=\frac{BM}{BC}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$EM // AC $\Rightarrow\ \frac{EM}{AC}=\frac{BM}{BE}=\frac{2}{3}\ \Rightarrow EM=\frac{2}{3}AC$ (1)

Tương tự, ta có: NF // BD $\Rightarrow\ \frac{NF}{BD}=\frac{CF}{CB}=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ NF=\frac{2}{3}BD$ (2)

mà AC = BD (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra : EM = NF (a)

Tương tự như trên ta có: MG // BD, NH // AC và MG = NH = $\frac{1}{3}$AC (b)

Mặt khác EM // AC; MG // BD Và AC $\perp$ BD $\Rightarrow$EM $\perp$ MG $\Rightarrow\ \widehat{EMG}=90^0$ (4)

Tương tự, ta có: $\widehat{FNH}=90^0$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $\widehat{EMG}=\widehat{FNH}=90^0$ (c)

Từ (a), (b), (c) suy ra ΔEMG = ΔFNH (c.g.c) $\Rightarrow$ EG = FH

b) Gọi giao điểm của EG và FH là O; của EM và FH là P; của EM và FN là Q thì

$\widehat{PQF}=90^0\Rightarrow\ \widehat{QPF}+\widehat{QFP}=90^0$ mà $\widehat{QPF}=\widehat{OPE}$ (đối đỉnh), $\widehat{OEP}=\widehat{QFP}$ (ΔEMG = ΔFNH)

Suy ra $\widehat{EOP} = \widehat{PQF} = 90^0 \Rightarrow EO \perp OP \Rightarrow EG \perp FH$

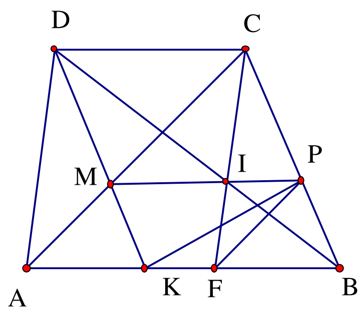
5. Bài 5:

Cho hình thang ABCD có đáy nhỏ CD. Từ D vẽ đường thẳng song song với BC, cắt AC tại M và AB tại K, Từ C vẽ đường thẳng song song với AD, cắt AB tại F, qua F ta lại vẽ đường thẳng song song với AC, cắt BC tại P. Chứng minh rằng

a) MP // AB

b) Ba đường thẳng MP, CF, DB đồng quy

Giải



a) EP // AC $\Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{AF}{FB}$ (1)

AK // CD $\Rightarrow \frac{CM}{AM} = \frac{DC}{AK}$ (2)

các tứ giác AFCD, DCBK la các hình bình hành nên

AF = DC, FB = AK (3)

Kết hợp (1), (2) và (3) ta có $\frac{CP}{PB} = \frac{CM}{AM} \Rightarrow$ MP // AB

(Định lí Ta-lét đảo) (4)

b) Gọi I là giao điểm của BD và CF, ta có: $\frac{CP}{PB} = \frac{CM}{AM} = \frac{DC}{AK} = \frac{DC}{FB}$

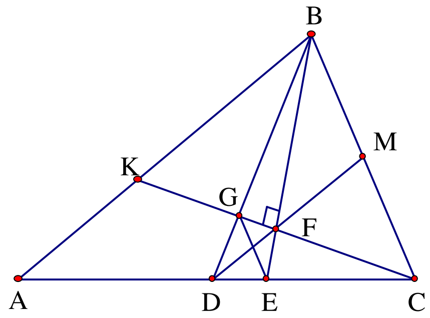
Mà $\frac{DC}{FB} = \frac{DI}{IB}$ (Do FB // DC) $\Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{DI}{IB} \Rightarrow$ IP // DC // AB (5)

Từ (4) và (5) suy ra : qua P có hai đường thẳng IP, PM cùng song song với AB // DC nên theo tiên đề Ơclít thì ba điểm P, I, M thẳng hang hay MP đi qua giao điểm của CF và DB hay ba đường thẳng MP, CF, DB đồng quy

6. Bài 6:

Cho ΔABC có BC < BA. Qua C kẻ đường thẳng vuông goác với tia phân giác BE của $\widehat{ABC}$; đường thẳng này cắt BE tại F và cắt trung tuyến BD tại G. Chứng minh rằng đoạn thẳng EG bị đoạn thẳng DF chia làm hai phần bằng nhau

Giải



Gọi K là giao điểm của CF và AB; M là giao điểm của DF và BC

ΔKBC có BF vừa là phân giác vừa là đường cao nên Δ KBC cân tại B $\Rightarrow$ BK = BC và FC = FK

Mặt khác D là trung điểm AC nên DF là đường trung bình của ΔAKC $\Rightarrow$ DF // AK hay DM // AB

Suy ra M là trung điểm của BC

DF = $\frac{1}{2}$AK (DF là đường trung bình của ΔAKC), ta có

$\frac{BG}{GD} = \frac{BK}{DF}$(do DF // BK) $\Rightarrow \frac{BG}{GD} = \frac{BK}{DF} = \frac{2BK}{AK}$ (1)

Mốt khác $\frac{CE}{DE} = \frac{DC - DE}{DE} = \frac{DC}{DE} - 1 = \frac{AD}{DE} - 1$ (Vì AD = DC) $\Rightarrow \frac{CE}{DE} = \frac{AE - DE}{DE} = \frac{DC}{DE} - 1 = \frac{AD}{DE} - 1$

Hay $\frac{CE}{DE} = \frac{AE - DE}{DE} - 1 = \frac{AE}{DE} - 2 = \frac{AB}{DF} - 2$ (vì $\frac{AE}{DE} = \frac{AB}{DF}$: Do DF // AB)

Suy ra $\frac{CE}{DE} = \frac{AK + BK}{DE} - 2 = \frac{2(AK + BK)}{AK} - 2$ (Do DF = $\frac{1}{2}$AK) $\Rightarrow \frac{CE}{DE} = \frac{2(AK + BK)}{AK} - 2 = \frac{2BK}{AK}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BG}{GD} = \frac{CE}{DE} \Rightarrow$ EG // BC

Gọi giao điểm của EG và DF là O ta có $\frac{OG}{MC} = \frac{OE}{MB}\left(= \frac{FO}{FM}\right) \Rightarrow$ OG = OE

Bài tập về nhà

Bài 1:

Cho tứ giác ABCD, AC và BD cắt nhau tại O. Đường thẳng qua O và song song với BC cắt AB ở E; đường thẳng song song với CD qua O cắt AD tại F

a) Chứng minh FE // BD

b) Từ O kẻ các đường thẳng song song với AB, AD cắt BD, CD tại G và H.

Chứng minh: CG. DH = BG. CH

Bài 2:

Cho hình bình hành ABCD, điểm M thuộc cạnh BC, điểm N thuộc tia đối của tia BC sao cho BN = CM; các đường thẳng DN, DM cắt AB theo thứ tự tại E, F.

Chứng minh:

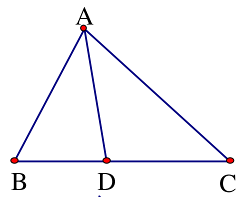
a) $AE^2 = EB. FE$

b) $EB = \left(\dfrac{AN}{DF}\right)^2 . EF$

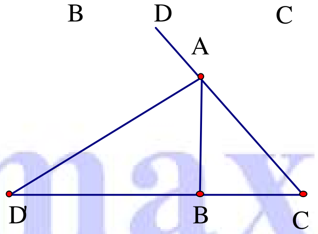
CHUYÊN ĐỀ 7 – CÁC BÀI TOÁN SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ TALÉT VÀ TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

A. Kiến thức:

2. Tính chất đường phân giác:



ΔABC ,AD là phân giác góc A $\Rightarrow \dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$



AD’là phân giác góc ngoài tại A: $\dfrac{BD'}{CD'} = \dfrac{AB}{AC}$

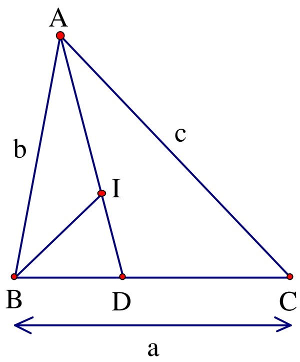
B. Bài tập vận dụng

1. Bài 1:

Cho ΔABC có BC = a, AB = b, AC = c, phân giác AD

a) Tính độ dài BD, CD

b) Tia phân giác BI của góc B cắt AD ở I; tính tỉ số: $\dfrac{AI}{ID}$



Giải

a) AD là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{c}{b}$

$$\Rightarrow \frac{BD}{CD+BD} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow \frac{BD}{a} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow BD = \frac{ac}{b+c}$$

Do đó $CD = a - \frac{ac}{b+c} = \frac{ab}{b+c}$

b) BI là phân giác của $\widehat{ABC}$ nên $\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} = c : \frac{ac}{b+c} = \frac{b+c}{a}$

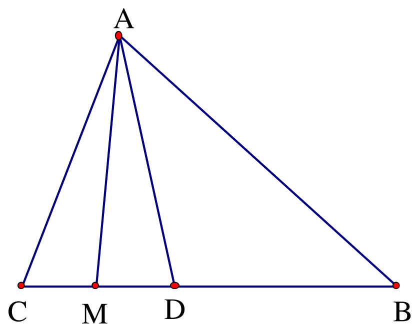
2. Bài 2:

Cho ΔABC, có $\widehat{B} < 60^0$ phân giác AD

a) Chứng minh AD < AB

b) Gọi AM là phân giác của ΔADC. Chứng minh rằng BC > 4 DM

Giải



a)Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{C} + \frac{\widehat{A}}{2} > \frac{\widehat{A}+\widehat{C}}{2} = \frac{180^0 - \widehat{B}}{2} = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{ADB} > \widehat{B} \Rightarrow AD < AB$

b) Gọi BC = a, AC = b, AB = c, AD = d

Trong ΔADC, AM là phân giác ta có

$$\frac{DM}{CM} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{DM}{CM+DM} = \frac{AD}{AD+AC} \Rightarrow \frac{DM}{CD} = \frac{AD}{AD+AC}$$

$\Rightarrow DM = \frac{CD.AD}{AD+AC} = \frac{CD.\,d}{b+d}$; $CD = \frac{ab}{b+c}$ (Vận dụng bài 1) $\Rightarrow DM = \frac{abd}{(b+c)(b+d)}$

Để c/m BC > 4 DM ta c/m $a > \frac{4abd}{(b+c)(b+d)}$ hay $(b+d)(b+c) > 4bd$ (1)

Thật vậy : do $c > d \Rightarrow (b+d)(b+c) > (b+d)^2 \geq 4bd$. Bất đẳng thức (1) được c/m

Bài 3:

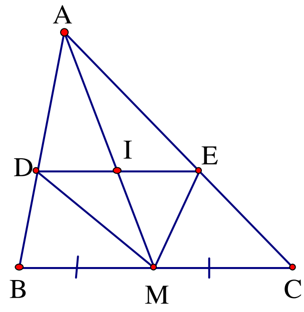
Cho ΔABC, trung tuyến AM, các tia phân giác của các góc AMB , AMC cắt AB, AC theo thứ tự ở D và E

a) Chứng minh DE // BC

b) Cho BC = a, AM = m. Tính độ dài DE

c) Tìm tập hợp các giao điểm I của AM và DE nếu ΔABC có BC cố định, AM = m không đổi

d) ΔABC có điều kiện gì thì DE là đường trung bình của nó



Giải

a) MD là phân giác của $\widehat{AMB}$ nên $\frac{DA}{DB} = \frac{MB}{MA}$ (1)

ME là phân giác của $\widehat{AMC}$ nên $\frac{EA}{EC} = \frac{MC}{MA}$ (2)

Từ (1), (2) và giả thiết MB = MC ta suy ra $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC} \Rightarrow$ DE // BC

b) DE // BC $\Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AI}{AM}$. Đặt DE = x $\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{m - \frac{x}{2}}{m} \Rightarrow x = \frac{2a.m}{a + 2m}$

c) Ta có: MI = $\frac{1}{2}$ DE = $\frac{a.m}{a + 2m}$ không đổi $\Rightarrow$ I luôn cách M một đoạn không đổi nên tập hợp các điểm I là đường tròn tâm M, bán kính MI = $\frac{a.m}{a + 2m}$ (Trừ giao điểm của nó với BC

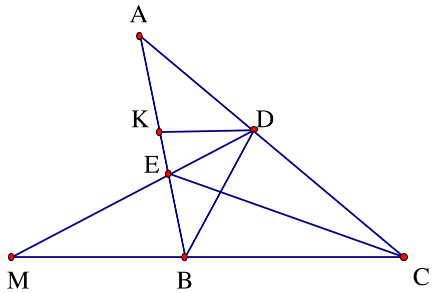
d) DE là đường trung bình của $\Delta ABC \Leftrightarrow$ DA = DB $\Leftrightarrow$ MA = MB $\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông ở A

4. Bài 4:

Cho ΔABC (AB < AC) các phân giác BD, CE

a) Đường thẳng qua D và song song với BC cắt AB ở K, chứng minh E nằm giữa B và K

b) Chứng minh: CD > DE > BE



Giải

a) BD là phân giác nên

$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} < \frac{AC}{BC} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow \frac{AD}{DC} < \frac{AE}{EB}$ (1)

Mặt khác KD // BC nên $\frac{AD}{DC} = \frac{AK}{KB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AK}{KB} < \frac{AE}{EB} \Rightarrow \frac{AK + KB}{KB} < \frac{AE + EB}{EB}$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{KB} < \dfrac{AB}{EB} \Rightarrow KB > EB \Rightarrow$ E nằm giữa K và B

b) Gọi M là giao điểm của DE và CB. Ta có $\widehat{CBD} = \widehat{KDB}$ (Góc so le trong) $\Rightarrow \widehat{KBD} = \widehat{KDB}$

mà E nằm giữa K và B nên $\widehat{KDB} > \widehat{EDB} \Rightarrow \widehat{KBD} > \widehat{EDB} \Rightarrow \widehat{EBD} > \widehat{EDB} \Rightarrow EB < DE$

Ta lại có $\widehat{CBD} + \widehat{ECB} = \widehat{EDB} + \widehat{DEC} \Rightarrow \widehat{DEC} > \widehat{ECB} \Rightarrow \widehat{DEC} > \widehat{DCE}$ (Vì $\widehat{DCE} = \widehat{ECB}$)

Suy ra $CD > ED \Rightarrow CD > ED > BE$

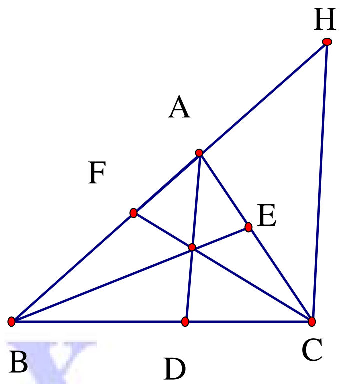
5. Bài 5:

Cho ΔABC với ba đường phân giác AD, BE, CF. Chứng minh

a. $\dfrac{DB}{DC}.\dfrac{EC}{EA}.\dfrac{FA}{FB} = 1$.

b. $\dfrac{1}{AD} + \dfrac{1}{BE} + \dfrac{1}{CF} > \dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{CA} + \dfrac{1}{AB}$.

Giải



a)AD là đường phân giác của $\widehat{BAC}$ nên ta có: $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ (1)

Tương tự: với các phân giác BE, CF ta có: $\dfrac{EC}{EA} = \dfrac{BC}{BA}$ (2) ;

$\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{CA}{CB}$ (3)

Tứừ (1); (2); (3) suy ra: $\dfrac{DB}{DC}.\dfrac{EC}{EA}.\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{AB}{AC}.\dfrac{BC}{BA}.\dfrac{CA}{CB} = 1$

b) Đặt $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $AD = d_a$.

Qua C kẻ đường thẳng song song với AD , cắt tia BA ở H.

Theo ĐL Talét ta có: $\dfrac{AD}{CH} = \dfrac{BA}{BH} \Rightarrow AD = \dfrac{BA.CH}{BH} = \dfrac{c.CH}{BA + AH} = \dfrac{c}{b + c}.CH$

Do $CH < AC + AH = 2b$ nên: $d_a < \dfrac{2bc}{b+c} \Rightarrow \dfrac{1}{d_a} > \dfrac{b+c}{2bc} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{d_a} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$

Chứng minh tương tự ta có : $\dfrac{1}{d_b} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}\right)$ Và $\dfrac{1}{d_c} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$ Nên:

$$\frac{1}{d_a}+\frac{1}{d_b}+\frac{1}{d_c}>\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]\Leftrightarrow\frac{1}{d_a}+\frac{1}{d_b}+\frac{1}{d_c}>\frac{1}{2}.2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{d_a}+\frac{1}{d_b}+\frac{1}{d_c}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\text{ (đpcm)}$$

Bài tập về nhà

Cho ΔABC có BC = a, AC = b, AB = c (b > c), các phân giác BD, CE

a) Tính độ dài CD, BE rồi suy ra CD > BE

b) Vẽ hình bình hành BEKD. Chứng minh: CE > EK

c) Chứng minh CE > BD

CHUYÊN ĐỀ 8 – CHỮ SỐ TẬN CÙNG

A. Kiến thức:

1. Một số tính chất:

a) Tính chất 1:

+ Các số có chữ số tận cùng là 0; 1; 5; 6khi nâng lên luỹ thừa bậc bất kỳ nào thì chữ số tận cùng không thay đổi

+ Các số có chữ số tận cùng là 4; 9 khi nâng lên luỹ thừa bậc lẻ thì chữ số tận cùng không thay đổi

+ Các số có chữ số tận cùng là 3; 7; 9 khi nâng lên luỹ thừa bậc 4n ($n \in N$) thì chữ số tận cùng là 1

+ Các số có chữ số tận cùng là 2; 4; 8 khi nâng lên luỹ thừa bậc 4n ($n \in N$) thì chữ số tận cùng là 6

b) Tính chất 2: Một số tự nhiên bất kỳ khi nâng lên luỹ thừa bậc 4n + 1 ($n \in N$) thì chữ số tận cùng không thay đổi

c) Tính chất 3:

+ Các số có chữ số tận cùng là 3 khi nâng lên luỹ thừa bậc 4n + 3 ($n \in N$) thì chữ số tận cùng là 7; Các số có chữ số tận cùng là 7 khi nâng lên luỹ thừa bậc 4n + 3 ($n \in N$) thì chữ số tận cùng là 3

+ Các số có chữ số tận cùng là 2 khi nâng lên luỹ thừa bậc 4n + 3 ($n \in N$) thì chữ số tận cùng là 8; Các số có chữ số tận cùng là 8 khi nâng lên luỹ thừa bậc 4n + 3 ($n \in N$) thì chữ số tận cùng là 2

+ Các số có chữ số tận cùng là 0; 1; 4; 5; 6; 9 khi nâng lên luỹ thừa bậc 4n + 3 ($n \in N$) thì chữ số tận cùng là không đổi

2. Một số phương pháp:

+ Tìm chữ số tận cùng của $x = a^m$ thì ta xét chữ số tận cùng của a:

- Nếu chữ số tận cùng của a là các chữ số: 0; 1; 5; 6 thì chữ số tận cùng của x là 0; 1; 5; 6

- Nếu chữ số tận cùng của a là các chữ số: 3; 7; 9 thì :

* Vì $a^m = a^{4n + r} = a^{4n} . a^r$

Nếu r là 0; 1; 2; 3 thì chữ số tận cùng của x là chữ số tận cùng của a^r

Nếu r là 2; 4; 8 thì chữ số tận cùng của x là chữ số tận cùng của $6.a^r$

B. Một số ví dụ:

Bài 1:

Tìm chữ số tận cùng của

a) 243^6 ; 167^{2010}

b) $\left(7^9\right)^9$; $\left(14^{14}\right)^{14}$; $\left[\left(4^5\right)^6\right]^7$

Giải

a) $243^6 = 243^{4 + 2} = 243^4. 243^2$

243^2 có chữ số tận cùng là 9 nên chữ số tận cùng của 243^6 là 9

Ta có 2010 = 4.502 + 2 nên $167^{2010} = 167^{4.\,502 + 2} = 167^{4.502}.167^2$

$167^{4.502}$ có chữ số tận cùng là 6; 167^2 có chữ số tận cùng là 9 nên chữ số tận cùng của 167^{2010} là chữ số tận cùng của tích 6.9 là 4

b) Ta có:

+) $9^9 - 1 = (9 – 1)(9^8 + 9^7 + ...+ 9 + 1) = 4k\ (k \in N) \Rightarrow 9^9 = 4k + 1 \Rightarrow \left(7^9\right)^9 = 7^{4k + 1}$

$= 7^{4k}.7$ nên có chữ số tận cùng là 7

$14^{14} = (12 + 2)^{14} = 12^{14} + 12.14^{13}.2 + ...+ 12.12.2^{13} + 2^{14}$ chia hết cho 4, vì các hạng tử trước 2^{14} đều có nhân tử 12 nên chia hết cho 4; hạng tử $2^{14} = 4^7$ chia hết cho 4 hay

$14^{14} = 4k \Rightarrow \left(14^{14}\right)^{14} = 14^{4k}$ có chữ số tận cùng là 6

+) 5^6 có chữ số tận cùng là 5 nên $\left(5^6\right)^7 = 5.(2k + 1) \Rightarrow 5.(2k + 1) – 1 = 4\,q\ (k, q \in N)$

$\Rightarrow 5.(2k + 1) = 4q + 1 \Rightarrow \left[\left(4^5\right)^6\right]^7 = 4^{4q + 1} = 4^{4q}$. 4 có chữ số tận cùng là chữ số tận cùng tích 6. 4 là 4

Bài 2: Tìm chữ số tận cùng của

$A = 2^1 + 3^5 + 4^9 + 5^{13} + ... + 2004^{8009}$

Giải

a) Luỹ thừa của mọi số hạng của A chia 4 thì dư 1(Các số hạng của A có dạng $n^{4(n-2)+1}$ ($n \in \{2; 3; ...; 2004\}$) nên mọi số hạng của A và luỹ thừa của nó có chữ số tận cùng giống nhau (Tính chất 2) nên chữ số tận cùng của A là chữ số tận cùng của tổng các số hạng

Từ 2 đến 2004 có 2003 số hạng trong đó có 2000 : 10 = 200 số hạng có chữ số tận cùng bằng 0,Tổng các chữ số tận cùng của A là

$(2 + 3 + ...+ 9) + 199.(1 + 2 + ... + 9) + 1 + 2 + 3 + 4 = 9009$ có chữ số tận cùng là 9

Vây A có chữ số tận cùng là 9

Bài 3: Tìm

a) Hai chữ số tận cùng của 3^{999}; $\left(7^7\right)^7$

b) Ba chữ số tận cùng của 3^{100}

c) Bốn chữ số tận cùng của 5^{1994}

Giải

a) $3^{999} = 3.3^{998} = 3.\ 9^{499} = 3.(10-1)^{499} = 3.(10^{499} - 499.10^{498} + ...+499.10 - 1)$

$= 3.[BS(100) + 4989] = ...67$

$7^7 = (8-1)^7 = BS(8) - 1 = 4k + 3 \Rightarrow \left(7^7\right)^7 = 7^{4k+3} = 7^3.\ 7^{4k} = 343.(...01)^{4k} = ...43$

b) $3^{100} = 9^{50} = (10-1)^{50} = 10^{50} - 50.\ 10^{49} + ...+ \frac{50.49}{2}.\ 10^2 - 50.10 + 1$

$= 10^{50} - 50.\ 10^{49} + ...+ \frac{49}{2}.\ 5000 - 500 + 1 = BS(1000) + 1 = ...001$

Chú ý:

+ Nếu n là số lẻ không chi hết cho 5 thì ba chữ số tận cùng của n^{100} là 001

+ Nếu một số tự nhiên n không chia hết cho 5 thì n^{100} chia cho 125 dư 1

HD C/m: n = 5k + 1; n = 5k + 2

+ Nếu n là số lẻ không chia hết cho 5 thì n^{101} và n có ba chữ số tận cùng như nhau

c) Cách 1: $5^4 = 625$

Ta thấy số $(...0625)^n = ...0625$

$5^{1994} = 5^{4k+2} = 25.(5^4)^k = 25.(0625)^k = 25.(...0625) = ...5625$

Cách 2: Tìm số dư khi chia 5^{1994} cho $10000 = 2^4. 5^4$

Ta thấy $5^{4k} - 1$ chia hết cho $5^4 - 1 = (5^2 - 1)(5^2 + 1)$ chia hết cho 16

Ta có: $5^{1994} = 5^6. (5^{1988} - 1) + 5^6$

Do 5^6 chia hết cho 5^4, còn $5^{1988} - 1$ chia hết cho 16 nên $5^6(5^{1988} - 1)$ chia hết cho 10000

Ta có $5^6 = 15625$

Vậy bốn chữ số tận cùng của 5^{1994} là 5625

Chú ý: Nếu viết $5^{1994} = 5^2. (5^{1992} - 1) + 5^2$

Ta có: $5^{1992} - 1$ chia hết cho 16; nhưng 5^2 không chia hết cho 5^4

Như vậy trong bài toán này ta cần viết 5^{1994} dưới dạng $5^n(5^{1994-n} - 1) + 5^n$; $n \geq 4$ và $1994 - n$ chia hết cho 4

C. Vận dụng vào các bài toán khác

Bài 1:

Chứng minh rằng: Tổng sau không là số chính phương

a) $A = 19^k + 5^k + 1995^k + 1996^k$ ($k \in N$, k chẵn)

b) $B = 2004^{2004k} + 2001$

Giải

a) Ta có:

19^k có chữ số tận cùng là 1

5^k có chữ số tận cùng là 5

1995^k có chữ số tận cùng là 5

1996^k có chữ số tận cùng là 6

Nên A có chữ số tận cùng là chữ số tận cùng của tổng các chữ số tận cùng của tổng

$1 + 5 + 5 + 6 = 17$, có chữ số tận cùng là 7 nên không thể là số chính phương

b) Ta có :k chẵn nên $k = 2n$ ($n \in N$)

$2004^{2004k} = (2004^4)^{501k} = (2004^4)^{1002n} = (...6)^{1002n}$ là luỹ thừa bậc chẵn của số có chữ số tận cùng là 6 nên có chữ số tận cùng là 6 nên B = 2004^{2004k} + 2001 có chữ số tận cùng là 7, do đó B không là số chính phương

Bài 2:

Tìm số dư khi chia các biểu thức sau cho 5

a) $A = 2^1 + 3^5 + 4^9 + ... + 2003^{8005}$

b) $B = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + ... + 2005^{8007}$

Giải

a) Chữ số tận cùng của A là chữ số tận cùng của tổng

(2 + 3 +... + 9) + 199.(1 + 2 + ... + 9) + 1 + 2 + 3 = 9005

Chữ số tận cùng của A là 5 nên chia A cho 5 dư 0

b)Tương tự, chữ số tận cùng của B là chữ số tận cùng của tổng

(8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 199.(1 + ...+ 9) + 8 + 7 + 4 + 5 = 9024

B có chữ số tận cùng là 4 nên B chia 5 dư 4

Bài tập về nhà

Bài 1: Tìm chữ số tận cùng của: 3^{102} ; $\left(7^3\right)^5$; $3^{20} + 2^{30} + 7^{15} - 8^{16}$

Bài 2: Tìm hai, ba chữ số tận cùng của: 3^{555} ; $\left(2^7\right)^9$

Bài 3: Tìm số dư khi chia các số sau cho 2; cho 5:

a) 3^8; $14^{15} + 15^{14}$

b) $2009^{2010} - 2008^{2009}$

CHUYÊN ĐỀ 9 – ĐỒNG DƯ

A. Định nghĩa:

Nếu hai số nguyên a và b có cùng số dư trong phép chia cho một số tự nhiên $m \neq 0$ thì ta nói a đồng dư với b theo môđun m, và có đồng dư thức: $a \equiv b \pmod{m}$

Ví dụ: $7 \equiv 10 \pmod{3}$, $12 \equiv 22 \pmod{10}$

+ Chú ý: $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b \,\vdots\, m$

B. Tính chất của đồng dư thức:

1. Tính chất phản xạ: $a \equiv a \pmod{m}$

2. Tính chất đối xứng: $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$

3. Tính chất bắc cầu: $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv c \pmod{m}$ thì $a \equiv c \pmod{m}$

4. Cộng , trừ từng vế: $\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$

Hệ quả:

a) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv b + c \pmod{m}$

b) $a + b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c - b \pmod{m}$

c) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a + km \equiv b \pmod{m}$

5. Nhân từng vế : $\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$

Hệ quả:

a) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$ $(c \in Z)$

b) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$

6. Có thể nhân (chia) hai vế và môđun của một đồng dư thức với một số nguyên dương

$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow ac \equiv bc \pmod{mc}$

Chẳng hạn: $11 \equiv 3 \pmod{4} \Leftrightarrow 22 \equiv 6 \pmod{8}$

7. $\begin{cases} ac \equiv bc \pmod{m} \\ (c, m) = 1 \end{cases} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$

Chẳng hạn : $\begin{cases} 16 \equiv 2 \pmod 7 \\ (2, 7) = 1 \end{cases} \Rightarrow 8 \equiv 1 \pmod 7$

C. Các ví dụ:

1. Ví dụ 1:

Tìm số dư khi chia 92^{94} cho 15

Giải

Ta thấy $92 \equiv 2 \pmod{15} \Rightarrow 92^{94} \equiv 2^{94} \pmod{15}$ (1)

Lại có $2^4 \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow (2^4)^{23}.\ 2^2 \equiv 4 \pmod{15}$ hay $2^{94} \equiv 4 \pmod{15}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $92^{94} \equiv 4 \pmod{15}$ tức là 92^{94} chia 15 thì dư 4

2. Ví dụ 2:

Chứng minh: trong các số có dạng $2^n – 4(n \in N)$, có vô số số chia hết cho 5

Thật vậy:

Từ $2^4 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 2^{4k} \equiv 1 \pmod 5$ (1)

Lại có $2^2 \equiv 4 \pmod 5$ (2)

Nhân (1) với (2), vế theo vế ta có: $2^{4k+2} \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow 2^{4k+2} - 4 \equiv 0 \pmod 5$

Hay $2^{4k+2} - 4$ chia hết cho 5 với mọi k = 0, 1, 2, ... hay ta được vô số số dạng $2^n – 4$ $(n \in N)$ chia hết cho 5

Chú ý: khi giải các bài toán về đồng dư, ta thường quan tâm đến $a \equiv \pm 1 \pmod m$

$a \equiv 1 \pmod m \Rightarrow a^n \equiv 1 \pmod m$

$a \equiv -1 \pmod m \Rightarrow a^n \equiv (-1)^n \pmod m$

3. Ví dụ 3: Chứng minh rằng

a) $20^{15} – 1$ chia hết cho 11   b) $2^{30} + 3^{30}$ chi hết cho 13

c) $555^{222} + 222^{555}$ chia hết cho 7

Giải

a) $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$ (1); $10 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 10^5 \equiv -1 \pmod{11}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2^5.\ 10^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 20^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 20^5 – 1 \equiv 0 \pmod{11}$

b) $2^6 \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow 2^{30} \equiv -1 \pmod{13}$ (3)

$3^3 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 3^{30} \equiv 1 \pmod{13}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $2^{30} + 3^{30} \equiv -1 + 1 \pmod{13} \Rightarrow 2^{30} + 3^{30} \equiv 0 \pmod{13}$

Vậy: $2^{30} + 3^{30}$ chi hết cho 13

c) $555 \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow 555^{222} \equiv 2^{222} \pmod 7$ (5)

$2^3 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow (2^3)^{74} \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 555^{222} \equiv 1 \pmod 7$ (6)

$222 \equiv -2 \pmod 7 \Rightarrow 222^{555} \equiv (-2)^{555} \pmod 7$

Lại có $(-2)^3 \equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow [(-2)^3]^{185} \equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow 222^{555} \equiv -1 \pmod 7$

Ta suy ra $555^{222} + 222^{555} \equiv 1 - 1 \pmod 7$ hay $555^{222} + 222^{555}$ chia hết cho 7

4. Ví dụ 4: Chứng minh rằng số $2^{2^{4n+1}} + 7$ chia hết cho 11 với mọi số tự nhiên n

Thật vậy:Ta có: $2^5 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

Xét số dư khi chia 2^{4n+1} cho 10. Ta có: $2^4 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 2^{4n} \equiv 1 \pmod 5$

$\Rightarrow 2.2^{4n} \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} = 10k + 2$

Nên $2^{2^{4n+1}} + 7 = 2^{10k+2} + 7 = 4.\ 2^{10k} + 7 = 4.(BS\ 11 + 1)^k + 7 = 4.(BS\ 11 + 1^k) + 7$

$= BS\ 11 + 11$ chia hết cho 11

Bài tập về nhà:

Bài 1: CMR:

a) $2^{28} - 1$ chia hết cho 29

b)Trong các số có dạng$2^n - 3$ có vô số số chia hết cho 13

Bài 2: Tìm số dư khi chia A = $20^{11} + 22^{12} + 1996^{2009}$ cho 7.

CHUYÊN ĐỀ 10 – TÍNH CHIA HẾT ĐỐI VỚI ĐA THỨC

A. Dạng 1: Tìm dư của phép chia mà không thực hiện phép chia

1. Đa thức chia có dạng x – a (a là hằng)

a) Định lí Bơdu (Bezout, 1730 – 1783):

Số dư trong phép chia đa thức f(x) cho nhị thức x – a bằng giá trị của f(x) tại x = a

Ta có: f(x) = (x – a). Q(x) + r

Đẳng thức đúng với mọi x nên với x = a, ta có

$f(a) = 0.Q(a) + r$ hay $f(a) = r$

Ta suy ra: $f(x)$ chia hết cho $x – a \Leftrightarrow f(a) = 0$

b) $f(x)$ có tổng các hệ số bằng 0 thì chia hết cho $x – 1$

c) $f(x)$ có tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì chia hết cho $x + 1$

Ví dụ : Không làm phép chia, hãy xét xem $A = x^3 – 9x^2 + 6x + 16$ chia hết cho $B = x + 1$, $C = x – 3$ không

Kết quả:

A chia hết cho B, không chia hết cho C

2. Đa thức chia có bậc hai trở lên

Cách 1: Tách đa thức bị chia thành tổng của các đa thức chia hết cho đa thức chia và dư

Cách 2: Xét giá trị riêng: gọi thương của phép chia là $Q(x)$, dư là $ax + b$ thì

$f(x) = g(x). Q(x) + ax + b$

Ví dụ 1: Tìm dư của phép chia $x^7 + x^5 + x^3 + 1$ cho $x^2 – 1$

Cách 1: Ta biết rằng $x^{2n} – 1$ chia hết cho $x^2 – 1$ nên ta tách:

$x^7 + x^5 + x^3 + 1 = (x^7 – x) + (x^5 – x) +(x^3 – x) + 3x + 1$

$= x(x^6 – 1) + x(x^4 – 1) + x(x^2 – 1) + 3x + 1$ chia cho $x^2 – 1$ dư $3x + 1$

Cách 2:

Gọi thương của phép chia là $Q(x)$, dư là $ax + b$, Ta có:

$x^7 + x^5 + x^3 + 1 = (x -1)(x + 1).Q(x) + ax + b$ với mọi x

Đẳng thức đúng với mọi x nên với $x = 1$, ta có $4 = a + b$ (1)

với $x = - 1$ ta có $- 2 = - a + b$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a = 3$, $b =1$ nên ta được dư là $3x + 1$

Ghi nhớ:

$a^n – b^n$ chia hết cho $a – b$ $(a \neq -b)$

$a^n + b^n$ (n lẻ) chia hết cho $a + b$ $(a \neq -b)$

Ví dụ 2: Tìm dư của các phép chia

a) x^{41} chia cho $x^2 + 1$

b) $x^{27} + x^9 + x^3 + x$ cho $x^2 – 1$

c) $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7$ cho $x^2 + 1$

Giải

a) $x^{41} = x^{41} – x + x = x(x^{40} – 1) + x = x[(x^4)^{10} – 1] + x$ chia cho $x^4 – 1$ dư x nên chia cho $x^2 + 1$ dư x

b) $x^{27} + x^9 + x^3 + x = (x^{27} – x) + (x^9 – x) + (x^3 – x) + 4x$

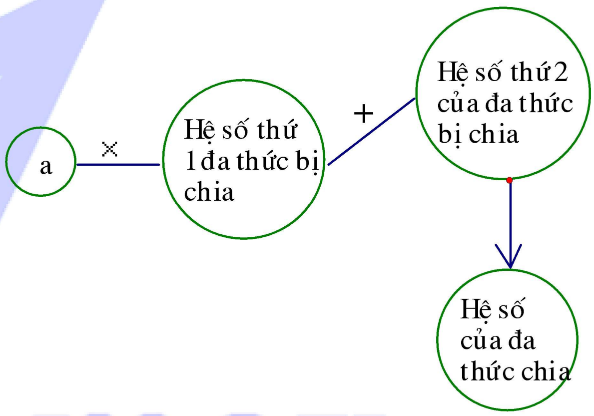
$= x(x^{26} – 1) + x(x^8 – 1) + x(x^2 – 1) + 4x$ chia cho $x^2 – 1$ dư 4x

c) $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7 = x(x^{98} + 1) + x(x^{54} + 1) + x(x^{10} + 1) – 2x + 7$

chia cho $x^2 + 1$ dư $– 2x + 7$

B. Sơ đồ HORNƠ

1. Sơ đồ



Để tìm kết quả của phép chia f(x) cho x – a (a là hằng số), ta sử dụng sơ đồ hornơ

Nếu đa thức bị chia là $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, đa thức chia là x – a ta được thương là $b_0x^2 + b_1x + b_2$, dư r thì ta có

	a_0	a_1	a_2	a_3
a	$b_0 = a_0$	$b_1 = ab_0 + a_1$	$b_2 = ab_1 + a_2$	$r = ab_2 + a_3$

Ví dụ:

Đa thức bị chia: $x^3 -5x^2 + 8x – 4$, đa thức chia x – 2

Ta có sơ đồ

	1	- 5	8	- 4
2	1	2. 1 + (- 5) = -3	2.(- 3) + 8 = 2	r = 2. 2 +(- 4) = 0

Vậy: $x^3 -5x^2 + 8x – 4 = (x – 2)(x^2 – 3x + 2) + 0$ là phép chia hết