

Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

Đ 1- Tập hợp. Tập hợp con

Đ.2- Tập hợp các số tự nhiên. Ghi số tự nhiên

Ví dụ: 1. Tìm hai số nguyên tố biết tổng của chúng bằng 601

Chuyên đề 1: So sánh hai lũy thừa

1. Để so sánh hai lũy thừa, ta thường đưa về so sánh hai lũy thừa cùng cơ số hoặc cùng số mũ.

- Nếu hai lũy thừa cùng cơ số (cơ số lớn hơn 1) thì lũy thừa nào có số mũ lớn hơn thì sẽ lớn hơn.

$$\text{Nếu } m > n \text{ thì } a^m > a^n \text{ (} a > 1 \text{)}$$

- Nếu hai lũy thừa cùng số mũ (số mũ lớn hơn 0) thì lũy thừa nào có cơ số lớn hơn thì sẽ lớn hơn.

$$\text{Nếu } a > b \text{ thì } a^n > b^n \text{ (} n > 0 \text{)}$$

2. Ngoài cách trên, để so sánh hai lũy thừa ta còn dùng tính chất bắc cầu, tính chất đơn điệu của phép nhân ($a < b$ thì $a.c < b.c$ với $c > 0$)

Bổ xung kiến thức nâng cao:

1. Lũy thừa của lũy thừa: $(a^m)^n = a^{m.n}$

2. Lũy thừa của một tích: $(a.b)^n = a^n.b^n$.

$$\text{Ví dụ: } 2^5.5^5 = (2.5)^5 = 10^5 = 100\,000.$$

3. Lũy thừa một thương: $a^n : b^n = (a:b)^n$, hay $a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$$\text{Ví dụ: } 14^7 : 7^7 = (14 : 7)^7 = 2^7 = 128$$

4. Lũy thừa tầng: $a^{m^n} = a^{(m)^n}$ Ví dụ: $2^{2^3} = 2^{(2)^3} = 2^8 = 256$

Bài 1: So sánh các số sau:

a) 27^{11} và 81^8 b) 625^5 và 125^7

c) 5^{36} và 11^{24} d) 3^{2n} và 2^{3n}

Bài 2: So sánh các số sau:

a) 5^{23} và 6.5^{22}

b) 7.2^{13} và 2^{16}

c) 21^{15} và $27^5.49^8$.

Bài 3: So sánh các số sau.

a) 199^{20} và 2003^{15}

b) 3^{39} và 11^{21}

Bài 4: So sánh hai hiệu, hiệu nào lớn hơn?

a) $72^{45} - 72^{43}$ và $72^{44} - 72^{43}$

Bài 5. Tìm $x \in \mathbb{N}$, biết:

a) $16^x < 128^4$

b) $5^x.5^{x+1}.5^{x+2} \leq \underbrace{100\dots\dots 0}_{18 \text{ chữ số } 0} : 2^{18}$

18 chữ số 0

Bài 6: Cho $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9$.

So sánh S với 5.2^8 .

Bài 7: Gọi m là số các số có 9 chữ số mà trong cách ghi của nó không có chữ số 0.

Hãy so sánh m và 10.9^8 .

Bài 8: Hãy viết số lớn nhất bằng cách dùng 3 chữ số 1,2,3 với điều kiện mỗi chữ số dùng một và chỉ một lần.

Chuyên đề 2:

Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

Chữ số tận cùng của một tích của một lũy thừa:

I/ Lý thuyết

1. Tìm chữ số tận cùng của một tích.

- Tích các số lẻ là 1 số lẻ.
- Tích của một số lẻ có tận cùng là 5 với bất kỳ số lẻ nào cũng có tận cùng là 5.
- Tích của một số chẵn với bất kỳ số tự nhiên nào cũng là một số chẵn.

2. Tìm chữ số tận cùng của một lũy thừa .

- Các số tự nhiên có tận cùng bằng 0,1,5,6 khi nâng lên lũy thừa bất kỳ (khác 0) vẫn giữ nguyên chữ số tận cùng của nó.

- Các số tự nhiên có tận cùng bằng chữ số 3,7,9 nâng lên lũy thừa $4n$ đều có tận cùng là 1.

$$\dots 3^{4n} = \dots 1 \quad \dots 7^{4n} = \dots 1 \quad \dots 9^{4n} = \dots 1$$

- Các số tự nhiên có tận cùng bằng chữ số 2,2,8 nâng lên lũy thừa $4n$ ($n \neq 0$) đều có tận cùng là 6.

$$\dots 2^{4n} = \dots 6 \quad \dots 4^{4n} = \dots 6 \quad \dots 8^{4n} = \dots 6$$

(Riêng đối với các số tự nhiên có chữ số tận cùng là 4 hoặc 9, khi nâng lên lũy thừa lẻ đều có chữ số tận cùng là chính nó; khi nâng lên lũy thừa chẵn có chữ số tận cùng lần lượt là 6 và 1.)

II/ Bài tập

Bài 1: Tìm chữ số tận cùng của các số sau.

$$74^{30}; 49^{31}; 87^{32}; 5833; 23^{35}.$$

Bài 2: Tìm hai chữ số tận cùng của số 5^n . ($n > 1$)

Bài 3: Chứng tỏ các tổng hiệu sau chia hết cho 10.

$$\text{a) } A = 98.96.94.92 - 91.93.95.97$$

$$\text{b) } B = 405^n + 2^{405} + m \quad (m, n \in \mathbb{N}; n \neq 0)$$

Bài 4: Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

$$\text{a) } 234^{5^7} \quad \text{b) } 579^{6^5}$$

Bài 5: Tìm các số lẻ liên tiếp có tận cùng là 7. Hỏi tích đó có bao nhiêu thừa số?

Bài 6: Tích $2.2^2.2^3 \dots 2^{10} \cdot 5^2.5^4.5^6 \dots 5^{14}$.

Tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0?

Bài 7: Cho $S = 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{30}$.

Tìm chữ số tận cùng của S, từ đó suy ra S không phải là số chính phương.

Chuyên đề 3

Số nguyên tố. Hợp số

Phân tích một số ra thừa số nguyên tố.

Kiến thức nâng cao.

1. Xác định số lượng các ước của một số:

Nếu M phân tích ra thừa số nguyên tố được $M = a^x \cdot b^y \cdot \dots \cdot c^z$ thì số các ước của M là $(x+1)(y+1)\dots(z+1)$.

2. Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.

3. Tính chất chia hết liên qua đến số nguyên tố.

Nếu tích ab chia hết cho số nguyên tố p thì hoặc $a : p$ hoặc $b : p$.

Đặc biệt nếu $a^n : p$ thì $a : p$

III/ Ví dụ: 1. Tìm hai số nguyên tố biết tổng của chúng bằng 601

Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

2. Cho $A = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{100}$.

- a) Số A là số nguyên tố hay hợp số
b) Số A có phải là số chính phương không?

3. Số 54 có bao nhiêu ước? Viết tất cả các ước của nó?

IV/ Bài tập

114. Tìm số nguyên tố a để $4a + 11$ là số nguyên tố nhỏ hơn 30.

115. Các số sau là số nguyên tố hay hợp số?

a) $1.3.5.7 \dots 13 + 20$

b) $147.247.347 - 13$

116. Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng số $111 \dots 1 \underbrace{2111 \dots 1}_{n \text{ chữ số}} \underbrace{1}_{n \text{ chữ số}}$ là hợp số

117. Tìm số bị chia và thương trong phép chia:

$9^{**} : 17 = **$, biết rằng thương là một số nguyên tố.

118. Cho $a, n \in \mathbb{N}^*$, biết $a^n : 5$. Chứng minh $a^2 + 150 : 25$

119. a) Cho n là số không chia hết cho 3. Chứng minh rằng n^2 chia 3 dư 1.

b) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Hỏi $p^2 + 2003$ là số nguyên tố hay hợp số.

Bài 120. Cho $n > 2$ và không chia hết cho 3. Chứng minh rằng hai số $n^2 - 1$ và $n^2 + 1$ không thể đồng thời là số nguyên tố.

Bài 121: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3.

a) Chứng tỏ rằng p có dạng $6k + 1$ hoặc $6k + 5$.

b) Biết $8p + 1$ cũng là một số nguyên tố, chứng minh rằng $4p + 1$ là hợp số

Bài 122: Cho p và $p + 8$ đều là số nguyên tố ($p > 3$). Hỏi $p + 100$ là số nguyên tố hay hợp số?

Phân tích một số ra thừa số nguyên tố

Bài 123: Phân tích các số sau ra thừa số nguyên tố bằng cách hợp lý nhất:

a) 700; 9000; 210 000

b) 500; 1600; 18 000

Bài 124: Mỗi số sau có bao nhiêu ước:

90 ; 540 ; 3675.

Bài 125: Tìm các ước của số:

a) 119

b) 625

c) 200.

Bài 126: Tính cạnh của một hình vuông biết diện tích của nó là:

a) $5929m^2$;

b) $32400m^2$.

Bài 127: Tính cạnh của hình lập phương biết thể tích của nó là $1728cm^3$.

Bài 128: Chứng minh rằng một số tự nhiên khác 0, có số lượng các ước là một số lẻ thì số tự nhiên đó là một số chính phương.

Bài 129: Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ biết:

a) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 210$

b) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = 225$

Bài tập bổ sung

1. Chứng tỏ các số sau là hợp số:

A. 676767

B. $10^8 + 10^7 + 7$

C. $17^5 + 24^4 +$

13^{21}

D. 311141111

E. $10^{100} - 7$

Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

2. Cho số 360
 - a) Phân tích số 360 ra thừa số nguyên tố.
 - b) Số 360 có bao nhiêu ước.
 - c) Tìm tất cả các ước của 360
3. Các số sau là số nguyên tố hay hợp số:
 - a) 10^{25}
 - b) $11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3$
4. Chứng minh rằng bình phương của một số nguyên tố khác 2 và 3 khi chia cho 12 đều dư 1.
5. Tìm số $n \in \mathbb{N}^*$, sao cho $n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố.

Đ 13. Ước chung và ước chung lớn nhất

I/ Kiến thức cơ bản

II/ Kiến thức nâng cao.

III/ Ví dụ: 1. Tìm hai số nguyên tố biết tổng của chúng bằng 601

IV. Bài tập

Bài 130: Cho A là tập hợp các số nguyên tố

B là tập hợp các hợp số

M là tập hợp các ước của 20

N là tập hợp các ước của 50

a) Tìm $A \cap B$

b) Tìm $M \cap N$

Bài 131: Cho C là tập hợp các số chia hết cho 3

D là tập hợp các số chia hết cho 9

Tìm $C \cap D$.

Bài 132: Tìm ƯCLN và ƯC của ba số 432; 504 và 720.

Bài 133: Một căn phòng hình chữ nhật kích thước 630 x 480 (cm) được lát loại gạch hình vuông. Muốn cho hai hàng gạch cuối cùng sát hai bức tường liên tiếp không bị cắt xén thì kích thước lớn nhất của viên gạch là bao nhiêu? Để lát căn phòng đó cần bao nhiêu viên gạch?

Bài 134: Chứng minh các số sau đây nguyên tố cùng nhau:

a) Hai số lẻ liên tiếp.

b) $2n + 5$ và $3n + 7$ ($n \in \mathbb{N}$)

Bài 135: Cho $(a, b) = 1$, chứng minh rằng:

a) $(a, a - b) = 1$

b) $(ab, a + b) = 1$

Bài 136: Cho a, b là hai số tự nhiên không nguyên tố cùng nhau,

$$a = 4n + 3; \quad b = 5n + 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Tìm (a, b) .

Bài 137: ƯCLN của hai số là 45. Số lớn là 270, tìm số nhỏ.

Bài 138: Tìm hai số biết tổng của chúng là 162 và ƯCLN của chúng là 18.

Bài 139: Tìm hai số tự nhiên nhỏ hơn 200 biết hiệu của chúng là 90 và ƯCLN của chúng là 15.

Bài 140: Tìm hai số biết tích của chúng là 8748 và ƯCLN của chúng là 27.

Bài 141: Cho $a + 5b : 7$ ($a, b \in \mathbb{N}$). Chứng minh rằng $10a + b : 7$. Mệnh đề đảo lại có đúng không?

Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

Bài 142: Một số tự nhiên a và 5 lần số đó có tổng các chữ số như nhau. Chứng minh rằng $a : 9$.

Bài 143: Có 64 người đi tham quan bằng hai loại xe: Loại 12 chỗ ngồi và loại 7 chỗ ngồi. Biết số người đi vừa đủ số ghế ngồi, hỏi mỗi loại có mấy xe?

Bài tập bổ sung

1. Tìm số tự nhiên a, b để $A = \overline{4a1b}$ chia hết cho 12
2. Tìm hai số tự nhiên a, b biết tổng của chúng là 128 và ƯCLN của a, b là 16.
3. Tìm hai số tự nhiên a, b biết tích của chúng là 216 và ƯCLN của a, b là 6.
4. Cho hai số nguyên tố cùng nhau a và b .
Chứng minh rằng hai số $11a + 2b$ và $18a + 5b$ thì hoặc nguyên tố cùng nhau hoặc có một ước chung là 19
5. Cho hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng tích ab và tổng $a + b$ của chúng cũng là hai số nguyên tố cùng nhau.
6. Tìm các số tự nhiên a và b để $A = \overline{25a2b}$ chia hết cho 36 và số $B = \overline{a378b}$ chia hết cho 72.
7. Trong một buổi sinh hoạt ngoại khoá có 252 em học sinh khối lớp 6 ; 210 em khối 7; 126 em khối 8. Người ta chia đều số học sinh mỗi khối vào từng nhóm. Mỗi nhóm đều có đủ học sinh 3 khối.

Có bao nhiêu cách thành lập nhóm, mỗi cách cho bao nhiêu nhóm, mỗi nhóm có bao nhiêu người và số học sinh mỗi khối trong một nhóm là bao nhiêu.

Đ 14. Bội chung và bội chung nhỏ nhất

Kiến thức nâng cao.

1. Tích của hai số bằng tích của BCNN với ƯCLN của chúng.
 $ab = \text{BCNN}(a, b) \cdot \text{ƯCLN}(a, b)$
2. Nếu lấy $\text{BCNN}(a, b)$ chia cho từng số a, b thì thương của chúng là những số nguyên tố cùng nhau.
3. Nếu $a : m$ và $a : n$ thì $a : \text{BCNN}(m, n)$. Từ đó suy ra:
 - Nếu một số chia hết cho hai số nguyên tố cùng nhau thì nó chia hết cho tích của chúng.
 - Nếu một số chia hết cho các số nguyên tố đôi một cùng nhau thì nó chia hết cho tích của chúng.

II/ Ví dụ: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có 3 chữ số chia cho 18 ; 30; 45; có số dư lần lượt là: 8 ; 20; 35.

Giải

Gọi số phải tìm là a . Ta có: $a + 10$ chia hết cho 18; 30; 45.

Vậy $a + 10 \in \text{BC}(18, 30, 45)$.

$\text{BC}(18, 30, 45) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$.

Suy ra $a + 10 = 90k$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

Hay $a = 90k - 10$.

Với $k = 1$ thì $a = 80$ (mới có 2 chữ số)

Với $k = 3$ thì $a = 170$ (có 3 chữ số)

Vậy số cần tìm là 170

IV. Bài tập:

Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

Bài 144: Một xe lăn dành cho người tàn tật có chu vi bánh trước là 63cm, chu vi bánh sau là 186cm. Người ta đánh dấu hai điểm tiếp đất của hai bánh xe này. Hỏi bánh trước và bánh sau phải lăn ít nhất bao nhiêu vòng thì hai điểm được đánh dấu lại cùng tiếp đất một lúc.

Bài 145: Ba học sinh, mỗi người mua một loại bút. Giá ba loại lần lượt là 1200 đồng, 1500 đồng, 2000 đồng. Biết số tiền phải trả là như nhau, hỏi mỗi học sinh mua ít nhất bao nhiêu bút?

Bài 146: Tìm các bội chung lớn hơn 5000 nhưng nhỏ hơn 10000 của các số 126 ; 140 ; 180.

Bài 147: Một số tự nhiên chia cho 12, 18, 21 đều dư 5. Tìm số đó biết rằng nó xấp xỉ 1000.

Bài 148: Khối 6 của một trường có chưa tới 400 học sinh, khi xếp hàng 10; 12; 15 đều dư 3 nhưng nếu xếp hàng 11 thì không dư. Tính số học sinh khối 6.

Bài 149: Tìm hai số tự nhiên a và b biết:

$$\text{BCNN}(a, b) = 300 ; \text{ƯCLN}(a, b) = 15$$

Bài 150: Tìm hai số tự nhiên a và b biết tích của chúng là 2940 và BCNN của chúng là 210.

Bài 151: Tìm hai số a và b biết tổng của BCNN với ƯCLN của chúng là 15.

Bài 152: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất có 3 chữ số sao cho chia cho 11 thì dư 5, chia cho 13 thì dư 8.

Bài 153: Chứng minh rằng nếu a là một số lẻ không chia hết cho 3 thì $a^2 - 1 : 6$.

Bài 154: Chứng minh rằng tích của 5 số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 120.

Bài tập bổ sung

1. Tìm số tự nhiên bé nhất khi chia cho 2; 5; 11 và 26 đều dư 1.

2. Tìm các số tự nhiên a, b biết

$$\text{ƯCLN}(a, b) = 5 \text{ và } \text{BCNN}(a, b) = 105$$

3. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 8 dư 6, chia cho 12 dư 10, chia cho 15 dư 13 và chia hết cho 23.

4. Tìm hai số có 3 chữ số biết tổng của chúng là bội của 504 và thương của số lớn chia cho số nhỏ là bội của 6.

5. Cho $\text{BCNN}(a, b) = 60$ và $a = 12$. Tìm b?

6. Cho một số A chia hết cho 7 và khi chia A cho 4 hoặc 6 đều dư 1. Tìm A biết $A < 400$.

7. Tổng số học sinh khối 6 của một trường có khoảng từ 235 đến 250 em, khi chia cho 3 dư 2, chia cho 4 thì dư 3, chia cho 5 dư 4, chia cho 6 dư 5, chia cho 10 dư 9. tìm số học sinh của khối 6

Chuyên đề 4

Nguyên lý Diriclé và bài toán chia hết

Bài 155: Chứng minh rằng trong 11 số tự nhiên bất kỳ bao giờ cũng có ít nhất hai số có hai chữ số tận cùng giống nhau.

Bài 154: Chứng minh rằng tồn tại một bội của 13 gồm toàn chữ số 2.

Bài 154: Cho dãy số : $10; 10^2; 10^3; \dots; 10^{20}$.

Chứng minh rằng tồn tại một số chia 19 dư 1.

Bài 158: Chứng minh rằng tồn tại một số là bội của 19 có tổng các chữ số bằng 19.

Bài 159: Cho ba số lẻ. Chứng minh rằng tồn tại hai số có tổng các chữ số bằng 19.