

1. Chuyên đề : Đa thức

Bài 1: Tính giá trị của biểu thức:

- $A = x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 20$ tại $x = 16$.
- $B = x^5 - 15x^4 + 16x^3 - 29x^2 + 13x$ tại $x = 14$.
- $C = x^{14} - 10x^{13} + 10x^{12} - 10x^{11} + \dots + 10x^2 - 10x + 10$ tại $x = 9$
- $D = x^{15} - 8x^{14} + 8x^{13} - 8x^{12} + \dots - 8x^2 + 8x - 5$ tại $x = 7$.

Bài 2: Tính giá trị của biểu thức:

- $M = 2 \frac{1}{315} \cdot \frac{1}{651} - \frac{1}{105} \cdot 3 \frac{650}{651} - \frac{4}{315 \cdot 651} + \frac{4}{105}$
- $N = 2 \frac{1}{547} \cdot \frac{3}{211} - \frac{546}{547} \cdot \frac{1}{211} - \frac{4}{547 \cdot 211}$

Bài 3: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = x^3(x^2 - y^2) + y^2(x^3 - y^3) \text{ với } x = 2; |y| = 1.$$

- M.N với $|x| = 2$. Biết rằng: $M = -2x^2 + 3x + 5$; $N = x^2 - x + 3$.

Bài 4: Tính giá trị của biểu thức, biết $x = y + 5$:

- $x(x+2) + y(y-2) - 2xy + 65$
- $x^2 + y(y-2x) + 75$

Bài 5: Tính giá trị của đa thức:

$$x(1+y) - y(xy-1) - x^2y \quad \text{biết } x+y = -p, xy = q$$

Bài 6: Chứng minh đẳng thức:

a. $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = ab + bc + ca - x^2$; Biết rằng: $2x = a + b + c$

b. $2bc + b^2 + c^2 - a^2 = 4p(p-a)$; Biết rằng: $a + b + c = 2p$

Bài 7:

- Số a gồm 31 chữ số 1, số b gồm 38 chữ số 1. Chứng minh rằng $ab - 2$ chia hết cho 3.
- Cho 2 số tự nhiên a và b trong đó số a gồm 52 số 1, số b gồm 104 số 1. Hỏi tích ab chia hết cho 3 không? Vì sao?

Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

Bài 8: Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $M = N = P$ với:

$$M = a(a+b)(a+c); \quad N = b(b+c)(b+a); \quad P = c(c+a)(c+b)$$

Bài 9: Cho biểu thức: $M = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + x^2$. Tính M theo a, b, c, biết $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$.

Bài 10: Cho biểu thức: $A = 15x - 23y$; $B = 2x + 3y$. Chứng minh rằng nếu x, y là các số nguyên A chia hết cho 13 thì B chia hết cho 13. Ngược lại B chia hết cho 13 thì A cũng chia hết cho 13.

Bài 11: Cho biểu thức: $A = 5x + 2y$; $B = 9x + 7y$

- Rút gọn biểu thức $7A - 2B$.
- Chứng minh rằng: Nếu các số nguyên x, y thỏa mãn $5x + 2y$ chia hết cho 17 thì $9x + 7y$ cũng chia hết cho 17.

Bài 12: Chứng minh rằng:

a. $81^7 - 27^9 - 9^{13}$ chia hết cho 405.

b. $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ chia hết cho 133.

Bài 13: Cho dãy số 1, 3, 6, 10, 15, ..., $\frac{n(n+1)}{2}$, ...

Chứng minh rằng tổng hai hàng số liên tiếp của dãy bao giờ cũng là số chính phương.

2. Chuyên đề: Biến đổi biểu thức nguyên

I. Một số hằng đẳng thức cơ bản

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$
;

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 =$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_1a_n + a_2a_3 + \dots + a_2a_n + \dots + a_{n-1}a_n)$$
;

2. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$;

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$
;

Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

$$3. a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1});$$

$$4. a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^5);$$

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a + b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \dots + a^2b^{2k-2} - ab^{2k-1} + b^{2k});$$

II. Bảng các hệ số trong khai triển $(a + b)^n$ — Tam giác Pascal

Đỉnh	1											
Dòng 1 (n = 1)		1		1								
Dòng 2 (n = 2)		1		2		1						
Dòng 3 (n = 3)		1		3		3		1				
Dòng 4 (n = 4)		1		4		6		4		1		
Dòng 5 (n = 5)		1		5		10		10		5		1

Trong tam giác này, hai cạnh bên gồm các số 1; dòng $k + 1$ được thành lập từ dòng k ($k \geq 1$), chẳng hạn ở dòng 2 ta có $2 = 1 + 1$, ở dòng 3 ta có $3 = 2 + 1$, $3 = 1 + 2$, ở dòng 4 ta có $4 = 1 + 3$, $6 = 3 + 3$, $4 = 3 + 1$, ... Khai triển $(x + y)^n$ thành tổng thì các hệ số của các hạng tử là các số trong dòng thứ n của bảng trên. Người ta gọi bảng trên là tam giác Pascal, nó thường được sử dụng khi n không quá lớn. Chẳng hạn, với $n = 4$ thì :

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

và với $n = 5$ thì :

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

II. Các ví dụ

Ví dụ 1. Đơn giản biểu thức sau :

$$A = (x + y + z)^3 - (x + y - z)^3 - (y + z - x)^3 - (z + x - y)^3.$$

Lời giải

$$A = [(x + y) + z]^3 - [(x + y) - z]^3 - [z - (x - y)]^3 - [z + (x - y)]^3$$
$$= [(x + y)^3 + 3(x + y)^2z + 3(x + y)z^2 + z^3] - [(x + y)^3 - 3(x + y)^2z + 3(x + y)z^2 - z^3] - [z^3 - 3z^2(x - y) + 3z(x - y)^2 - (x - y)^3] - [z^3 + 3z^2(x - y) + 3z(x - y)^2 + (x - y)^3]$$
$$= 6(x + y)^2z - 6z(x - y)^2 = 24xyz$$

Ví dụ 2. Cho $x + y = a$, $xy = b$ ($a^2 \geq 4b$). Tính giá trị của các biểu thức sau :

Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

a) $x^2 + y^2$; b) $x^3 + y^3$; c) $x^4 + y^4$; d) $x^5 + y^5$

Lời giải

a) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = a^2 - 2b$

b) $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = a^3 - 3ab$

c) $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (a^2 - 2b)^2 - 2b^2 = a^4 - 4a^2b + 2b^2$

d) $(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = x^5 + x^2y^3 + x^3y^2 + y^5 = (x^5 + y^5) + x^2y^2(x + y)$

Hay : $(a^2 - 2b)(a^3 - 3ab) = (x^5 + y^5) + ab^2 \Rightarrow x^5 + y^5 = a^5 - 5a^3b + 5ab^2$

Chú ý : $a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3 = (a^3)^2 + (b^3)^2$

$$a^7 + b^7 = (a^3 + b^3)(a^4 + b^4) - a^3b^3(a + b)$$

$$= (a^2 + b^2)(a^5 + b^5) - a^2b^2(a^3 + b^3)$$

Ví dụ 3. Chứng minh các hằng đẳng thức :

a) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$;

b) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$

Lời giải

a) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b)^3 + c^3 - 3abc - 3a^2b - 3ab^2$
 $= (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2] - 3ab(a + b + c)$

$$= (a + b + c) [(a + b)^2 - (a + b)c + c^2 - 3ab]$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

b) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = [(a + b + c)^3 - a^3] - (b^3 + c^3)$
 $= (b + c)[(a + b + c)^2 + (a + b + c)a + a^2] - (b + c)(b^2 - bc + c^2)$

$$= (b + c)(3a^2 + 3ab + 3bc + 3ca) = 3(b + c)[a(a + b) + c(a + b)]$$

$$= 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

Ví dụ 4. Cho $x + y + z = 0$.

Chứng minh rằng : $2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

Lời giải

Vì $x + y + z = 0$ nên $x + y = -z \Rightarrow (x + y)^3 = -z^3$

Hay $x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = -z^3 \Rightarrow 3xyz = x^3 + y^3 + z^3$

Do đó : $3xyz(x^2 + y^2 + z^2) = (x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2)$

$$= x^5 + y^5 + z^5 + x^3(y^2 + z^2) + y^3(z^2 + x^2) + z^3(x^2 + y^2)$$

Mà $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = z^2 - 2xy$ (vì $x + y = -z$). Tương tự :

Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

$$y^2 + z^2 = x^2 - 2yz; z^2 + x^2 = y^2 - 2zx.$$

$$\text{Vì vậy : } 3xyz(x^2 + y^2 + z^2) = x^5 + y^5 + z^5 + x^3(x^2 - 2yz) + y^3(y^2 - 2zx) + z^3(z^2 - 2xy) = 2(x^5 + y^5 + z^5) - 2xyz(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\text{Suy ra : } 2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2) \text{ (đpcm)}$$

Bài tập:

1. Cho $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 14$.

Tính giá trị của biểu thức : $A = a^4 + b^4 + c^4$.

2. Cho $x + y + z = 0$ và $xy + yz + zx = 0$. Tính giá trị của biểu thức :

$$B = (x - 1)^{2007} + y^{2008} + (z + 1)^{2009}.$$

3. Cho $a^2 - b^2 = 4c^2$. Chứng minh rằng : $(5a - 3b + 8c)(5a - 3b - 8c) = (3a - 5b)^2$.

4. Chứng minh rằng nếu:

5. $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = (x + y - 2z)^2 + (y + z - 2x)^2 + (z + x - 2y)^2$

thì $x = y = z$.

6. a) Chứng minh rằng nếu $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$ và x, y khác 0 thì

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y}.$$

b) Chứng minh rằng nếu $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2$

và x, y, z khác 0 thì $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

7. Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng :

a) $5(x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2) = 6(x^5 + y^5 + z^5)$;

b) $x^7 + y^7 + z^7 = 7xyz(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$;

c) $10(x^7 + y^7 + z^7) = 7(x^2 + y^2 + z^2)(x^5 + y^5 + z^5)$.

8. Chứng minh các hằng đẳng thức sau :

a) $(a + b + c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 = (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$;

b) $x^4 + y^4 + (x + y)^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2$.

9. Cho các số a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 + (a + b)^2 = c^2 + d^2 + (c + d)^2$.

Chứng minh rằng : $a^4 + b^4 + (a + b)^4 = c^4 + d^4 + (c + d)^4$

10. Cho $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1$.

Tính giá trị của biểu thức : $C = a^2 + b^9 + c^{1945}$.