## CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM

**Bài 1.** Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=xy(x^2-y^2) \text{ với } x,y\in\mathbb{R}.$$

Tính $f(0)$ và chứng minh $f$ là hàm số lẻ.

Tìm tất cả các hàm số $f$.

**Hướng dẫn giải**

Tính $f(0)$ và chứng minh $f$ là hàm số lẻ.

Với $x=y=1$ thì $-2f(0)=0$ hay $f(0)=0$. (1)

$\forall y\in\mathbb{R}\Rightarrow -y\in\mathbb{R}$

Với $y=0$ thì $f(0)=f(-0)=0$ (do (1))

Với $\begin{cases}x=0\\ y\neq 0\end{cases}$ thì $-yf(y)-yf(-y)=0$ hay $f(-y)=-f(y)$

Vậy $f$ là hàm số lẻ.

Tìm tất cả các hàm số $f$.

Đặt $\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}$ ta suy ra $\begin{cases}x=\dfrac{u+v}{2}\\ y=\dfrac{u-v}{2}\end{cases}$

Khi đó $v\,f(u)-u\,f(v)=uv\dfrac{u^2-v^2}{4}$ (2)

Với $\begin{cases}u\neq 0\\ v\neq 0\end{cases}$

Từ (2) ta được $\dfrac{f(u)}{u}-\dfrac{f(v)}{v}=\dfrac{u^2-v^2}{4}$ hay $\dfrac{f(u)}{u}-\dfrac{u^2}{4}=\dfrac{f(v)}{v}-\dfrac{v^2}{4}$.

Chọn $v=1$, ta có $\dfrac{f(u)}{u}-\dfrac{u^2}{4}=f(1)-\dfrac{1}{4}$.

Đặt $a=f(1)-\dfrac{1}{4}$

Ta có $\dfrac{f(u)}{u}-\dfrac{u^2}{4}=a,\forall u\neq 0$. (3)

Suy ra $f(x)=\dfrac{x^3}{4}+ax,\forall x\neq 0$

Từ (1), (3) ta được $f(x)=\dfrac{x^3}{4}+ax,\forall x\in\mathbb{R}$.

Thử lại

Với $f(x)=\dfrac{x^3}{4}+ax$, ta có: $f(0)=0; f(1)=\dfrac{1}{4}+a\Leftrightarrow a=f(1)-\dfrac{1}{4}$

và $(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=xy(x^2-y^2)$

Vậy $f(x)=\dfrac{x^3}{4}+ax,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

**Bài 2.** Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn:

$\frac{1}{3}f(xy)+\frac{1}{3}f(xz)-f(x)f(yz)\ge\frac{1}{9},\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ .

**Hướng dẫn giải**

Cho $x=y=z=0$ thì $\frac{1}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(0)-f^2(0)\ge\frac{1}{9}\Leftrightarrow\left(f(0)-\frac{1}{3}\right)^2\le 0\Leftrightarrow f(0)=\frac{1}{3}$

Cho $x=y=z=1$ thì $\frac{1}{3}f(1)+\frac{1}{3}f(1)-f^2(1)\ge\frac{1}{9}\Leftrightarrow\left(f(1)-\frac{1}{3}\right)^2\le 0\Leftrightarrow f(1)=\frac{1}{3}$

Cho $y=z=0$ thì $\frac{2}{3}f(0)-f(x)f(0)\ge\frac{1}{9}$.

Do $f(0)=\frac{1}{3}$ nên $f(x)\le\frac{1}{3},\forall x\in\mathbb{R}$ . (1)

Cho $y=z=1$, ta có $\frac{1}{3}f(x)+\frac{1}{3}f(x)-f(x)f(1)\ge\frac{1}{9}$.

Do $f(1)=\frac{1}{3}$ nên $f(x)\ge\frac{1}{3},\forall x\in\mathbb{R}$ . (2)

Từ (1) và (2) ta được $f(x)=\frac{1}{3},\forall x\in\mathbb{R}$ .

**Bài 3.** Tìm tất cả các hàm số $f:R\to R$, biết rằng $f$ là hàm số chẵn và thỏa mãn:

$f(xy)-f(x)f(y)=2014\left(f(x+y)-2xy-1\right)$ với mọi $x,y\in R$.

**Hướng dẫn giải**

Từ (1) cho $y=0$, ta có:

$f(0)-f(x).f(0)=2014\left(f(x)-1\right)\Leftrightarrow\left(f(x)-1\right)\left(f(0)+2014\right)=0$ với mọi $x\in R$

Nếu $f(0)\ne-2014$ thì $f(x)=1$ với mọi $x\in R$. Khi đó $f$ không thỏa mãn (1)

Do đó $f(0)=-2014$

Từ (1) thay $x$ bởi $x$ và $y$ bởi $x$, ta được:

$f(x^2)-\left(f(x)\right)^2=2014\left(f(2x)-2x^2-1\right)$ (2)

Từ (1) thay $x$ bởi $x$ và $y$ bởi $-x$, ta được:

$f(-x^2)-f(x)f(-x)=2014\left(f(0)+2x^2-1\right)$ (3)

Vì $f$ là hàm số chẵn nên viết (3) lại như sau:

$f(x^2)-\left(f(x)\right)^2=2014\left(f(0)+2x^2-1\right)$ (4)

Lấy (4) trừ (2) vế theo vế ta được:

$f(2x)=4x^2+f(0)$ với mọi $x\in R$

Suy ra: $f(x)=x^2+f(0)=x^2-2014$ với mọi $x\in R$.

**Bài 4.** Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn

$f(x^2+y^2)=xf(x)+yf(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$ (1).

**Hướng dẫn giải**

Cho $x=0$, từ $(1)$ suy ra $f(y^2)=yf(y),\forall y\in\mathbb{R}$

Cho $y=0$, từ $(1)$ suy ra $f\left(x^2\right)=xf\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}$ .

Do đó (1) trở thành:

$$f\left(x^2+y^2\right)=f\left(x^2\right)+f\left(y^2\right),\forall x,y\in\mathbb{R} \Rightarrow f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right),\forall x,y\geq 0 \quad (*)$$

thay $y$ bởi $-y$ từ $(1)$ ta được :

$$f\left(x^2+y^2\right)=xf\left(x\right)-yf\left(-y\right)\Rightarrow -yf\left(-y\right)=yf\left(y\right),\forall y\in\mathbb{R} \Rightarrow f\left(-x\right)=-f\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}$$

$-yf\left(-y\right)=yf\left(y\right),\forall y\in\mathbb{R} \Rightarrow f\left(-x\right)=-f\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}$ , chứng tỏ $f$ là hàm số lẻ.

Do đó với mọi $x\geq 0, y\leq 0$ ta có

$$f\left(x-y\right)=f\left(x+\left(-y\right)\right)=f\left(x\right)+f\left(-y\right)=f\left(x\right)-f\left(y\right)$$

$$\Rightarrow f\left(x\right)=f\left(x-y\right)+f\left(y\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\left(x-y\right)+y\right)=f\left(x-y\right)+f\left(y\right)$$

$$\Rightarrow f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right),\forall x\geq 0,\forall y\leq 0 \quad (**)$$

Với mọi $x\leq 0, y\leq 0$ ta có

$$f\left(x+y\right)=-f\left(-x-y\right)=-\left(f\left(-x\right)+f\left(-y\right)\right)=-\left(-f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right) \quad (***)$$

Kết hợp $(*),(**),(***)$ và ta được $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right),\forall x,y\in\mathbb{R}$ .

tính $f\left(\left(x+1\right)^2\right)$ theo hai cách. Ta có

$$\begin{aligned}
&f\left(\left(x+1\right)^2\right)=f\left(x^2+2x+1\right)\\
&\Leftrightarrow \left(x+1\right)f\left(x+1\right)=f\left(x^2\right)+f\left(2x\right)+f\left(1\right)\\
&\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(f\left(x\right)+f\left(1\right)\right)=xf\left(x\right)+2f\left(x\right)+f\left(1\right)\\
&\Leftrightarrow f\left(x\right)=xf\left(1\right),\forall x\in\mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow f\left(x\right)=ax,\forall x\in\mathbb{R},a\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

**Bài 5.** Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x+xy+f(y))=\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)\left(f(y)+\frac{1}{2}\right),\forall x,y\in\mathbb{R} .$$

**Hướng dẫn giải**

Dễ thấy hàm $f$ hằng không thỏa mãn. Ta xét $f$ không hằng.

$$f(x+xy+f(y))=\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)\left(f(y)+\frac{1}{2}\right),\forall x,y\in\mathbb{R} \quad (1)$$

Trong (1) cho y=-1 ta được: $f(f(-1))=\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)\left(f(-1)+\frac{1}{2}\right),\forall x\in\mathbb{R} \quad (2)$

Rõ ràng nếu $f(-1)+\frac{1}{2}\neq 0$ thì $f$ là hàm hằng. Do đó: $f(-1)+\frac{1}{2}=0\Rightarrow f(-1)=-\frac{1}{2}$

Ta sẽ chứng minh: $f(x)+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow x=-1$.

Thật vậy, giả sử tồn tại $a\neq -1$ sao cho $f(a)=\frac{-1}{2}$.

Trong (1) chọn $y=a$ ta có: $f(ax+x-\frac{1}{2})=0, \forall x\in\mathbb{R}$ .

Mâu thuẫn vì $f$ không là hàm hằng. Do đó ta có: $a=-1$.

Chú ý là $f(-1)=-\frac{1}{2}$ nên từ (2) ta có : $f(\frac{-1}{2})=0$.

Trong (1) chọn $x=\dfrac{-\frac{1}{2}-f(y)}{1+y}$ , $(y\neq -1)$ ta được:

$$f\left(\frac{-\frac{1}{2}-f(y)}{1+y}+\frac{-\frac{1}{2}-f(y)}{1+y}.y+f(y)\right)=\left(f\left(\frac{-\frac{1}{2}-f(y)}{1+y}\right)+\frac{1}{2}\right)\left(f(y)+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(f\left(\frac{-\frac{1}{2}-f(y)}{1+y}\right)+\frac{1}{2}\right)\left(f(y)+\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=0, \forall y\neq -1$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{-\frac{1}{2}-f(y)}{1+y}\right)=-\frac{1}{2}, \forall y\neq -1 \Leftrightarrow \frac{-\frac{1}{2}-f(y)}{1+y}=-1, \forall y\neq -1$$

Suy ra $f(y)=y+\frac{1}{2}, \forall y\neq -1$

Do $f(-1)=-\frac{1}{2}$ nên $f(x)=x+\frac{1}{2}, \forall x\in\mathbb{R}$ .

Thử lại ta có hàm số cần tìm là $f(x)=x+\frac{1}{2}, \forall x\in\mathbb{R}$ .

**Bài 6.** Tìm tất cả các hàm f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn:

$$f\big(f(x)+y\big)=f\big(x^4-y\big)+8yf(x)\Big(\big(f(x)\big)^2+y^2\Big), \forall x,y\in\mathbb{R} .$$

**Hướng dẫn giải**

Từ giả thiết: $f\big(f(x)+y\big)=f\big(x^4-y\big)+8yf(x)\Big(\big(f(x)\big)^2+y^2\Big), \forall x,y\in\mathbb{R}$ (1)

Thay y = x$^4$ vào (1): $f\big(f(x)+x^4\big)=f(0)+8x^4f(x)\big(f^2(x)+x^8\big), \forall x\in\mathbb{R}$ (2)

Thay y = -f(x) vào (1): $f(0)=f\big(x^4+f(x)\big)-8f^2(x)\big(f^2(x)+f^2(x)\big), \forall x\in\mathbb{R}$ (3)

Từ (2) và (3) ta có: $16f^4(x)=8x^4f(x)\big(f^2(x)+x^8\big), \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \big(f(x)-x^4\big)f(x)\left(f^2(x)+\frac{3}{4}x^8+\left(f(x)+\frac{1}{2}x^4\right)^2\right)=0, \forall x\in\mathbb{R} \quad (4)$$

Thay x = 0 vào (4) suy ra f(0) = 0.

Giả sử tồn tại a ≠ 0 sao cho f(a) = 0. Ta chứng minh f(x) = 0, ∀x ∈ ℝ

Thay x = 0 và y tuỳ ý vào (1), ta được f(y) = f(-y).

Thay x = a và y tuỳ ý vào (1), ta được f(y) = f($a^4$ – y).

Suy ra: $f\left(y\right)=f\left(-y\right)=f\left(a^4-y\right)=f\left(y-a^4\right),\forall y\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(-f\left(x\right)\right)=f\left(a^4+f\left(x\right)\right),\forall x\in\mathbb{R} \qquad (5)$$

và $f\left(y^4\right)=f\left(y^4-a^4\right),\forall y\in\mathbb{R}$ (6)

Thay y = 0 và x tuỳ ý vào (1), ta được $f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x^4\right)$ (7)

Thay y = $a^4$ vào (1), ta được

$$f\left(f\left(x\right)+a^4\right)=f\left(x^4-a^4\right)+8a^4f\left(x\right)\left(f^2\left(x\right)+a^8\right),\forall x\in\mathbb{R} \qquad (8)$$

Từ (5), (6), và (8) suy ra: $f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x^4\right)+8a^4f\left(x\right)\left(f^2\left(x\right)+a^8\right),\forall x\in\mathbb{R}$ (9)

Từ (7) và (9): $8a^4f\left(x\right)\left(f^2\left(x\right)+a^8\right)=0\Rightarrow f\left(x\right)=0,\forall x\in\mathbb{R}$

Và từ (4), nếu ∃$x_0$ ∈R: f($x_0$) ≠ 0 ⇒ f(x) = $x^4$, ∀x ∈ R

Thử lại, ta thấy f(x) = 0 và f(x) = $x^4$ là nghiệm của phương trình.

**Bài 7.** Tìm tất cả các hàm số f: $R\to R$ thoả mãn

$$f(xf(y)+y)+f(xy+x)=f(x+y)+2013xy \ (1).$$

**Hướng dẫn giải**

Thay $x=1, y=\dfrac{1}{2013}$ vào (1) ta được: $f(a)=1$

Trong đó $a=f(\dfrac{1}{2013})+\dfrac{1}{2013}$

Tiếp tục thay y = a vào (1), ta thu được:

$$f(x+a)+f(xa+x)=f(x+a)+2013ax,\forall x\in R$$

hay $f(ax+x)=2013ax,\forall x\in R$ (2)

Từ (2) suy ra $a\neq -1$. Thay $x=\dfrac{t}{a+1}$ vào (2), ta được

$$f(t)=\frac{2013at}{a+1},\forall t\in R \text{ hay } f(t)=ct,(c\in R)$$

Tiếp theo, thay biểu thức của f(t) vào (1), ta thu được đẳng thức

$$c^2xy+cy+cxy+cx=cx+cy+2013xy;\forall x,y\in R$$

$$\Leftrightarrow (c^2+c-2013)xy=0, \forall x,y\in R$$

$$\Leftrightarrow c^2+c-2013=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=\dfrac{-1-\sqrt{8053}}{2} \\ c=\dfrac{-1+\sqrt{8053}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy ta nhận được hai hàm số thoả mãn đề bài là $f(x)=\dfrac{-1+\sqrt{8053}}{2}x$ và $f(x)=\dfrac{-1-\sqrt{8053}}{2}x$

**Bài 8.** Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x+y+f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(x\right)\right)+2y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

**Hướng dẫn giải**

Chứng minh *f* là đơn ánh

Thật vậy, với mọi *x, y* thỏa mãn $f\left(x\right)=f\left(y\right)$ ta có

$$\begin{cases} f\left(x+y+f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(x\right)\right)+2y \\ f\left(x+y+f\left(x\right)\right)=f\left(f\left(y\right)\right)+2x \end{cases} \Rightarrow x=y$$

Chọn $y=0$ ta được $f\left(x+f\left(0\right)\right)=f\left(f\left(x\right)\right)\Rightarrow f\left(x\right)=x+f\left(0\right),\forall x\in\mathbb{R}$

Vậy $f\left(x\right)=x+c,\forall x\in\mathbb{R}$ với *c* là hằng số.

Thay vào điều kiện bài toán ta được

$x+y+f\left(y\right)+c=f\left(x\right)+c+2y \Leftrightarrow x+y+y+2c=x+2c+2y$ (luôn đúng).

**Bài 9.** Tìm tất cả các hàm $f:R\to R$ thỏa mãn: $f\left[xf(y)+2015x\right]=2015xy+f(x)$ với mọi *x, y*.

**Hướng dẫn giải**

Cho x = 1 thì $f\left[f(y)+2015\right]=2015y+f(1)$

Chọn y thỏa mãn $2015y+f(1)=-2015$, và đặt $t=f(y)+2015$ thì $f(t)=-2015$.

Chọn y = t, và thay vào giả thiết thì: $f\left[xf(t)+2015x\right]=2015xt+f(x)$

Hay: $f(0)=2015xt+f(x)\leftrightarrow f(x)=-2015tx+f(0)\ \forall x$

Vậy $f(x)$ là hàm bậc nhất.

Giả sử $f(x)=mx+n$. Thay vào giả thiết ta có:

$$m\left[xf(y)+2015x\right]+n=2015xy+mx+n$$

$$\leftrightarrow mx(my+n)+2015mx+n=2015xy+mx+n$$

$$\leftrightarrow m^2xy+\left(mn+2015m\right)x=2015xy+mx$$

Đẳng thức trên đúng với mọi x, y nên:

$$\begin{cases} m^2=2015 \\ mn+2015m=m \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} m=\pm\sqrt{2015} \\ n=-2014 \end{cases}$$

Vậy có 2 hàm thỏa mãn yêu cầu, là $f(x)=\pm\sqrt{2015}x-2014$.

**Bài 10.** Tìm tất cả các hàm f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn:

$$f\left(f\left(x\right)+y\right)=f\left(x^4-y\right)+8yf\left(x\right)\left(\left(f\left(x\right)\right)^2+y^2\right),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

**Hướng dẫn giải**

Từ giả thiết: $f\left(f(x)+y\right)=f\left(x^4-y\right)+8yf(x)\left(\left(f(x)\right)^2+y^2\right),\forall x,y\in\mathbb{R}$ (1)

Thay y = $x^4$ vào (1): $f\left(f(x)+x^4\right)=f(0)+8x^4f(x)\left(f^2(x)+x^8\right),\forall x\in\mathbb{R}$ (2)

Thay y = -f(x) vào (1): $f(0)=f\left(x^4+f(x)\right)-8f^2(x)\left(f^2(x)+f^2(x)\right),\forall x\in\mathbb{R}$ (3)

Từ (2) và (3) ta có: $16f^4(x)=8x^4f(x)\left(f^2(x)+x^8\right),\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\left(f(x)-x^4\right)f(x)\left(f^2(x)+\frac{3}{4}x^8+\left(f(x)+\frac{1}{2}x^4\right)^2\right)=0,\forall x\in\mathbb{R} \quad (4)$$

Thay x = 0 vào (4) suy ra f(0) = 0.

Giả sử tồn tại $a\neq 0$ sao cho f(a) = 0. Ta chứng minh f(x) = 0, $\forall x\in\mathbb{R}$

Thay x = 0 và y tuỳ ý vào (1), ta được f(y) = f(-y).

Thay x = a và y tuỳ ý vào (1), ta được f(y) = f($a^4$ – y).

Suy ra: $f(y)=f(-y)=f\left(a^4-y\right)=f\left(y-a^4\right),\forall y\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow f\left(f(x)\right)=f\left(-f(x)\right)=f\left(a^4+f(x)\right),\forall x\in\mathbb{R} \quad (5)$$

và $f\left(y^4\right)=f\left(y^4-a^4\right),\forall y\in\mathbb{R}$ (6)

Thay y = 0 và x tuỳ ý vào (1), ta được $f\left(f(x)\right)=f\left(x^4\right)$ (7)

Thay y = $a^4$ vào (1), ta được

$$f\left(f(x)+a^4\right)=f\left(x^4-a^4\right)+8a^4f(x)\left(f^2(x)+a^8\right),\forall x\in\mathbb{R} \quad (8)$$

Từ (5), (6), và (8) suy ra: $f\left(f(x)\right)=f\left(x^4\right)+8a^4f(x)\left(f^2(x)+a^8\right),\forall x\in\mathbb{R}$ (9)

Từ (7) và (9): $8a^4f(x)\left(f^2(x)+a^8\right)=0\Rightarrow f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$

Và từ (4), nếu $\exists x_0\in R$: $f(x_0)\neq 0\Rightarrow f(x)=x^4,\forall x\in R$

Thử lại, ta thấy f(x) = 0 và f(x) = $x^4$ là nghiệm của phương trình.

**Bài 11.** Kí hiệu $\mathbb{N}^*$ là tập hợp các số nguyên dương. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn đẳng thức:

$$f\left(f^2(m)+2f^2(n)\right)=m^2+2n^2,\text{ với mọi } m,n\in\mathbb{N}^*.$$

**Hướng dẫn giải**

Nếu $m_1,m_2\in\mathbb{N}^*$ sao cho $f(m_1)=f(m_2)\Rightarrow$

$$f\left(f^2(m_1)+2f^2(n)\right)=f\left(f^2(m_2)+2f^2(n)\right)\Rightarrow m_1^2+2n^2=m_2^2+2n^2,$$