CHUYÊN ĐỀ ÔN THI HSG TOÁN 11

Câu 1. Ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá *x*. Giải phương trình

$$x^2-(1+[x])x+2015=0.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $x\neq 0.$

$$\text{pt}\Leftrightarrow [x]=\frac{x^2-x+2015}{x}\Leftrightarrow \text{x}-1<\frac{x^2-x+2015}{x}\le \text{x}\Leftrightarrow \text{x}\ge 2015.$$

$[x]=a\in \mathbb{Z}\ \ (a\ge 2015)\Rightarrow x^2-(a+1)x+2015=0$

$$\Leftrightarrow x=\frac{a+1\pm\sqrt{(a+1)^2-8060}}{2}\ \ (*)$$

$Do\ a\ge 2015\Rightarrow x^2-(a+1)x+2015=0$

$$\Leftrightarrow x=\frac{a+1+\sqrt{(a+1)^2-8060}}{2}\ge 2015\ \ (\text{t/ m});$$

$$\frac{a+1-\sqrt{(a+1)^2-8060}}{2}\le\frac{a+1-\sqrt{(a+1)^2-4a}}{2}<2015\ (loai)$$

Vậy $S=\left\{\frac{a+1+\sqrt{(a+1)^2-8060}}{2};a\in\mathbb{Z};a\ge 2015\right\}$

Câu 2. Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn điều kiện

$$P(P(x)+x)=P(x)P(x+1),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Hướng dẫn giải

Giả sử $\deg P(x)=n$. So sánh bậc của *x* trong hai vế của (1) ta được

$$n^2=2n\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=0\\ n=2\end{array}\right..$$

Khi $n=0$ ta được đa thức hằng $P(x)=c$. Thay vào (1) ta được $c=c^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=0\\ c=1\end{array}\right.$.

Vậy $P(x)=0$ và $P(x)=1$ là các đa thức hằng thỏa mãn yêu cầu.

Khi $n=2$ ta giả sử $P(x)=ax^2+bx+c$ với $a\neq 0$.

So sánh hệ số cao nhất trong (1) ta được $a^3=a^2$. Do $a\neq 0$ nên ta có $a=1$.

Vậy ta có $P(x)=x^2+bx+c$. Thế vào (1) kiểm tra thấy thỏa mãn.

Kết luận: $P(x)=0$, $P(x)=1$ và $P(x)=x^2+bx+c$.

Câu 3. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho (n - 1)! không chia hết cho n^2.

Hướng dẫn giải

Nhận xét rằng khi n là số nguyên tố thì do (n - 1) < n nên (n - 1)! hiển nhiên không chia hết cho n, và do đó không chia hết cho n^2.

Ta sẽ tìm n không nguyên tố thỏa (n - 1)! không chia hết cho n^2.

Ta có: $(n-1)!\not\vdots\, n^2 \Leftrightarrow n!\not\vdots\, n^3$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi tồn tại ít nhất một ước số p của n sao cho bậc của p (số mũ lũy thừa của p trong phân tích thừa số nguyên tố) trong n! là bé hơn bậc của p trong n^3

Giả sử $n = p^t.k$ (với (p, k)=1). Theo lí luận trên ta có bất đẳng thức:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots<3t \quad (*)$$

Suy ra: $3t \ge \left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^t}\right] \Leftrightarrow 3t \ge k.(p^{t-1}+p^{t-2}+\ldots+1)$

$\Leftrightarrow 3t \ge \dfrac{k(p^t-1)}{p-1}$ (**). Suy ra: $3t \ge \dfrac{1.(2^t-1)}{2-1} = 2^t - 1 \Rightarrow t \in \{1,2,3\}$

Ta xét 3 trường hợp và dùng các phép thử lại để làm rõ kết quả bài toán

• **TH1**: t = 1. Ta có: (**) $\Rightarrow 3 \ge k$. Suy ra $k=2$ hoặc $k=3$ (Do $k=1$ thì n trở thành số nguyên tố)

+ Với k = 2: $n = 2p$ (p nguyên tố).

Thử lại: p = 2 thì n = 4 (thỏa); $p \ne 2$: (*) $\Leftrightarrow \left[\frac{2p}{p}\right]+\left[\frac{2p}{p^2}\right]+\ldots<3 \Leftrightarrow 2<3$ (đúng)

+ Với k = 3: $n = 3p$ (p nguyên tố)

Thử lại: p = 2 thì n = 6 (thỏa); p = 3 thì n = 9 (thỏa); $p \ge 5$:

(*) $\Leftrightarrow \left[\frac{3p}{p}\right]+\left[\frac{3p}{p^2}\right]+\ldots<3 \Leftrightarrow 3<3$ (sai)

• **TH2**: t = 2. Ta có (**) $\Rightarrow 6 \ge k(p+1)$. Suy ra $k=1$ hoặc $k=2$ (Do $(p+1)\ge 3$)

+ Với k = 1, ta được $(p+1)\le 6 \Rightarrow p\in\{2,3,5\} \Rightarrow n \in \{4,9,25\}$.

Thử lại ta chọn: n = 4, n = 9.

+ Với k = 2, ta được $(p+1)\le 3 \Rightarrow p=2 \Rightarrow n=8$.

Thử lại ta thấy n = 8 thỏa mãn.

• **TH3**: t = 3. Ta có (**) $\Rightarrow 9 \ge k(p^2+p+1)$.

Suy ra $k=1$ (Do $p^2+p+1)\ge 7$)

+ Với k = 1, ta được $(p^2+p+1)\le 9 \Rightarrow p=2 \Rightarrow n=8$ (thỏa)

Vậy tập tất cả các giá trị của số tự nhiên n thỏa $(n-1)!\not\vdots\, n^2$ là $\{p, 2p, 8, 9\}$ với p nguyên tố.

Câu 4. Cho $2k+1$ số nguyên lẻ $a_0, a_1, \cdots, a_{2k}$ ($k \in \mathbb{N}$). Chứng minh rằng phương trình $a_{2k}x^{2k}+a_{2k-1}x^{2k-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ không có nghiệm hữu tỷ.

Hướng dẫn giải

Giả sử phương trình $a_{2k}x^{2k}+a_{2k-1}x^{2k-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ (1) có nghiệm hữu tỷ $x=\dfrac{p}{q}$, $(p,q)=1$.

Thay $x=\dfrac{p}{q}$ vào (1) ta có $a_{2k}p^{2k}+a_{2k-1}p^{2k-1}q+\cdots+a_1pq^{2k-1}+a_0q^{2k}=0$ (2)

Suy ra $a_{2k}p^{2k}\,\vdots\, q$, vì $(p,q)=1$ nên $a_{2k}\,\vdots\, q$.

Tương tự ta có $a_0\,\vdots\, p$.

Vì a_{2k}, a_0 là những số lẻ nên p,q lẻ.

Vế trái của (1) là tổng của $2k+1$ số lẻ vì vậy đẳng thức (1) không xảy ra nên phương trình không có nghiệm hữu tỷ.

Câu 5. Cho tập S gồm tất cả các số nguyên trên trong đoạn $[1;2014]$. Gọi T là tập hợp gồm tất cả các tập con không rỗng của S. Với mỗi tập hợp $X\in T$, ký hiệu $m(X)$ là trung bình cộng của tất cả các số thuộc X. Đặt $m=\dfrac{\sum m(X)}{|T|}$ (ở đây tổng được lấy theo tất cả các tập hợp $X\in T$).

Hãy tính giá trị của *m*.

Hướng dẫn giải

Với mỗi $x\in[1,2,...,2014]$, đặt $m_k=\sum m(\mathrm{X})$ ở đây tổng được lấy theo tất cả các tập hợp $X\in T$ mà $|X|=k$.

Xét số a bất kỳ thuộc S, suy ra *a* có mặt trong C_{2013}^{k-1} tập $X\in T$ mà $|X|=k$.

Suy ra $km_k=(1+2+...+2014)C_{2013}^{k-1}=1007.2015.C_{2013}^{k-1}$

Do đó $\sum m(\mathrm{X})=\sum_{k=1}^{2014}m_k=1007.2015\sum_{k=1}^{2014}\left(\dfrac{C_{2013}^{k-1}}{k}\right)=\dfrac{2015}{2}\sum_{k=1}^{2014}C_{2014}^{k}=\dfrac{2015}{2}\sum_{k=1}^{2014}C_{2014}^{k}$

$=\dfrac{2015}{2}(2^{2014}-1)$

Mà $|T|=(2^{2015}-1)\Rightarrow m=\dfrac{2015}{2}$

Cách 2. Xây dựng song ánh từ T vào T như sau

$\forall X\in T\Rightarrow f(X)=\{2015\text{-}x\,/\,x\in X\}\Rightarrow m(X)+m(f(X))=2015$

Suy ra $2\sum m(\mathrm{X})=\sum[m(\mathrm{X})]+m(\mathrm{f(X)})=|\mathrm{T}|.2015$

Suy ra $m=\dfrac{\sum m(\mathrm{X})}{|\mathrm{T}|}=\dfrac{2015}{2}$

Câu 6. Tìm tất cả các số nguyên dương k để phương trình $x^2+y^2-kxy+x+y=0$ có nghiệm nguyên dương. Giải phương trình nghiệm nguyên dương với k nhỏ nhất tìm được.

Hướng dẫn giải

Tìm k (dùng kĩ thuật pt Markov).

+) Gọi k là một giá trị thỏa mãn. Với k đó, gọi (a,b) là nghiệm nguyên dương của pt đã cho sao cho $a+b$ nhỏ nhất. KMTTQ coi $a\geq b$.

Khi đó ta có đẳng thức $a^2-(kb-1)a+b^2+b=0$.

+) Xét pt bậc 2: $x^2-(kb-1)x+b^2+b=0$, dễ thấy pt có 1 nghiệm $x_1=a$, nên có nghiệm $x_2=a'$, với $a+a'=kb-1$ (1) và $a.a'=b^2+b$ (2).

Do a,b,k đều nguyên dương nên 2 đẳng thức trên chứng tỏ a' cũng nguyên dương. Điều đó suy ra (a',b) cũng là một nghiệm nguyên dương của pt đã cho, do tính "nhỏ nhất" của (a,b) nên $a'\geq a$.

Kết hợp (2) được $a^2\leq a.a'=b^2+b.$

Lại có $a\geq b$ nên $b^2\leq a^2\leq b^2+b<(b+1)^2$, suy ra $a^2=b^2$ hay $a=b$.

+) Kết hợp (1)(2) được $k=2+\dfrac{2}{a}$ là nguyên dương, từ đây $a=1$ hoặc 2, tương ứng k chỉ có thể là 3 hoặc 4.

+)**(1đ)** Giải pt

Với k=3 là giá trị nhỏ nhất tìm được, pt cần giải tương đương

$x^2-(3y-1)x+y^2+y=0$

Để pt có nghiệm nguyên thì biệt thức là số chính phương hay

$5y^2-10y+1=t^2 \iff t^2-5(y-1)^2=-4$.

Bằng cách giải pt kiểu Pell ta được nghiệm (t,y) thỏa mãn

$t+(y-1)\sqrt{5}=(u+v\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})^n$ tương ứng với 3 nghiệm riêng (u,v)=(1,1), (4,2), (11,5) trong đó $n\in N^*$ (để thỏa mãn y nguyên dương)

Từ đó ta có công thức cụ thể cho giá trị y của nghiệm (x,y) (tất nhiên nguyên dương), còn giá trị $x=(3y-1+t)/2$ (đảm bảo là số nguyên dương).

Câu 7. Cho đa thức $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ với hệ số thực. Chứng minh rằng nếu tất cả các nghiệm của $P(x)$ là số thực và phân biệt thì $a_i^2>\dfrac{n-i+1}{n-i}.\dfrac{i+1}{i}a_{i-1}a_{i+1}, \forall i=1,2,...,n-1$.

Hướng dẫn giải

Xét đa thức $Q(y)=y^nP(y^{-1})$ có tất cả các nghiệm là số thực và phân biệt. Hơn nữa phương trình bậc 2 $Q^{(n-2)}(y)=(n-2)(n-3)...4.3\left(n(n-1)a_ny^2+2(n-1)a_{n-1}y+2a_{n-2}\right)$ cũng có các nghiệm thực phân biệt, suy ra $\Delta=(n-1)^2a_{n-1}^2-2n(n-1)a_na_{n-2}>0$

Với $i=n-1$ thì (1) đúng, cũng có nghĩa mọi đa thức thỏa mãn đề bài thì hệ số của x thỏa mãn (1).

Với mỗi $i=1,2,...,n-2$, xét đa thức $P^{(n-i-1)}(x)=b_0x^{i+1}+b_1x^i+...+b_{i+1}x^2+b_ix+b_{i-1}$ cũng có tất cả các nghiệm là số thực và phân biệt.

Áp dụng BĐT cho b_i ta có $b_i^2>\dfrac{2(i+1)}{i}b_{i-1}b_{i+1}$.

Trong đó $b_{i+1}=(n-i+1)...4.3a_{i+1}, b_i=(n-i)...3.2a_i$, $b_{i-1}=(n-i-1)...2.1a_{i-1}$

Suy ra $\left((n-i)...3.2a_i\right)^2>\dfrac{2(i+1)}{i}(n-i-1)...2.a_{i-1}(n-i+1)...4.3a_{i+1}$

Hay $a_i^2 > \frac{(i+1)(n-i+1)}{i(n-i)} a_{i-1}a_{i+1}$

Ta có điều phải chứng minh.

Câu 8. Cho dãy số $(a_n): a_1 \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = a_n^3 + 2019, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh có nhiều nhất 1 số hạng của dãy là số chính phương.

Hướng dẫn giải

So sánh đồng dư của a_n, a_{n+1} và a_{n+2} theo modun 4 ta có (chú ý $2019 \equiv 3 (\bmod 4)$)

a_n	0	1	2	3
a_{n+1}	3	0	3	2
a_{n+2}	2	3	2	3

Một số chính phương khi chia 4 có số dư là 0 hoặc 1.

Vì vậy từ số hạng thứ 3 trở đi, dãy không có số chính phương nào.

Nếu cả a_1 và a_2 đều chính phương, giả sử $a_1 = a^2, a_2 = b^2$,

suy ra $b^2 = a^6 + 2019 \Leftrightarrow (b-a^3)(b+a^3) = 2019$

hơn nữa khi phân tích 2019 thành tích chỉ có 2 cách $2019 = 1.2019 = 3.673$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} b-a^3 = 1 \\ b+a^3 = 2019 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1010 \\ a^3 = 1009 \end{cases}$, vô lí do 1009 không là lập phương.

Trường hợp 2: $\begin{cases} b-a^3 = 3 \\ b+a^3 = 673 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 338 \\ a^3 = 335 \end{cases}$, vô lí do 335 không là lập phương.

Vậy điều giả sử sai, nghĩa là dãy trên có nhiều nhất 1 số chính phương.

Câu 9. Với n là số nguyên dương, một tập con của tập $\{1,2,3,...,n\}$ được gọi là tốt nếu sau khi ta sắp xếp thứ tự tăng các phần tử của nó thì thu được các số lẻ, chẵn, lẻ, … theo thứ tự.

Ví dụ các tập con tốt là $\{1,4,5,6\}, \{3,4,7\}$, tập $\varnothing$. Tập $\{2,3,4,7\}$ không là tập con tốt do nó bắt đầu bởi số chẵn.

Tính số tập con tốt của tập $\{1,2,3,...,n\}$.

Hướng dẫn giải

Gọi f_n là số tập con tốt của $\{1,2,3,...,n\}$.

Ta lập hệ thức truy hồi của f_n.

+ Nếu tập con tốt của $\{1,2,3,...,n\}$ không lấy n thì $f_n = f_{n-1}$.

+ Nếu tập con tốt của $\{1,2,3,...,n\}$ lấy n thì $f_n = f_{n-2}$.

Vậy ta có $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Hơn nữa $f_1 = 2, f_2 = 3$

Phương trình đặc trưng $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Suy ra $f_n = A\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Thay 2 giá trị đầu ta được $\begin{cases} A\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} + B\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 2 \\ A\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + B\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{2\left(2\sqrt{5}-1\right)}{\sqrt{5}-5} \\ B = \dfrac{2}{5+\sqrt{5}} \end{cases}$

Suy ra

$$f_n = \frac{2\left(2\sqrt{5}-1\right)}{\sqrt{5}-5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{2}{5+\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{2\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

Câu 10. Cho đa thức $P(x) = x^3 + 14x^2 - 2x + 1$. Chứng minh rằng với mỗi $x \in Z$ tồn tại số tự nhiên n sao cho ta luôn có $\underbrace{P\left(P\left(...P(x)...\right)\right)}_{n} - x \vdots 101$.

Hướng dẫn giải

Cho x, y là hai số nguyên bất kỳ, ta chứng minh $x \equiv y \pmod{101} \Leftrightarrow P(x) \equiv P(y) \pmod{101}$

Thật vậy, hiển nhiên $x \equiv y \pmod{101} \Rightarrow P(x) \equiv P(y) \pmod{101}$.

Biến đổi $4\left[P(x) - P(y)\right] = 4(x-y)\left(x^2 + xy + y^2 + 14x + 14y - 2\right)$

$= (x-y)\left[(2x+y+14)^2 + 3(y-29)^2 + 101(2y-27)\right]$,

Do đó, nếu $P(x) \equiv P(y) \pmod{101} \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x \equiv y \pmod{101} & (1) \\ (2x+y+14)^2 + 3(y-29)^2 \equiv 0 \pmod{101} & (2) \end{array}\right.$

Nếu xảy ra (1) ta có ngay điều phải chứng minh.

Nếu xảy ra (2), thì có hai khả năng

$y - 29 \not\vdots\, 101 \Rightarrow (y-29; 101) = 1$, mà $(2x+y+14)^2 \equiv (-3).(y-29)^2$ suy ra -3 là số chính phương mod 101 nên sử dụng ký hiệu Legendre có

$$1 = \left(\frac{-3}{101}\right) = \left(\frac{3}{101}\right) = \left(\frac{101}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1 \text{ (mâu thuẫn)}$$

$y - 29 \vdots 101$, thu được $2x + y + 14 \vdots 101$, từ đó suy ra $x \equiv y \equiv 29 \pmod{101}$.

Như vậy trong mọi trường hợp ta đều có $x \equiv y \pmod{101} \Leftrightarrow P(x) \equiv P(y) \pmod{101}$.

Xét 102 số $P(x), P\left(P(x)\right), ..., \underbrace{P\left(P\left(...P(x)...\right)\right)}_{102}$. Theo nguyên lý Drichlet, tồn tại $m, n \in \{1; 2; ...; 102\}$, $m > n$ sao cho $\underbrace{P\left(P\left(...P(x)...\right)\right)}_{m} \equiv \underbrace{P\left(P\left(...P(x)...\right)\right)}_{n} \pmod{101}$.

Từ nhận xét trên rút được $\underbrace{P\left(P\left(...P(x)...\right)\right)}_{m-n} \equiv x \pmod{101}$.

Vậy suy ra điều phải chứng minh

Câu 11. Với mỗi hoán vị $p=(a_1,a_2,...,a_9)$ của các chữ số 1, 2, …, 9, kí hiệu $s(p)$ là tổng của ba số có 3 chữ số $\overline{a_1a_2a_3}$, $\overline{a_4a_5a_6}$, $\overline{a_7a_8a_9}$. Trong các $s(p)$ có hàng đơn vị bằng 0, gọi m là giá trị nhỏ nhất của nó và n là số các hoán vị p thỏa mãn $s(p)=m$. Tính $|m-n|$.

Hướng dẫn giải

Với mỗi hoán vị $p=(a_1,a_2,...,a_9)$ của các chữ số 1, 2, …, 9, kí hiệu $s(p)$ là tổng của ba số có 3 chữ số $\overline{a_1a_2a_3}$, $\overline{a_4a_5a_6}$, $\overline{a_7a_8a_9}$. Trong các $s(p)$ có hàng đơn vị bằng 0, gọi m là giá trị nhỏ nhất của nó và n là số các hoán vị p thỏa mãn $s(p)=m$. Tính $|m-n|$.

Để $s(p)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì 3 chữ số hàng trăm là 1, 2, 3, $s(p)$ có chữ số tận cùng bằng 0 thì các chữ số hàng đơn vị có tổng là bội của 10. Và từ các chữ số 4, 5, 6, 7, 8, 9 không có ba số nào có tổng bằng 10 và vì $7+8+9=24<30$ nên 3 chữ số hàng đơn vị phải có tổng bằng 20, ta thấy $5+6+9=4+7+9=5+7+8=20$, có ba bộ số có thể xếp vào 3 chữ số ở hàng đơn vị, tương ứng các chữ số còn lại sẽ là hàng chục. Do đó giá trị nhỏ nhất của $s(p)$ là $m=(1+2+3)\times 100+19\times 10+20=810$

Như vậy có 3 trường hợp, trong mỗi trường hợp có 6 cách chọn 3 chữ số hàng trăm, 6 cách chọn 3 chữ số hàng chục và 6 cách chọn 3 chữ số hàng đơn vị. Vậy số các hoán vị p thỏa mãn yêu cầu bài toán là $n=3\times 6\times 6\times 6=648$.

Vậy $|m-n|=162$.

Câu 12. Cho $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ là các số nguyên thỏa mãn điều kiện:

$$x_1^2+x_2^2+\ldots x_n^2+n^3\le(2n-1)(x_1+x_2+\ldots x_n)+n^2$$

Chứng minh tổng $S=x_1+x_2+\ldots+x_n+n+1$ không là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Câu 13. Cho trước các số nguyên dương $a,b.$ Chứng minh rằng phương trình

$$x^2-2axy+(a^2-4b)y^2+4by=z^2$$

có vô số nghiệm nguyên dương.

Hướng dẫn giải

Câu 14. Một số nguyên dương n được gọi là có tính chất *P* nếu nó thỏa mãn với mọi số nguyên dương a tùy ý, n chia hết a^n-1 thì n^2 cũng chia hết a^n-1. Chứng minh rằng có vô số hợp số có tính chất *P*.

Hướng dẫn giải

Kí hiệu p_k là số nguyên tố thứ k. Với mọi $k\ge 3$ ta có $p_k\ge 5$, như vậy luôn tồn tại một số q_k là ước số nguyên tố nhỏ nhất của p_k-2.

Đặt $n=p_kq_k$, ta sẽ chứng minh n có tính chất *P*. Thật vậy, giả sử $a^n\equiv 1(\bmod n)$.

Xét hàm Ơle $\varphi(n)=(p_k-1)(q_k-1)$, $a^{\varphi(n)}\equiv 1(\bmod n)$.