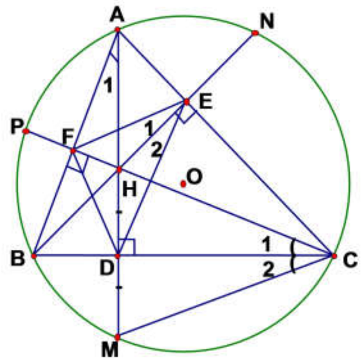
TUYỂN TẬP 80 BÀI TOÁN HÌNH HỌC LỚP 9

Bài 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) lần lượt tại M,N,P.

Chứng minh rằng:

1. Tứ giác CEHD, nội tiếp .
2. Bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn.
3. AE.AC = AH.AD; AD.BC = BE.AC.
4. H và M đối xứng nhau qua BC.
5. Xác định tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.



Lời giải:

1. Xét tứ giác CEHD ta có:

$\angle$ CEH = 90^0 (Vì BE là đường cao)

$\angle$ CDH = 90^0 (Vì AD là đường cao)

=> $\angle$ CEH + $\angle$ CDH = 180^0

Mà $\angle$ CEH và $\angle$ CDH là hai góc đối của tứ giác CEHD. Do đó CEHD là tứ giác nội tiếp

2. Theo giả thiết: BE là đường cao => BE $\perp$ AC => $\angle$BEC = 90^0.

CF là đường cao => CF $\perp$ AB => $\angle$BFC = 90^0.

Như vậy E và F cùng nhìn BC dưới một góc 90^0 => E và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC.

Vậy bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn.

3. Xét hai tam giác AEH và ADC ta có: $\angle$ AEH = $\angle$ ADC = 90^0 ; $\angle$A là góc chung

=> Δ AEH ~ ΔADC => $\frac{AE}{AD} = \frac{AH}{AC}$ => AE.AC = AH.AD.

* Xét hai tam giác BEC và ADC ta có: $\angle$ BEC = $\angle$ ADC = 90^0 ; $\angle$C là góc chung

=> Δ BEC ~ ΔADC => $\frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC}$ => AD.BC = BE.AC.

4. Ta có $\angle C_1 = \angle A_1$ (vì cùng phụ với góc ABC)

$\angle C_2 = \angle A_1$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM)

=> $\angle C_1 = \angle C_2$ => CB là tia phân giác của góc HCM; lại có CB $\perp$ HM => Δ CHM cân tại C

=> CB cũng là đương trung trực của HM vậy H và M đối xứng nhau qua BC.

5. Theo chứng minh trên bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn

=> $\angle C_1 = \angle E_1$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BF)

Cũng theo chứng minh trên CEHD là tứ giác nội tiếp

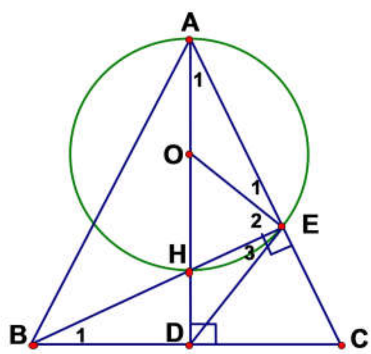
⇨ $\angle C_1 = \angle E_2$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung HD)

⇨ $\angle E_1 = \angle E_2$ => EB là tia phân giác của góc FED.

Chứng minh tương tự ta cũng có FC là tia phân giác của góc DFE mà BE và CF cắt nhau tại H do đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

Bài 2. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), các đường cao AD, BE, cắt nhau tại H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE.

1. Chứng minh tứ giác CEHD nội tiếp .
2. Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.
3. Chứng minh ED = $\frac{1}{2}$BC.
4. Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).
5. Tính độ dài DE biết DH = 2 Cm, AH = 6 Cm.



Lời giải:

1. Xét tứ giác CEHD ta có:

$\angle$ CEH = 90^0 (Vì BE là đường cao)

$\angle$ CDH = 90^0 (Vì AD là đường cao)

=> $\angle$ CEH + $\angle$ CDH = 180^0

Mà $\angle$ CEH và $\angle$ CDH là hai góc đối của tứ giác CEHD. Do đó CEHD là tứ giác nội tiếp

2. Theo giả thiết: BE là đường cao => BE $\perp$ AC => $\angle$BEA = 90^0.

AD là đường cao => AD $\perp$ BC => $\angle$BDA = 90^0.

Như vậy E và D cùng nhìn AB dưới một góc 90^0 => E và D cùng nằm trên đường tròn đường kính AB.

Vậy bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Theo giả thiết tam giác ABC cân tại A có AD là đường cao nên cũng là đường trung tuyến

=> D là trung điểm của BC. Theo trên ta có $\angle$BEC = 90^0 .

Vậy tam giác BEC vuông tại E có ED là trung tuyến => DE = $\frac{1}{2}$BC.

4. Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE nên O là trung điểm của AH => OA = OE => tam giác AOE cân tại O => $\angle E_1 = \angle A_1$ (1).

Theo trên DE = $\frac{1}{2}$BC => tam giác DBE cân tại D => $\angle E_3 = \angle B_1$ (2)

Mà $\angle B_1 = \angle A_1$ (vì cùng phụ với góc ACB) => $\angle E_1 = \angle E_3$ => $\angle E_1 + \angle E_2 = \angle E_2 + \angle E_3$

Mà $\angle E_1 + \angle E_2 = \angle BEA = 90^0$ => $\angle E_2 + \angle E_3 = 90^0 = \angle OED$ => DE $\perp$ OE tại E.

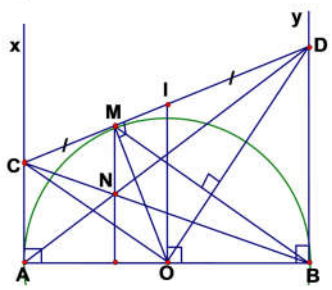
Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E.

5. Theo giả thiết AH = 6 Cm => OH = OE = 3 cm.; DH = 2 Cm => OD = 5 cm. Áp dụng định lí Pitago cho tam giác OED vuông tại E ta có $ED^2 = OD^2 - OE^2 \Leftrightarrow ED^2 = 5^2 - 3^2 \Leftrightarrow ED = 4$cm

<u>Bài 3:</u> Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax , By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

1. Chứng minh AC + BD = CD.
2. Chứng minh $\angle$COD = 90^0.
3. Chứng minh AC. BD = $\frac{AB^2}{4}$.
4. Chứng minh OC // BM
5. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.
5. Chứng minh MN $\perp$ AB.
6. Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.

iải:



1. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: CA = CM; DB = DM => AC + BD = CM + DM.

Mà CM + DM = CD => AC + BD = CD

2. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OC là tia phân giác của góc AOM; OD là tia phân giác của góc BOM, mà $\angle$AOM và $\angle$BOM là hai góc kề bù => $\angle$COD = 90^0.

3. Theo trên $\angle$COD = 90^0 nên tam giác COD vuông tại O có OM $\perp$ CD (OM là tiếp tuyến).

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có OM^2 = CM. DM,

Mà OM = R; CA = CM; DB = DM => AC. BD =R^2 => AC. BD = $\frac{AB^2}{4}$.

4. Theo trên $\angle$COD = 90^0 nên OC $\perp$ OD .(1)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: DB = DM; lại có OM = OB =R => OD là trung trực của BM => BM $\perp$ OD .(2). Từ (1) Và (2) => OC // BM (Vì cùng vuông góc với OD).

5. Gọi I là trung điểm của CD ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác COD đường kính CD có IO là bán kính.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có AC $\perp$ AB; BD $\perp$ AB => AC // BD => tứ giác ACDB là hình thang.

Lại có I là trung điểm của CD; O là trung điểm của AB => IO là đường trung bình của hình thang ACDB

$\Rightarrow$ IO // AC , mà AC $\perp$ AB => IO $\perp$ AB tại O => AB là tiếp tuyến tại O của đường tròn đường kính CD

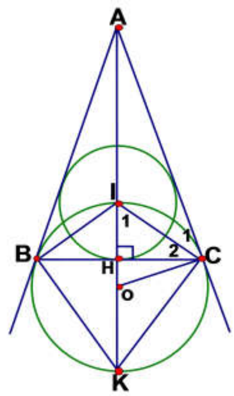
6. Theo trên AC // BD => $\frac{CN}{BN}=\frac{AC}{BD}$, mà CA = CM; DB = DM nên suy ra $\frac{CN}{BN}=\frac{CM}{DM}$

=> MN // BD mà BD ⊥ AB => MN ⊥ AB.

7. (HD): Ta có chu vi tứ giác ACDB = AB + AC + CD + BD mà AC + BD = CD nên suy ra chu vi tứ giác ACDB = AB + 2CD mà AB không đổi nên chu vi tứ giác ACDB nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất , mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữ Ax và By tức là CD vuông góc với Ax và By. Khi đó CD // AB => M phải là trung điểm của cung AB.

Bài 4 Cho tam giác cân ABC (AB = AC), I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A , O là trung điểm của IK.

1. Chứng minh B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).
3. Tính bán kính đường tròn (O) Biết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm.



Lời giải: (HD)

1. Vì I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A nên BI và BK là hai tia phân giác của hai góc kề bù đỉnh B

Do đó BI ⊥ BK hay $\angle IBK = 90^0$.

Tương tự ta cũng có $\angle ICK = 90^0$ như vậy B và C cùng nằm trên đường tròn đường kính IK do đó B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

2. Ta có $\angle C_1 = \angle C_2$ (1) (vì CI là phân giác của góc ACH.

$\angle C_2 + \angle I_1 = 90^0$ (2) (vì $\angle IHC = 90^0$). hoctoancapba.com

$\angle I_1 = \angle ICO$ (3) (vì tam giác OIC cân tại O)

Từ (1), (2) , (3) => $\angle C_1 + \angle ICO = 90^0$ hay AC ⊥ OC. Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3. Từ giả thiết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm => CH = 12 cm.

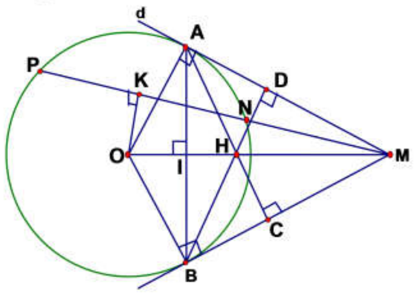
$AH^2 = AC^2 - HC^2$ => AH = $\sqrt{20^2 - 12^2}$ = 16 (cm)

$CH^2 = AH.OH$ => OH = $\frac{CH^2}{AH} = \frac{12^2}{16}$ = 9 (cm)

OC = $\sqrt{OH^2 + HC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225}$ = 15 (cm)

Bài 5: Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ AC ⊥ MB, BD ⊥ MA, gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

1. Chứng minh tứ giác AMBO nội tiếp.
2. Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn .
3. Chứng minh OI.OM = R^2; OI. IM = IA^2.
4. Chứng minh OAHB là hình thoi.
5. Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.
6. Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d



Lời giải:

1. (HS tự làm).

2. Vì K là trung điểm NP nên OK ⊥ NP (quan hệ đường kính Và dây cung) => $\angle OKM = 90^0$. Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\angle OAM = 90^0$; $\angle OBM = 90^0$. như vậy K, A, B cùng nhìn OM dưới một góc 90^0 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính OM.

Vậy năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Ta có MA = MB (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau); OA = OB = R

=> OM là trung trực của AB => OM ⊥ AB tại I .

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\angle OAM = 90^0$ nên tam giác OAM vuông tại A có AI là đường cao.
Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao => $OI.OM = OA^2$ hay $OI.OM = R^2$; và $OI.\ IM = IA^2$.

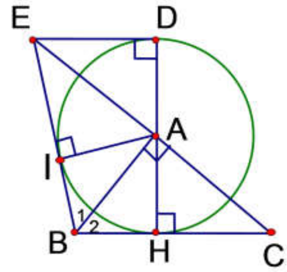
4. Ta có OB ⊥ MB (tính chất tiếp tuyến) ; AC ⊥ MB (gt) => OB // AC hay OB // AH.
OA ⊥ MA (tính chất tiếp tuyến) ; BD ⊥ MA (gt) => OA // BD hay OA // BH.
=> Tứ giác OAHB là hình bình hành; lại có OA = OB (=R) => OAHB là hình thoi.

5. Theo trên OAHB là hình thoi. => OH ⊥ AB; cũng theo trên OM ⊥ AB => O, H, M thẳng hàng(Vì qua O chỉ có một đường thẳng vuông góc với AB).

6. (HD) Theo trên OAHB là hình thoi. => AH = AO = R. Vậy khi M di động trên d thì H cũng di động nhưng luôn cách A cố định một khoảng bằng R. Do đó quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa đường tròn tâm A bán kính AH = R

<u>**Bài 6**</u> hoctoancapba.com Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Gọi HD là đường kính của đường tròn (A; AH). Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt CA ở E.

1. Chứng minh tam giác BEC cân.
2. Gọi I là hình chiếu của A trên BE, Chứng minh rằng AI = AH.
3. Chứng minh rằng BE là tiếp tuyến của đường tròn (A; AH).
4. Chứng minh BE = BH + DE.



<u>**Lời giải:**</u> (HD)

1. Δ AHC = ΔADE (g.c.g) => ED = HC (1) và AE = AC (2).
Vì AB ⊥CE (gt), do đó AB vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của ΔBEC => BEC là tam giác cân. => $\angle B_1 = \angle B_2$

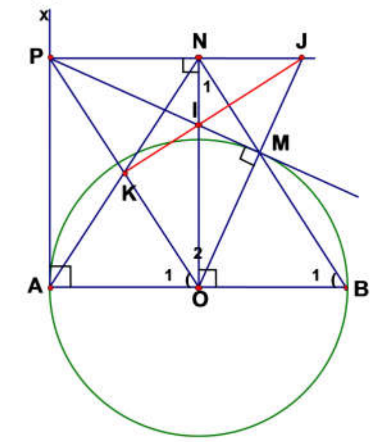
2. Hai tam giác vuông ABI và ABH có cạnh huyền AB chung, $\angle B_1 = \angle B_2$ => Δ AHB = ΔAIB => AI = AH.

3. AI = AH và BE ⊥ AI tại I => BE là tiếp tuyến của (A; AH) tại I.

4. DE = IE và BI = BH => BE = BI+IE = BH + ED

<u>**Bài 7**</u> Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao cho AP > R, từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M. (1) và (2) => é ABM = é

1. Chứng minh rằng tứ giác APMO nội tiếp được một đường tròn. P (3)
2. Chứng minh BM // OP.
3. Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác OBNP là hình bình hành.
4. Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.



<u>**Lời giải:**</u>

1. (HS tự làm).

2.Ta có é ABM nội tiếp chắn cung AM; é AOM là góc ở tâm chắn cung AM => é ABM = $\frac{\angle AOM}{2}$ (1) OP là tia phân giác é AOM (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau) => é AOP = $\frac{\angle AOM}{2}$ (2)

Mà $\angle ABM$ và $\angle AOP$ là hai góc đồng vị nên suy ra BM // OP. (4)

3.Xét hai tam giác AOP và OBN ta có : $\angle PAO=90^0$ (vì PA là tiếp tuyến); $\angle NOB = 90^0$ (gt NO⊥AB).
=> $\angle PAO = \angle NOB = 90^0$; OA = OB = R; $\angle AOP = \angle OBN$ (theo (3)) => ΔAOP = ΔOBN => OP = BN (5)
Từ (4) và (5) => OBNP là hình bình hành (vì có hai cạnh đối song song và bằng nhau).

4. Tứ giác OBNP là hình bình hành => PN // OB hay PJ // AB, mà ON ⊥ AB => ON ⊥ PJ
Ta cũng có PM ⊥ OJ (PM là tiếp tuyến), mà ON và PM cắt nhau tại I nên I là trực tâm tam giác POJ. (6)
Dễ thấy tứ giác AONP là hình chữ nhật vì có $\angle PAO = \angle AON = \angle ONP = 90^0$ => K là trung điểm của PO (t/c đường chéo hình chữ nhật). (6)

AONP là hình chữ nhật => éAPO = é NOP (so le) (7)

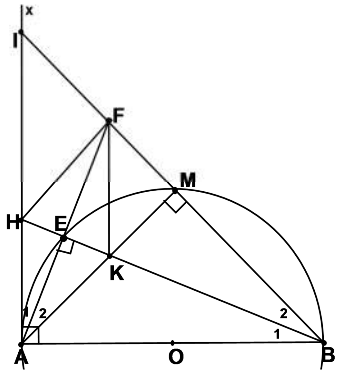
Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau Ta có PO là tia phân giác ∠APM => ∠APO = ∠MPO (8).

Từ (7) và (8) => ΔIPO cân tại I có IK là trung tuyến đông thời là đường cao => IK ⊥ PO. (9)

Từ (6) và (9) => I, J, K thẳng hàng.

Bài 8 Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A,B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K.

1) Chứng minh rằng: EFMK là tứ giác nội tiếp.
2) Chứng minh rằng: $AI^2 = IM . IB$.
3) Chứng minh BAF là tam giác cân.
4) Chứng minh rằng : Tứ giác AKFH là hình thoi.
5) Xác định vị trí M để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.



Lời giải:

1. Ta có : ∠AMB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> ∠KMF = 90^0 (vì là hai góc kề bù).

∠AEB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> ∠KEF = 90^0 (vì là hai góc kề bù).

=> ∠KMF + ∠KEF = 180^0 . Mà ∠KMF và ∠KEF là hai góc đối của tứ giác EFMK do đó EFMK là tứ giác nội tiếp.

2. Ta có ∠IAB = 90^0 (vì AI là tiếp tuyến) => ΔAIB vuông tại A có AM ⊥ IB (theo trên). Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao => $AI^2 = IM . IB$.

3. Theo giả thiết AE là tia phân giác góc IAM => ∠IAE = ∠MAE => $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{ME}$ (*lí do ……)*
=> ∠ABE =∠MBE (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) => BE là tia phân giác góc ABF. (1)

Theo trên ta có éAEB = 90^0 => BE ⊥ AF hay BE là đường cao của tam giác ABF (2).

Từ (1) và (2) => BAF là tam giác cân. tại B .

4. BAF là tam giác cân. tại B có BE là đường cao nên đồng thời là đương trung tuyến => E là trung điểm của AF. (3)

Từ BE ⊥ AF => AF ⊥ HK (4), theo trên AE là tia phân giác góc IAM hay AE là tia phân giác éHAK (5)

Từ (4) và (5) => HAK là tam giác cân. tại A có AE là đường cao nên đồng thời là đương trung tuyến => E là trung điểm của HK. (6).

Từ (3) , (4) và (6) => AKFH là hình thoi (vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường).

5. (HD). Theo trên AKFH là hình thoi => HA // FK hay IA // FK => tứ giác AKFI là hình thang.

Để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn thì AKFI phải là hình thang cân.

AKFI là hình thang cân khi M là trung điểm của cung AB.

Thật vậy: M là trung điểm của cung AB => ∠ABM = ∠MAI = 45^0 (t/c góc nội tiếp). (7)

Tam giác ABI vuông tại A có ∠ABI = 45^0 => éAIB = 45^0 .(8)

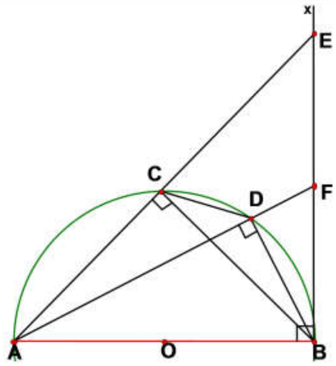
Từ (7) và (8) => ∠IAK = ∠AIF = 45^0 => AKFI là hình thang cân (hình thang có hai góc đáy bằng nhau).

Vậy khi M là trung điểm của cung AB thì tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.

Bài 9 Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuộc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F ở giữa B và E).

1. Chứng minh AC. AE không đổi.
2. Chứng minh ∠ ABD = ∠ DFB.
3. Chứng minh rằng CEFD là tứ giác nội tiếp.

Lời giải:



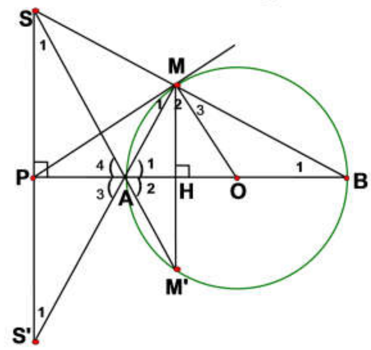
1. C thuộc nửa đường tròn nên $\angle ACB = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $BC \perp AE$.
$\angle ABE = 90^0$ (Bx là tiếp tuyến) => tam giác ABE vuông tại B có BC là đường cao => AC. AE = AB^2 (hệ thức giữa cạnh và đường cao), mà AB là đường kính nên AB = 2R không đổi do đó AC. AE không đổi.

2. Δ ADB có $\angle ADB = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn).
=> $\angle ABD + \angle BAD = 90^0$ (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180^0) (1)
Δ ABF có $\angle ABF = 90^0$ (BF là tiếp tuyến).
=> $\angle AFB + \angle BAF = 90^0$ (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180^0) (2)
Từ (1) và (2) => $\angle ABD = \angle DFB$ (cùng phụ với $\angle BAD$)

3. Tứ giác ACDB nội tiếp (O) => $\angle ABD + \angle ACD = 180^0$.
$\angle ECD + \angle ACD = 180^0$ (Vì là hai góc kề bù) => $\angle ECD = \angle ABD$ (cùng bù với $\angle ACD$).
Theo trên $\angle ABD = \angle DFB$ => $\angle ECD = \angle DFB$. Mà $\angle EFD + \angle DFB = 180^0$ (Vì là hai góc kề bù) nên suy ra $\angle ECD + \angle EFD = 180^0$, mặt khác $\angle ECD$ và $\angle EFD$ là hai góc đối của tứ giác CDFE do đó tứ giác CEFD là tứ giác nội tiếp.

Bài 10 Cho đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn sao cho AM < MB. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AB và S là giao điểm của hai tia BM, M'A. Gọi P là chân đường vuông góc từ S đến AB.

1.Gọi S' là giao điểm của MA và SP. Chứng minh rằng Δ PS'M cân.
2.Chứng minh PM là tiếp tuyến của đường tròn .



Lời giải:

1. Ta có $SP \perp AB$ (gt) => $\angle SPA = 90^0$; $\angle AMB = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\angle AMS = 90^0$. Như vậy P và M cùng nhìn AS dưới một góc bằng 90^0 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính AS.
Vậy bốn điểm A, M, S, P cùng nằm trên một đường tròn.

2. Vì M'đối xứng M qua AB mà M nằm trên đường tròn nên M' cũng nằm trên đường tròn => hai cung AM và AM' có số đo bằng nhau
=> $\angle AMM' = \angle AM'M$ (Hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) (1)
Cũng vì M'đối xứng M qua AB nên $MM' \perp AB$ tại H => MM'// SS' (cùng vuông góc với AB)
=> $\angle AMM' = \angle AS'S$; $\angle AM'M = \angle ASS'$ (vì so le trong) (2).
=> Từ (1) và (2) => $\angle AS'S = \angle ASS'$.
Theo trên bốn điểm A, M, S, P cùng nằm trên một đ/ tròn => $\angle ASP = \angle AMP$ (nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AP}$)
=> $\angle AS'P = \angle AMP$ => tam giác PMS' cân tại P.

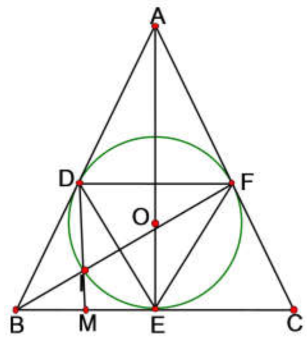
3. Tam giác SPB vuông tại P; tam giác SMS' vuông tại M => $\angle B_1 = \angle S'_1$ (cùng phụ với $\angle S$). (3)
Tam giác PMS' cân tại P => $\angle S'_1 = \angle M_1$ (4)
Tam giác OBM cân tại O (vì có OM = OB =R) => $\angle B_1 = \angle M_3$ (5).
Từ (3), (4) và (5) => $\angle M_1 = \angle M_3$ => $\angle M_1 + \angle M_2 = \angle M_3 + \angle M_2$ mà $\angle M_3 + \angle M_2 = \angle AMB = 90^0$ nên suy ra $\angle M_1 + \angle M_2 = \angle PMO = 90^0$ => $PM \perp OM$ tại M => PM là tiếp tuyến của đường tròn tại M

Bài 11. Cho tam giác ABC (AB = AC). Cạnh AB, BC, CA tiếp xúc với đường tròn (O) tại các điểm D, E, F . BF cắt (O) tại I , DI cắt BC tại M. Chứng minh :

1. Tam giác DEF có ba góc nhọn.

2. DF // BC. **3**. Tứ giác BDFC nội tiếp. **4**. $\frac{BD}{CB} = \frac{BM}{CF}$

Lời giải:



1. (HD) Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau ta có AD = AF => tam giác ADF cân tại A => ∠ADF = ∠AFD < 90^0 => sđ cung DF < 180^0 => ∠DEF < 90^0 (vì góc DEF nội tiếp chắn cung DE).

Chứng minh tương tự ta có ∠DFE < 90^0; ∠EDF < 90^0. Như vậy tam giác DEF có ba góc nhọn.

2. Ta có AB = AC (gt); AD = AF (theo trên) => $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC}$ => DF // BC.

3. DF // BC => BDFC là hình thang lại có ∠ B = ∠C (vì tam giác ABC cân)

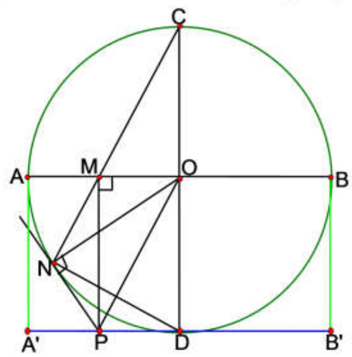
=> BDFC là hình thang cân do đó BDFC nội tiếp được một đường tròn .

4. Xét hai tam giác BDM và CBF Ta có ∠ DBM = ∠BCF (hai góc đáy của tam giác cân). ∠BDM = ∠BFD (nội tiếp cùng chắn cung DI); ∠ CBF = ∠BFD (vì so le) => ∠BDM = ∠CBF .

=> ΔBDM ~ΔCBF => $\frac{BD}{CB} = \frac{BM}{CF}$

Bài 12 Cho đường tròn (O) bán kính R có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M (M khác O). CM cắt (O) tại N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của đường tròn ở P. Chứng minh :

1. Tứ giác OMNP nội tiếp.
2. Tứ giác CMPO là hình bình hành.
3. CM. CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.
4. Khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên đoạn thẳng cố định nào.



Lời giải:

1. Ta có ∠OMP = 90^0 (vì PM ⊥ AB); ∠ONP = 90^0 (vì NP là tiếp tuyến).

Như vậy M và N cùng nhìn OP dưới một góc bằng 90^0 => M và N cùng nằm trên đường tròn đường kính OP => Tứ giác OMNP nội tiếp.

2. Tứ giác OMNP nội tiếp => ∠OPM = ∠ ONM (nội tiếp chắn cung OM)

Tam giác ONC cân tại O vì có ON = OC = R => ∠ONC = ∠OCN

=> ∠OPM = ∠OCM.

Xét hai tam giác OMC và MOP ta có ∠MOC = ∠OMP = 90^0; ∠OPM = ∠OCM => ∠CMO = ∠POM lại có MO là cạnh chung => ΔOMC = ΔMOP => OC = MP. (1)

Theo giả thiết Ta có CD ⊥ AB; PM ⊥ AB => CO//PM (2).

Từ (1) và (2) => Tứ giác CMPO là hình bình hành.

3. Xét hai tam giác OMC và NDC ta có ∠MOC = 90^0 (gt CD ⊥ AB); ∠DNC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => ∠MOC =∠DNC = 90^0 lại có ∠C là góc chung => ΔOMC ~ΔNDC

=> $\frac{CM}{CD} = \frac{CO}{CN}$ => CM. CN = CO.CD mà CO = R; CD = 2R nên CO.CD = $2R^2$ không đổi => CM.CN =$2R^2$ không đổi hay tích CM. CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

4. (HD) Dễ thấy ΔOMC = ΔDPO (c.g.c) => ∠ODP = 90^0 => P chạy trên đường thẳng cố định vuông góc với CD tại D.

Vì M chỉ chạy trên đoạn thẳng AB nên P chỉ chạy trên doạn thẳng A' B' song song và bằng AB.

Bài 13 Cho tam giác ABC vuông ở A (AB > AC), đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điển A , Vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E, Nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F.

1. Chứng minh AFHE là hình chữ nhật.