Tìm quỹ tích.

Câu 1. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ (Vòng 1)- năm học 2002-2003]

a/ Trong mặt phẳng Oxy, cho một đường tròn (C) cắt parabol (P): $y = x^2$ tại bốn điểm, một điểm có tọa độ là (1;1) và ba điểm còn lại là ba đỉnh của một tam giác đều. Tính bán kính của đường tròn (C).

b/ Tìm tập hợp các tâm của những tam giác đều có ba đỉnh thuộc parabol (P): $y = x^2$.

Lời giải

a/ (C): $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. (C) qua điểm (1;1) nên: $R^2 = (1-a)^2 + (1-b)^2$.

Hoành độ x_1, x_2, x_3 của ba đỉnh tam giác đều và x = 1 là nghiệm của phương trình:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = (1-a)^2 + (1-b)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^3 + x^2 + (2-2b)x + 2 - 2a - 2b = 0 \end{array}\right.$$

Do đó: $x^3 + x^2 + (2-2b)x + 2 - 2a - 2b \equiv (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ nên:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2 - 2b \end{cases}$$

Từ giả thiết tam giác đều nên:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3a \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3a \\ (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 3b \end{cases}$$

Do đó: $a = -\dfrac{1}{3}$, $b = 3$ và bán kính đường tròn (C) là: $R = \dfrac{2\sqrt{13}}{3}$.

b/ (1.5 đ)

Thuận:

Giả sử I(a;b) là tâm của tam giác đều ABC có đỉnh trên (P). Đường tròn (ABC) cắt (P) thêm điểm $M(x_0;y_0)$ (có thể trùng A, B, C).

x_A, x_B, x_C và x_0 là nghiệm của: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = (x_0-a)^2 + (x_0^2 - b)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ x^3 + x_0x^2 + (x_0^2 + 1 - 2b)x + x_0^3 + x_0 - 2a - 2bx_0 = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Suy ra:

$$\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3a \\ x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 = 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3a \\ (x_A + x_B + x_C)^2 - 2(x_Ax_B + x_Bx_C + x_Cx_A) = (-x_0)^2 - 2(x_0^2 + 1 - 2b) \end{cases}$$

Hay: $\begin{cases} a = -\dfrac{x_0}{3} \\ b = x_0^2 + 2 \end{cases}$, vì vậy: $b = 9a^2 + 2$. Nên tâm I ở trên đồ thị (G): $y = 9x^2 + 2$.

Đảo: Xét I(a; $9a^2 + 2$) tùy ý trên (G): $y = 9x^2 + 2$. Ta phải chứng minh đường tròn (C) tâm I bán kính IM với M(-3a; $9a^2$) cắt (P) thêm 3 điểm là 3 đỉnh của một tam giác đều.

Xét phương trình: $(x-a)^2 + (x^2 - 9a^2 - 2)^2 = (-3a-a)^2 + (9a^2 - 9a^2 - b)^2$ (2).

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3a \\ f(x) = 0 \end{array}\right.$ với $f(x) = x^3 - 3a^2x^2 - (9a^2 + 3)x + 27a^3 + 7a$ (f(x) = 0 chính là phương trình (1) với $x_0 = -3a$).

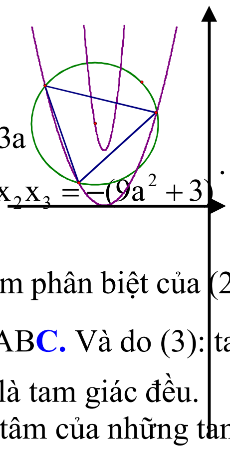
Nếu a = 0: $f(x) = x^3 - 3x = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Nếu $a \neq 0$: Do f(x) liên tục, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ và $\begin{cases} f(-3a) = 16a > 0; f(3a) = -2a < 0 \text{ khi } a > 0 \\ f(3a) = -2a > 0; f(-3a) = 16a < 0 \text{ khi } a < 0 \end{cases}$

nên f(x) = 0 có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình f(x) = 0 luôn có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 với mọi a.

y



Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3a \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -(9a^2+3) \end{cases}$. Do đó: $\begin{cases} \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3} = a \\ \dfrac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3} = 9a^2+3 \end{cases}$ (3)

Do x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm phân biệt của (2) nên: (C) cắt (P) tại 3 đỉnh $A\left(x_1;x_1^2\right)$, $B\left(x_2;x_2^2\right)$, $C\left(x_3;x_3^2\right)$ của tam giác ABC. Và do (3): tam giác ABC có trọng tâm trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp I, nên ABC là tam giác đều.

<u>Kết luận</u>: Tập hợp các tâm của những tam giác đều có 3 đỉnh thuộc (P): $y = x^2$ là parabol: (G): $y = 9x^2 + 2$.

Câu 2. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ (Vòng 1)- năm học 2004-2005]

Trong mặt phẳng (P), cho tam giác vuông ABC cố định có $AB = AC$, Tìm tập hợp các điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $4MA \le MB + MC - |MB - MC|$

Lời giải

Ta có:

+ $MB + MC - |MB - MC| = 2\text{Min}(MB, MC)$

$4MA \le MB + MC - |MB - MC| \Leftrightarrow 2MA \le MB; 2MA \le MC$

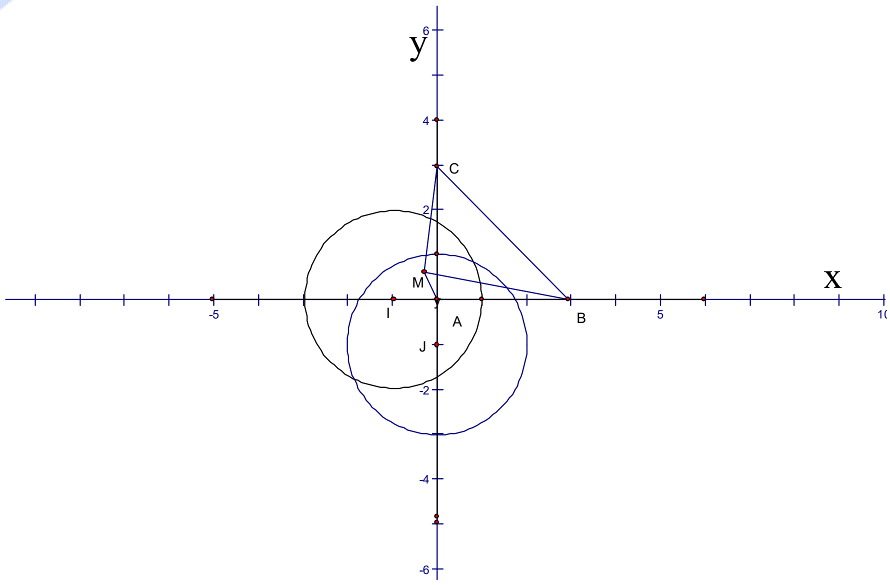
+ Chọn hệ trục Axy và đơn vị trên trục sao cho B(3;0),C(0;3). Gọi M(x;y)

$2MA \le MB \Leftrightarrow 4MA^2 - BM^2 \le 0 \Leftrightarrow 4\left(x^2+y^2\right) - (x-3)^2 - y^2 \le 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 \le 4$

Vậy ở trong hình tròn (T) tâm I(-1;0), bán kính 2, (kể cả biên).

Tương tự $2MA \le MC \Leftrightarrow$ M ở trong hình tròn (S) tâm J(0;-1), bán kính 2, (kể cả biên).

Vậy tập hợp những điểm M thỏa bài toán là phần giao của hai hình tròn (T) và (S), (kể cả biên).



Câu 3. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ (Vòng 1)- năm học 2005-2006]

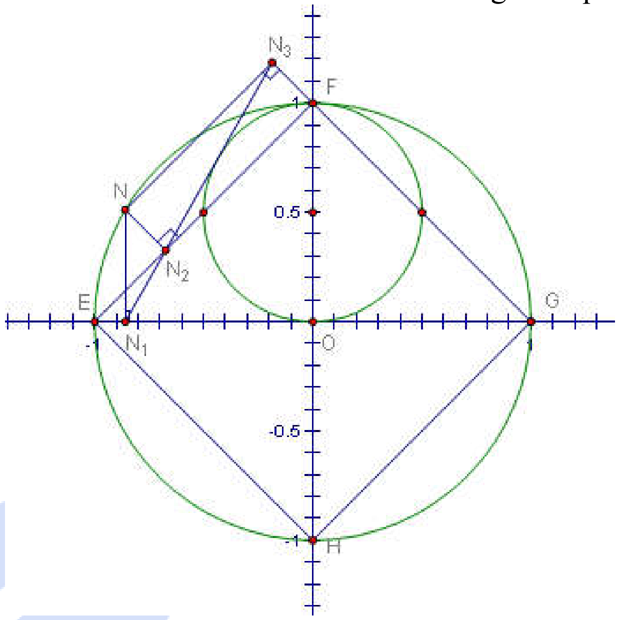
Cho hình vuông EFGH. Gọi (T) là đường tròn qua các trung điểm các cạnh của tam giác EFG. Nhận xét: Điểm H thỏa mãn đồng thời hai tính chất sau:

a/ Các hình chiếu vuông góc của nó lần lượt trên các đường thẳng: EF, FG, GE nằm trên một đường thẳng d.

b/ Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (T).
Hãy tìm tập hợp tất cả các điểm N của mặt phẳng chứa hình vuông EFGH sao cho N thỏa mãn đồng thời hai tính chất a/ và b/ ở trên.

Lời giải

+ Điểm N thỏa mãn tính chất a/ khi và chỉ khi N ở trên đường tròn qua E, F, G.



+ Chứng minh: Chọn hệ trục Oxy với O là tâm của hình vuông EFGH và vec tơ đơn vị trên trục $\vec{i}=\overrightarrow{OG}; \vec{j}=\overrightarrow{OF}$. Ta có E(-1;0), F(0;1), G(1;0).

Phương trình của EF: x –y + 1 = 0; FG: x + y -1 = 0, đường tròn (EFG): $x^2+y^2=1$

Gọi N(X;Y). Tọa độ các hình chiếu của N lên EG, EF, FG lần lượt là:

N_1 (X;0), N_2 ($\frac{1}{2}$(X+Y-1); $\frac{1}{2}$(X+Y+1)), N_3 ($\frac{1}{2}$(X-Y+1); $\frac{1}{2}$(-X+Y+1))

$\overrightarrow{N_1N_2}=(\frac{1}{2}(-X+Y-1);\frac{1}{2}(X+Y+1))$; $\overrightarrow{N_2N_3}=(1-Y;-X)$

N_1,N_2,N_3 thẳng hàng khi và chỉ khi (-X+Y-1)(-X)-(1-Y)(X+Y+1)=0 $\Leftrightarrow$ $X^2+Y^2=1$(1)

+ Tìm thêm điều kiện để N thỏa mãn tính chất b/. Chỉ cần xét N(X;Y) khác F(0;1).

Với điều kiện (1) đường thẳng d có phương trình X(x-X) +(1-Y)(y-0)=0

Tâm của (T) là I(0; $\frac{1}{2}$). Bán kính của (T) là $\frac{1}{2}$

+ d tiếp xúc (T) khi và chỉ khi $\frac{\left|X(0-X)+(1-Y)(\frac{1}{2})\right|}{\sqrt{X^2+(1-Y)^2}}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow (2X^2+Y-1)^2=X^2+Y^2-2Y+1$ (2)

+ Giải hệ (1) và (2): Rút X^2 từ (1) thay vào (2):

$(2Y^2-Y-1)^2=2(1-Y) \Leftrightarrow (Y-1)^2(2Y+1)^2=2(1-Y)$.Đang xét $Y\neq 1$ nên:$(Y-1)(2Y+1)^2=-2$

$4Y^3-3Y+1=0 \Leftrightarrow (Y+1)(4Y^2-4Y+1)=0 \Leftrightarrow Y=-1; Y=\frac{1}{2}$.

+ VớiY=-1 ta cóđiểm N(0;-1),đó là H

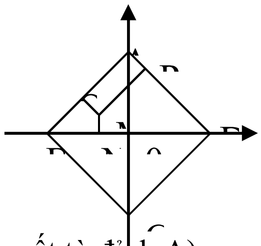
Với Y= $\frac{1}{2}$, ta có thêm hai điểm N là ($\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}$) và (-$\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}$)

Tập hợp phải tìm là ba đỉnh của tam giác đều nội tiếp trong đường tròn (EFGH) mà một đỉnh là H.

Câu 4. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ (Bảng A- Vòng 1)- năm học 2000-2001]

Cho hình vuông cố định. Tìm tập hợp những điểm M trong hình vuông đó và thỏa mãn điều kiện: Tích hai khoảng cách từ điểm M đến hai cạnh của hình vuông cùng xuất phát từ một đỉnh bằng bình phương khoảng cách từ điểm M đến đường chéo của hình vuông không đi qua đỉnh đó.

Câu 5. (2.0 điểm)



Không giảm tính tổng quát, xét hình vuông có cạnh $\sqrt{2}$.
Đặt hình vuông ABCD lên mặt phẳng có hệ trục tọa độ Oxy sao cho A(0;1), B(-1;0), C(0;-1), D(1;0).
Gọi M(x;y) là điểm ở trong hình vuông ABCD, hạ MN, MP, MQ lần lượt vuông góc với BD, DA, AB tại N, P, Q.
Do đó: MP.MQ = MN^2 (1) (xét 2 cạnh hình vuông phát xuất từ đỉnh A)
AB: x – y + 1 = 0,AD: x + y – 1 = 0.

(1) $\Leftrightarrow \frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}.\frac{|x+y+1|}{\sqrt{2}} = |y|^2 \Leftrightarrow |x^2-(y-1)^2| = 2y^2$

M(x;y) ở trong hình vuông nên x – y + 1 > 0, và x + y – 1 < 0.
Do đó: $x^2 - (y-1)^2 = (x-y+1)(x+y-1) < 0$ nên (1) $\Leftrightarrow x^2 - (y-1)^2 = -2y^2 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 2$

Vậy tập hợp các điểm M là cung BD, cung ¼ đường tròn C, bán kính R = $\sqrt{2}$.
Từ kết quả trên ta kết luận: Tập hợp các điểm M là 4 cung ¼ đường tròn tâm là các đỉnh của hình vuông và có bán kính bằng cạnh của hình vuông.

Câu 6. [Trường THPT DTNT Quế Phong- năm học 2008-2009]

Cho đường tròn (O) và điểm P nằm trong đường tròn đó. Một đường thẳng thay đổi đi qua P cắt (O) tại hai điểm A và **B.** Tìm quỹ tích điểm M sao cho $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$.

LOẠI 3. Tìm quỹ tích:

Câu 7. **[HỘI CÁC TRƯỜNG CHUYÊN VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÀO CAI TỈNH LÀO CAI]**

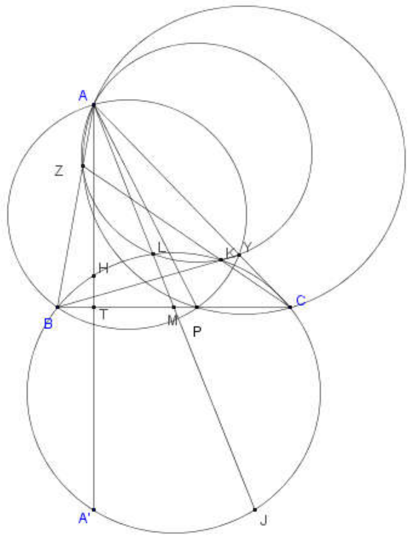
Cho ΔABC nhọn không cân, P là một điểm chuyển động trên đoạn thẳng BC (nhưng không trùng vào các đầu mút). Đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔABP giao AC tại Y khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔACP giao AB tại Z khác A. Gọi T là hình chiếu của A trên BC, H là trực tâm tam giác ΔABC. Gọi K là giao của BY và CZ. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua BC.

a) Chứng minh rằng A', P, K thẳng hàng

b) Chứng minh rằng tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔAYZ luôn thuộc một đường thẳng cố định khi P thay đổi.

Hướng dẫn giải

Kí hiệu (UVW) là đường tròn đi qua 3 điểm U,V,W



a) Ta có $\angle BYA = \angle BPA = 180^0 - \angle APC = 180^0 - \angle AZC$.

Suy ra $K \in (AYZ)$.

Suy ra $\angle YKC = \angle BAC = \angle YPC$ hay $K \in (CYP)$.

Từ đó $\angle KPC = \angle KYA = \angle APB = \angle A'PB$ hay A', P, K thẳng hàng

b) Gọi M là trung điểm BC, AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔBHC tại J sao cho A và J khác phía với BC. AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔAYZ tại L khác **A.**

Do K thuộc tròn ngoại tiếp tam giác ΔAYZ nên $\angle BKC = 180^0 - \angle BAC = \angle BHC$

Suy ra $K \in (BHC)$.

Lại có (ABC) và (BHC) đối xứng nhau qua BC nên $A' \in (BHC)$, $AM = MJ$.

Từ đó $TM \parallel A'J$. Ta thu được $\angle KLJ = \angle AYB = \angle APB = \angle BPA' = \angle KA'J$

($\angle BPA' = \angle KA'J$ vì $\angle BPA'$ bằng nửa tổng số đo cung A’B và KC của (BHC) nhưng vì $TM \parallel A'J$ nên số đo cung A’B bằng số đo cung JC của (BHC). Do đó $\angle BPA'$ bằng nửa tổng số đo cung KCJ của (BHC), do đó bằng $\angle KA'J$)

Vì vậy $L \in (BHC)$. Do $\angle HA'J = 90^0 \Rightarrow \angle HLJ = 90^0$

Vậy (AYZ) luôn đi qua giao điểm L của trung tuyến ứng với đỉnh A của (BHC) hay hình chiếu của trực tâm H trên AM.

Do đó tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔAYZ luôn thuộc đường thẳng trung trực của đoạn AL cố định khi P thay đổi.

Câu 8. **[Đề ôn thi đội tuyển Festival. Đề số 2]**

Cho Đường thẳng d và hai điểm O, O' cố định nằm trên d, M là điểm di động trên d. Các đường tròn có tâm là O, O' và cùng đi qua M cắt nhau tại N (khác M). Tìm tập hợp điểm N

Câu 9. Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm S ở trong đường tròn. Xét tất cả các góc vuông đỉnh S: gọi giao điểm của hai cạnh góc vuông với đường tròn là A, B. Tìm tập hợp trung điểm M của AB.

Hướng dẫn giải

Ta có $MI^2 = \dfrac{MS^2 + MO^2}{2} - \dfrac{SO^2}{4} = \dfrac{MS^2 + MO^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$

Mặt khác $P_{M/(O)} = MA.MB = R^2 - MO^2$ mà $MA = MB = SM$