

**Một số bài tập toán  
nângcao  
LỚP 9**

**PHẦN I: ĐỀ BÀI**

1. Chứng minh  $\sqrt{7}$  là số vô tỉ.
2. a) Chứng minh :  $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$   
b) Chứng minh bất đẳng thức Bunhiacôpxki :  $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$
3. Cho  $x + y = 2$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :  $S = x^2 + y^2$ .
4. a) Cho  $a \geq 0, b \geq 0$ . Chứng minh bất đẳng thức Cauchy :  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ .  
b) Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng :  $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$   
c) Cho  $a, b > 0$  và  $3a + 5b = 12$ . Tìm giá trị lớn nhất của tích  $P = ab$ .
5. Cho  $a + b = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :  $M = a^3 + b^3$ .
6. Cho  $a^3 + b^3 = 2$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :  $N = a + b$ .
7. Cho  $a, b, c$  là các số dương. Chứng minh :  $a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b + c)$
8. Tìm liên hệ giữa các số  $a$  và  $b$  biết rằng :  $|a + b| > |a - b|$
9. a) Chứng minh bất đẳng thức  $(a + 1)^2 \geq 4a$   
b) Cho  $a, b, c > 0$  và  $abc = 1$ . Chứng minh :  $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 8$
10. Chứng minh các bất đẳng thức :  
a)  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$                       b)  $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$
11. Tìm các giá trị của  $x$  sao cho :  
a)  $|2x - 3| = |1 - x|$     b)  $x^2 - 4x \leq 5$                       c)  $2x(2x - 1) \leq 2x - 1$ .
12. Tìm các số  $a, b, c, d$  biết rằng :  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a(b + c + d)$
13. Cho biểu thức  $M = a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 2001$ . Với giá trị nào của  $a$  và  $b$  thì  $M$  đạt giá trị nhỏ nhất ? Tìm giá trị nhỏ nhất đó.
14. Cho biểu thức  $P = x^2 + xy + y^2 - 3(x + y) + 3$ . CMR giá trị nhỏ nhất của  $P$  bằng 0.
15. Chứng minh rằng không có giá trị nào của  $x, y, z$  thỏa mãn đẳng thức sau :  
$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 2a + 8y - 6z + 15 = 0$$
16. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :  $A = \frac{1}{x^2 - 4x + 9}$

## Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

17. So sánh các số thực sau (không dùng máy tính) :

a)  $\sqrt{7} + \sqrt{15}$  và 7

b)  $\sqrt{17} + \sqrt{5} + 1$  và  $\sqrt{45}$

c)  $\frac{23 - 2\sqrt{19}}{3}$  và  $\sqrt{27}$

d)  $\sqrt{3\sqrt{2}}$  và  $\sqrt{2\sqrt{3}}$

18. Hãy viết một số hữu tỉ và một số vô tỉ lớn hơn  $\sqrt{2}$  nhưng nhỏ hơn  $\sqrt{3}$

19. Giải phương trình :  $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 21} = 5 - 2x - x^2$ .

20. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = x^2y$  với các điều kiện  $x, y > 0$  và  $2x + xy = 4$ .

21. Cho  $S = \frac{1}{\sqrt{1.1998}} + \frac{1}{\sqrt{2.1997}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k(1998 - k + 1)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1998 - 1}}$ .

Hãy so sánh S và  $2 \cdot \frac{1998}{1999}$ .

22. Chứng minh rằng : Nếu số tự nhiên a không phải là số chính phương thì  $\sqrt{a}$  là số vô tỉ.

23. Cho các số x và y cùng dấu. Chứng minh rằng :

a)  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

b)  $\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 0$

c)  $\left(\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4}\right) - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 2$ .

24. Chứng minh rằng các số sau là số vô tỉ :

a)  $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$

b)  $m + \frac{\sqrt{3}}{n}$  với m, n là các số hữu tỉ,  $n \neq 0$ .

25. Có hai số vô tỉ dương nào mà tổng là số hữu tỉ không ?

26. Cho các số x và y khác 0. Chứng minh rằng :  $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$ .

27. Cho các số x, y, z dương. Chứng minh rằng :  $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ .

## Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

28. Chứng minh rằng tổng của một số hữu tỉ với một số vô tỉ là một số vô tỉ.

29. Chứng minh các bất đẳng thức :

a)  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

b)  $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

c)  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$ .

30. Cho  $a^3 + b^3 = 2$ . Chứng minh rằng  $a + b \leq 2$ .

31. Chứng minh rằng :  $[x] + [y] \leq [x + y]$ .

32. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :  $A = \frac{1}{x^2 - 6x + 17}$ .

33. Tìm giá trị nhỏ nhất của :  $A = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$  với  $x, y, z > 0$ .

34. Tìm giá trị nhỏ nhất của :  $A = x^2 + y^2$  biết  $x + y = 4$ .

35. Tìm giá trị lớn nhất của :  $A = xyz(x + y)(y + z)(z + x)$  với  $x, y, z \geq 0$  ;  $x + y + z = 1$ .

36. Xét xem các số a và b có thể là số vô tỉ không nếu :

a)  $ab$  và  $\frac{a}{b}$  là số vô tỉ.

b)  $a + b$  và  $\frac{a}{b}$  là số hữu tỉ ( $a + b \neq 0$ )

c)  $a + b, a^2$  và  $b^2$  là số hữu tỉ ( $a + b \neq 0$ )

37. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh :  $a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b + c)$

38. Cho  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh :  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$

39. Chứng minh rằng  $[2x]$  bằng  $2[x]$  hoặc  $2[x] + 1$

40. Cho số nguyên dương a. Xét các số có dạng :  $a + 15$  ;  $a + 30$  ;  $a + 45$  ; ... ;  $a + 15n$ .  
Chứng minh rằng trong các số đó, tồn tại hai số mà hai chữ số đầu tiên là 96.

41. Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa :

$$A = \sqrt{x^2 - 3} \quad B = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}} \quad C = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}} \quad D = \frac{1}{1 - \sqrt{x^2 - 3}} \quad E = \sqrt{x + \frac{2}{x}} + \sqrt{-2x}$$

$$G = \sqrt{3x - 1} - \sqrt{5x - 3} + \sqrt{x^2 + x + 1}$$

**Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu**

42. a) Chứng minh rằng :  $|A + B| \leq |A| + |B|$ . Dấu “=” xảy ra khi nào ?

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau :  $M = \sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ .

c) Giải phương trình :  $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 - 8x + 16} = \sqrt{x^2 + 18x + 81}$

43. Giải phương trình :  $2x^2 - 8x - 3\sqrt{x^2 - 4x - 5} = 12$ .

44. Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa :

$$A = \sqrt{x^2 + x + 2}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{1-3x}}$$

$$C = 2 - \sqrt{1-9x^2}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x}}$$

$$G = \frac{x}{x^2 - 4} + \sqrt{x-2}$$

$$H = \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 3\sqrt{1-x^2}$$

45. Giải phương trình :  $\frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x-3}} = 0$

46. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :  $A = \sqrt{x} + x$ .

47. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :  $B = \sqrt{3-x} + x$

48. So sánh : a)  $a = \sqrt{2+\sqrt{3}}$  và  $b = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$       b)  $\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}$  và  $\sqrt{3}-1$

c)  $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$  và  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  (n là số nguyên dương)

49. Với giá trị nào của x, biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất :

$$A = 1 - \sqrt{1-6x+9x^2} + (3x-1)^2.$$

50. Tính :

$$a) \sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

$$b) \sqrt{11+6\sqrt{2}}$$

$$c) \sqrt{27-10\sqrt{2}}$$

$$d) A = \sqrt{m^2+8m+16} + \sqrt{m^2-8m+16}$$

$$e) B = \sqrt{n+2\sqrt{n-1}} + \sqrt{n-2\sqrt{n-1}}$$

(n ≥ 1)

51. Rút gọn biểu thức :  $M = \frac{8\sqrt{41}}{\sqrt{45+4\sqrt{41}} + \sqrt{45-4\sqrt{41}}}$ .

52. Tìm các số x, y, z thỏa mãn đẳng thức :  $(2x-y)^2 + (y-2)^2 + \sqrt{(x+y+z)^2} = 0$

53. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :  $P = \sqrt{25x^2 - 20x + 4} + \sqrt{25x^2 - 30x + 9}$ .

## Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

54. Giải các phương trình sau :

a)  $\sqrt{x^2 - x - 2} - \sqrt{x - 2} = 0$       b)  $\sqrt{x^2 - 1} + 1 = x^2$       c)  $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x - 2} = 0$

d)  $x - \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} = 1$       e)  $\sqrt{x^2 + 4x + 4} + |x - 4| = 0$       g)  $\sqrt{x - 2} + \sqrt{x - 3} = -5$

h)  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$       i)  $\sqrt{x + 5} + \sqrt{2 - x} = x^2 - 25$

k)  $\sqrt{x + 3} - 4\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 8} - 6\sqrt{x - 1} = 1$       l)  $\sqrt{8x + 1} + \sqrt{3x - 5} = \sqrt{7x + 4} + \sqrt{2x - 2}$

55. Cho hai số thực  $x$  và  $y$  thỏa mãn các điều kiện :  $xy = 1$  và  $x > y$ . CMR:  $\frac{x^2 + y^2}{x - y} \geq 2\sqrt{2}$ .

56. Rút gọn các biểu thức :

a)  $\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$       b)  $\sqrt{m + 2\sqrt{m - 1}} + \sqrt{m - 2\sqrt{m - 1}}$

c)  $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$       d)  $\sqrt{227 - 30\sqrt{2}} + \sqrt{123 + 22\sqrt{2}}$

57. Chứng minh rằng  $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

58. Rút gọn các biểu thức :

a)  $C = \frac{\sqrt{6 + 2(\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2})} - \sqrt{6 - 2(\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2})}}{\sqrt{2}}$       b)  $D = \frac{\sqrt{9 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

59. So sánh :

a)  $\sqrt{\sqrt{6 + \sqrt{20}}}$  và  $\sqrt{1 + \sqrt{6}}$       b)  $\sqrt{\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}}$  và  $\sqrt{2} + 1$       c)  $\sqrt{\sqrt{28 - 16\sqrt{3}}}$  và  $\sqrt{3} - 2$

60. Cho biểu thức :  $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}$

- a) Tìm tập xác định của biểu thức A.
- b) Rút gọn biểu thức A.

61. Rút gọn các biểu thức sau : a)  $\sqrt{11 - 2\sqrt{10}}$       b)  $\sqrt{9 - 2\sqrt{14}}$

c)  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}}$

## Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

62. Cho  $a + b + c = 0$ ;  $a, b, c \neq 0$ . Chứng minh đẳng thức :

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$$

63. Giải bất phương trình :  $\sqrt{x^2 - 16x + 60} < x - 6$ .

64. Tìm x sao cho :  $\sqrt{x^2 - 3} + 3 \leq x^2$ .

65. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của  $A = x^2 + y^2$ , biết rằng :

$$x^2(x^2 + 2y^2 - 3) + (y^2 - 2)^2 = 1 \quad (1)$$

66. Tìm x để biểu thức có nghĩa:

a)  $A = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}}$       b)  $B = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{\sqrt{2x + 1}} + \sqrt{x^2 - 8x + 8}$ .

67. Cho biểu thức :  $A = \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x + \sqrt{x^2 - 2x}}$ .

a) Tìm giá trị của x để biểu thức A có nghĩa.

b) Rút gọn biểu thức A.    c) Tìm giá trị của x để  $A < 2$ .

68. Tìm 20 chữ số thập phân đầu tiên của số :  $\sqrt{0,9999\dots 9}$  (20 chữ số 9)

69. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của :  $A = |x - \sqrt{2}| + |y - 1|$  với  $|x| + |y| = 5$

70. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A = x^4 + y^4 + z^4$  biết rằng  $xy + yz + zx = 1$

71. Trong hai số :  $\sqrt{n} + \sqrt{n+2}$  và  $2\sqrt{n+1}$  (n là số nguyên dương), số nào lớn hơn ?

72. Cho biểu thức  $A = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ . Tính giá trị của A theo hai cách.

73. Tính :  $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})(-\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$

74. Chứng minh các số sau là số vô tỉ :  $\sqrt{3} + \sqrt{5}$  ;  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$  ;  $2\sqrt{2} + 3$

75. Hãy so sánh hai số :  $a = 3\sqrt{3} - 3$  và  $b = 2\sqrt{2} - 1$  ;  $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$  và  $\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{2}}$

76. So sánh  $\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{2}$  và số 0.

## Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

77. Rút gọn biểu thức :  $Q = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$ .

78. Cho  $P = \sqrt{14 + \sqrt{40} + \sqrt{56} + \sqrt{140}}$ . Hãy biểu diễn P dưới dạng tổng của 3 căn thức bậc hai

79. Tính giá trị của biểu thức  $x^2 + y^2$  biết rằng :  $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$ .

80. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của :  $A = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ .

81. Tìm giá trị lớn nhất của :  $M = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$  với  $a, b > 0$  và  $a + b \leq 1$ .

82. CMR trong các số

$2b + c - 2\sqrt{ad}$  ;  $2c + d - 2\sqrt{ab}$  ;  $2d + a - 2\sqrt{bc}$  ;  $2a + b - 2\sqrt{cd}$  có ít nhất hai số dương ( $a, b, c, d > 0$ ).

83. Rút gọn biểu thức :  $N = \sqrt{4\sqrt{6} + 8\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 18}$ .

84. Cho  $x + y + z = \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$ , trong đó  $x, y, z > 0$ . Chứng minh  $x = y = z$ .

85. Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  và  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ . Chứng minh:  $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n$ .

86. Chứng minh :  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 2\sqrt{2(a+b)}\sqrt{ab}$  ( $a, b \geq 0$ ).

87. Chứng minh rằng nếu các đoạn thẳng có độ dài  $a, b, c$  lập được thành một tam giác thì các đoạn thẳng có độ dài  $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$  cũng lập được thành một tam giác.

88. Rút gọn : a)  $A = \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{b^2}}{b} - \sqrt{\frac{a}{b}}$       b)  $B = \frac{\sqrt{(x+2)^2 - 8x}}{\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}}$ .

89. Chứng minh rằng với mọi số thực  $a$ , ta đều có :  $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 2$ . Khi nào có đẳng thức ?

90. Tính :  $A = \sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}$  bằng hai cách.

91. So sánh : a)  $\frac{3\sqrt{7} + 5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$  và 6,9      b)  $\sqrt{13} - \sqrt{12}$  và  $\sqrt{7} - \sqrt{6}$

92. Tính :  $P = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$ .



**Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu**

93. Giải phương trình :  $\sqrt{x+2} + 3\sqrt{2x-5} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2x-5} = 2\sqrt{2}$ .

94. Chứng minh rằng ta luôn có :  $P_n = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$  ;  $\forall n \in \mathbf{Z}_+$

95. Chứng minh rằng nếu  $a, b > 0$  thì  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}}$ .

96. Rút gọn biểu thức :  $A = \frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$ .

97. Chứng minh các đẳng thức sau : a)  $\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = a-b$  ( $a, b > 0$  ;  $a \neq b$ )

b)  $\left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}\right) : \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = -2$       c)  $\left(1 + \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}}\right) \left(1 - \frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a-1}}\right) = 1-a$   
( $a > 0$ ).

98. Tính : a)  $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{29-6\sqrt{20}}}$  ; b)  $2\sqrt{3+\sqrt{5}-\sqrt{13+\sqrt{48}}}$ .

c)  $\left(\sqrt{\sqrt{7+\sqrt{48}}}-\sqrt{\sqrt{28-16\sqrt{3}}}\right) \cdot \sqrt{\sqrt{7+\sqrt{48}}}$ .

99. So sánh : a)  $\sqrt{3} + \sqrt{5}$  và  $\sqrt{15}$       b)  $2 + \sqrt{15}$  và  $\sqrt{12} + \sqrt{7}$

c)  $\sqrt{18} + \sqrt{19}$  và 9      d)  $\frac{16}{\sqrt{2}}$  và  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{25}$

100. Cho hằng đẳng thức :

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \quad (a, b > 0 \text{ và } a^2 - b > 0).$$

Áp dụng kết quả để rút gọn :

a)  $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$  ; b)  $\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$

c)  $\sqrt{\frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3}-1}$

101. Xác định giá trị các biểu thức sau :

**Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu**

a)  $A = \frac{xy - \sqrt{x^2 - 1} \cdot \sqrt{y^2 - 1}}{xy + \sqrt{x^2 - 1} \cdot \sqrt{y^2 - 1}}$  với  $x = \frac{1}{2} \left( a + \frac{1}{a} \right)$ ,  $y = \frac{1}{2} \left( b + \frac{1}{b} \right)$  ( $a > 1$ ;  $b > 1$ )

b)  $B = \frac{\sqrt{a + bx} + \sqrt{a - bx}}{\sqrt{a + bx} - \sqrt{a - bx}}$  với  $x = \frac{2am}{b(1+m^2)}$ ,  $|m| < 1$ .

**102.** Cho biểu thức  $P(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 - 1}}{3x^2 - 4x + 1}$

a) Tìm tất cả các giá trị của x để P(x) xác định. Rút gọn P(x).

b) Chứng minh rằng nếu  $x > 1$  thì  $P(x) \cdot P(-x) < 0$ .

**103.** Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}}}{\sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{4}{x} + 1}}$ .

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các số nguyên x để biểu thức A là một số nguyên.

**104.** Tìm giá trị lớn nhất (nếu có) hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các biểu thức sau:

a)  $\sqrt{9-x^2}$       b)  $\sqrt{x} - x$  ( $x > 0$ )      c)  $1 + \sqrt{2-x}$       d)  $\sqrt{x-5} - 4$

e)  $1 - 2\sqrt{1-3x}$       g)  $\sqrt{2x^2 - 2x + 5}$       h)  $1 - \sqrt{-x^2 + 2x + 5}$       i)  $\frac{1}{2x - \sqrt{x+3}}$

**105.** Rút gọn biểu thức :  $A = \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}$ , bằng ba cách ?

**106.** Rút gọn các biểu thức sau : a)  $\sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48} - 10\sqrt{7} + 4\sqrt{3}}$

b)  $\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$       c)  $\sqrt{94 - 42\sqrt{5}} - \sqrt{94 + 42\sqrt{5}}$ .

**107.** Chứng minh các hằng đẳng thức với  $b \geq 0$ ;  $a \geq \sqrt{b}$

a)  $\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2 - b})}$       b)

$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$

**108.** Rút gọn biểu thức :  $A = \sqrt{x + 2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x - 2\sqrt{2x-4}}$

## Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

109. Tìm x và y sao cho :  $\sqrt{x+y-2} = \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{2}$

110. Chứng minh bất đẳng thức :  $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$ .

111. Cho a, b, c > 0. Chứng minh :  $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$ .

112. Cho a, b, c > 0 ; a + b + c = 1. Chứng minh :

a)  $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} < 3,5$                       b)  $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}$  .

113. CM :  $\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)} + \sqrt{(a^2+d^2)(b^2+d^2)} \geq (a+b)(c+d)$  với a, b, c, d > 0.

114. Tìm giá trị nhỏ nhất của :  $A = x + \sqrt{x}$  .

115. Tìm giá trị nhỏ nhất của :  $A = \frac{(x+a)(x+b)}{x}$  .

116. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của  $A = 2x + 3y$  biết  $2x^2 + 3y^2 \leq 5$ .

117. Tìm giá trị lớn nhất của  $A = x + \sqrt{2-x}$  .

118. Giải phương trình :  $\sqrt{x-1} - \sqrt{5x-1} = \sqrt{3x-2}$

119. Giải phương trình :  $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$

120. Giải phương trình :  $3x^2 + 21x + 18 + 2\sqrt{x^2 + 7x + 7} = 2$

121. Giải phương trình :  $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$

122. Chứng minh các số sau là số vô tỉ :  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$  ;  $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$

123. Chứng minh  $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \leq 2$  .

124. Chứng minh bất đẳng thức sau bằng phương pháp hình học :

$$\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{b^2+c^2} \geq b(a+c) \quad \text{với } a, b, c > 0.$$

125. Chứng minh  $\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$  với a, b, c, d > 0.

126. Chứng minh rằng nếu các đoạn thẳng có độ dài a, b, c lập được thành một tam giác thì các đoạn thẳng có độ dài  $\sqrt{a}$ ,  $\sqrt{b}$ ,  $\sqrt{c}$  cũng lập được thành một tam giác.

127. Chứng minh  $\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a+b}{4} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$  với a, b ≥ 0.

**Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu**

128. Chứng minh  $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$  với  $a, b, c > 0$ .

129. Cho  $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$ . Chứng minh rằng  $x^2 + y^2 = 1$ .

130. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A = \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$

131. Tìm GTNN, GTLN của  $A = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ .

132. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2x+5}$

133. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A = \sqrt{-x^2+4x+12} - \sqrt{-x^2+2x+3}$ .

134. Tìm GTNN, GTLN của : a)  $A = 2x + \sqrt{5-x^2}$       b)  $A = x(99 + \sqrt{101-x^2})$

135. Tìm GTNN của  $A = x + y$  biết  $x, y > 0$  thỏa mãn  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$  ( $a$  và  $b$  là hằng số dương).

136. Tìm GTNN của  $A = (x+y)(x+z)$  với  $x, y, z > 0$ ,  $xyz(x+y+z) = 1$ .

137. Tìm GTNN của  $A = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$  với  $x, y, z > 0$ ,  $x+y+z = 1$ .

138. Tìm GTNN của  $A = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}$  biết  $x, y, z > 0$ ,  $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$ .

139. Tìm giá trị lớn nhất của : a)  $A = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$  với  $a, b > 0$ ,  $a+b \leq 1$

b)

$$B = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^4 + (\sqrt{a} + \sqrt{c})^4 + (\sqrt{a} + \sqrt{d})^4 + (\sqrt{b} + \sqrt{c})^4 + (\sqrt{b} + \sqrt{d})^4 + (\sqrt{c} + \sqrt{d})^4$$

với  $a, b, c, d > 0$  và  $a+b+c+d = 1$ .

140. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A = 3^x + 3^y$  với  $x+y = 4$ .

141. Tìm GTNN của  $A = \frac{b}{c+d} + \frac{c}{a+b}$  với  $b+c \geq a+d$ ;  $b, c > 0$ ;  $a, d \geq 0$ .

142. Giải các phương trình sau :

a)  $x^2 - 5x - 2\sqrt{3x} + 12 = 0$

b)  $x^2 - 4x = 8\sqrt{x-1}$

c)  $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x+4} = 1$

**Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu**

d)  $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} = 2$     e)  $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1} = 1$     g)  $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}$

h)  $\sqrt{x+2} - 4\sqrt{x-2} + \sqrt{x+7} - 6\sqrt{x-2} = 1$     i)  $\sqrt{x} + \sqrt{x+\sqrt{1-x}} = 1$

k)  $\sqrt{1-\sqrt{x^2-x}} = \sqrt{x}-1$

l)  $\sqrt{2x^2+8x+6} + \sqrt{x^2-1} = 2x+2$

m)  $\sqrt{x^2+6} = x-2\sqrt{x^2-1}$

n)  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x+5}$

o)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)} = 4-2x$

p)  $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+2} + \sqrt{2x+2} - \sqrt{x+2} = 1+2\sqrt{x+2}$ .

q)  $\sqrt{2x^2-9x+4} + 3\sqrt{2x-1} = \sqrt{2x^2+21x-11}$

143. Rút gọn biểu thức :  $A = (2\sqrt{2} - \sqrt{5} + 3\sqrt{2})(\sqrt{18} - \sqrt{20} + 2\sqrt{2})$ .

144. Chứng minh rằng,  $\forall n \in \mathbf{Z}_+$ , ta luôn có :  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1}-1)$ .

145. Trục căn thức ở mẫu : a)  $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$     b)  $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$ .

146. Tính :

a)  $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-6\sqrt{20}}}}$     b)  $\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$     c)  $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

147. Cho  $a = \sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot (3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})$ . Chứng minh rằng a là số tự nhiên.

148. Cho  $b = \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$ . b có phải là số tự nhiên không ?

149. Giải các phương trình sau :

a)  $(\sqrt{3}-1)x - x + 4 - \sqrt{3} = 0$

b)  $(\sqrt{3}-1)x = 2(\sqrt{3}+1)x - 3\sqrt{3}$

c)  $\frac{(5-x)\sqrt{5-x} + (x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3}} = 2$

d)  $x + \sqrt{x-5} = 5$

150. Tính giá trị của biểu thức :

$M = \sqrt{|12\sqrt{5}-29|} + \sqrt{25+4\sqrt{21}} - \sqrt{12\sqrt{5}+29} - \sqrt{25-4\sqrt{21}}$

**Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu**

151. Rút gọn :  $A = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{3+\sqrt{4}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}$ .

152. Cho biểu thức :  $P = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{3-\sqrt{4}}} + \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{4}} - \sqrt{4-\sqrt{5}}} - \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-\sqrt{2n+1}}}$

a) Rút gọn P.

b) P có phải là số hữu tỉ không ?

153. Tính :  $A = \frac{1}{2\sqrt{1+1\sqrt{2}}} + \frac{1}{3\sqrt{2+2\sqrt{3}}} + \frac{1}{4\sqrt{3+3\sqrt{4}}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99+99\sqrt{100}}}$ .

154. Chứng minh :  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ .

155. Cho  $a = \sqrt{17} - 1$ . Hãy tính giá trị của biểu thức:  $A = (a^5 + 2a^4 - 17a^3 - a^2 + 18a - 17)^{2000}$ .

156. Chứng minh :  $\sqrt{a} - \sqrt{a-1} < \sqrt{a-2} - \sqrt{a-3}$  ( $a \geq 3$ )

157. Chứng minh :  $x^2 - \sqrt{x} + \frac{1}{2} > 0$  ( $x \geq 0$ )

158. Tìm giá trị lớn nhất của  $S = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2}$ , biết  $x + y = 4$ .

159. Tính giá trị của biểu thức sau với  $a = \frac{\sqrt{3}}{4}$  :  $A = \frac{1+2a}{1+\sqrt{1+2a}} + \frac{1-2a}{1-\sqrt{1-2a}}$ .

160. Chứng minh các đẳng thức sau :

a)  $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}} = 2$

b)  $\sqrt{4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}} = \sqrt{\sqrt{2}}(\sqrt{3} + 1)$

c)  $\sqrt{3 - \sqrt{5}}(3 + \sqrt{5})(\sqrt{10} - \sqrt{2}) = 8$

d)  $\sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{48}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + 1)$

e)  $\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}} = \sqrt{5} - 2$

161. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a)  $\sqrt{27} + \sqrt{6} > \sqrt{48}$

b)  $\frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} + \frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} - \sqrt{10} < 0$

c)  $\left( \frac{\sqrt{5} + 1}{1 + \sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} - 1}{1 + \sqrt{3} - \sqrt{5}} \right) \left( \sqrt{3} - 4\sqrt{\frac{1}{3}} + 2 \right) \sqrt{0,2} - \sqrt{1,01} > 0$

d)  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{6}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{3 - \sqrt{2}} > 0$