Loại 8: Các bài toán khác.

Câu 1. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ (Bảng A-Vòng 1)- năm học 1999-2000]

Tập hợp M gồm hữu hạn điểm trên mặt phẳng sao cho với mọi điểm X thuộc M tồn tại đúng 4 điểm thuộc M có khoảng cách đến X bằng 1. Hỏi tập hợp Mcó thể chứa ít nhất là bao nhiêu phần tử?.

Lời giải

Rõ ràng có ít nhất hai điểm P,Q thuộc M sao cho $PQ \neq 1$.

Ký hiệu $M_P=\{X\in M/PX=1\}$. Từ giả thiết $|M_P|=4$ ta có: $|M_p\cap M_q|\leq 2$.

Nếu tồn tại P, Q sao cho $|M_p\cap M_q|\leq 1$ thì M chứa ít nhất 9 điểm.

Trường hợp với mọi P,Q sao cho $PQ \neq 1$ và $|M_p \cap M_q| = 2$.

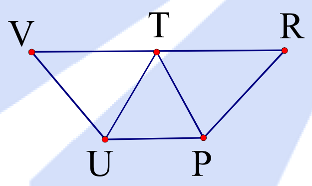
Khi đó $M_p\cap M_q=\{R,S\}$, lúc đó $M_P=\{R,S,T,U\}$ và $M_q=\{R,S,V,W\}$ và giả sử $M = \{P,Q,R,S,T,U,V,W\}$ ta có $TQ \neq 1$, $UQ \neq 1$, $VP \neq 1$, $WP \neq 1$.

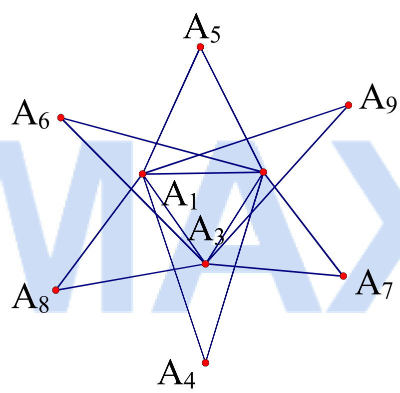
Nếu TR,TS,UR,US khác 1: suy ra $M_t\cap Mq=M_u\cap M_q=\{V,W\}$ suy ra T hay U trùng với Q, vô lý.

Nếu TR,TS,UR,US có một số bằng 1: Không giảm đi tính tổng quát, giả sử TV = 1 lúc đó $TS \neq 1$ và TV=1 hay TW=1. Giả sử TV=1 lúc đó $TW\neq 1$ suy ra TU = 1, và $M_t = \{P,R,U,V\}$ và $M_u=\{P,T,V,W\}$ lúc đó UTV, RPT,UTV là các tam giác đều cạnh 1, ta có hình 1. Điều này mâu thuẫn vì VR>2.

Vậy M chứa ít nhất là 9 điểm. Dấu bằng xảy ra với hình2.

Vậy M có thể chứa ít nhất là 9 điểm.





Câu 2. [Trường THPT Trần Nguyên Hãn- Hải Phòng- năm học 2008-2009]

Cho tam giác đều ABC:

M là điểm nằm trong tam giác sao cho $MA^2 = MB^2 + MC^2$. Hãy tính góc $\widehat{BMC}$.

Một điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC) sao cho tứ diện SABC đều, gọi I, K là trung điểm của các cạnh AC và S**B.** Trên đường thẳng AS và CK ta chọn các điểm P, Q sao cho PQ // BI. Tính độ dài PQ biết cạnh của tứ diện có độ dài bằng 1.

Câu 3. [Trường THPT Trần Nguyên Hãn- Hải Phòng- năm học 2008-2009]

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Xác định điểm M bên trong tam giác sao cho MA+MB+MC nhỏ nhất.

Lời giải

Dùng phép quay quanh A với góc quay 60^0 biến M thành M'; C thành C'

Ta có MA+MB+MC = BM+MM'+M'C'

MA+MB+MC bé nhất khi bốn điểm B,M,M',C' thẳng hàng.

Khi đó góc BMA=120^0, góc AMC=120^0

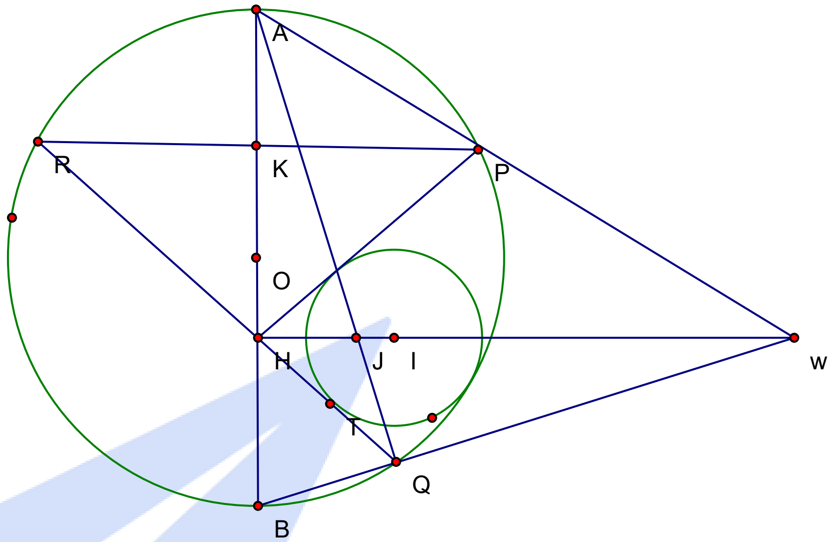
Ta được vị trí của M trong tam giác ABC

Câu 4. [Trường THPT Chuyên Biên Hòa- Tỉnh Hà Nam]

Cho đường tròn(O) có đường kính AB, P là điểm bất kì trên đường tròn, K là hình chiếu của P trên AB, R đối xứng với P qua A**B.** H bất kì trên A**B.** RH cắt lại (O) tại Q. Gọi đường tròn tâm I bán kính r tiếp xúc với HP,HQ và đường tròn (O)

Chứng minh: $\frac{1}{r} = \frac{1}{\text{HK}} + \frac{1}{\text{HP}}$

Lời giải



Gọi T là tiếp điểm của (I) và HQ

J là điểm $\in$ IH sao cho HJ = HT

PQ cắt AB tại X, AP cắt BQ tại W

AQ cắt PB tại J’

$\Rightarrow$ J’ là trực tâm Δ WAB

$\Rightarrow$ H,J,I,W thẳng hàng

$$\widehat{AJ'B} = \widehat{J'AB} + \widehat{APB} = \widehat{J'AP} + 90^0 = \widehat{J'HP} + 90^0$$

$$= 90^0 - \widehat{HIT} + 90^0 = 180^0 - \widehat{HIT}$$

$$\Rightarrow \widehat{AJ'B} + \widehat{HIT} = 180^0$$

$$\tan\widehat{AJB} = \tan(\widehat{AJH} + \widehat{BJH}) = \frac{\tan\widehat{AJH} + \tan\widehat{BJH}}{1 - \tan\widehat{AJH}.\tan\widehat{BJH}} = \frac{\frac{AH}{HJ} + \frac{BH}{HJ}}{1 - \frac{AH}{HJ}\frac{BH}{HJ}}$$

$$= \frac{(AH + BH)HJ}{HJ^2 - HA.HB} = \frac{2R.HJ}{HT^2 - HA.HB} = \frac{2R.HJ}{HI^2 - r^2 - R^2 + OH^2}$$

$$= \frac{2R.HJ}{OI^2 - R^2 - r^2} = \frac{2R.HJ}{(R-r)^2 - R^2 - r^2} = \frac{2R.HJ}{-2Rr} = -\frac{HJ}{r} = -\frac{HT}{r} = -\tan\widehat{HIT}$$

$$\Rightarrow \widehat{AJB} + \widehat{HIT} = 180^0 \Rightarrow \widehat{AJB} = \widehat{AJ'B} \Rightarrow J \equiv J'$$

Hai tam giác HKR và HTI đồng dạng với nhau nên ta có

$$\frac{BH}{BK} = \frac{HJ}{PK} = \frac{HT}{RK} = \frac{IH}{HK} = \frac{r}{HK}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{BK}{BH.BK} = \frac{BH + BK}{BH.HK} = \frac{1}{HB} + \frac{1}{HK}$$

LOẠI 8: Các bài toán khác

Câu 5. **[ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN TỈNH NAM ĐỊNH** -2005]

Biết rằng số đo ba góc trong của tam giác ABC lập thành một cấp số nhân với công bội $q=2$. Gọi $(O;R)$ là đường tròn ngoại tiếp và G là trọng tâm của tam giác ABC.

1) Tính độ dài đoạn OG theo R.

2) Biết $R=57$, hãy tính gần đúng số đo diện tích tam giác ABC (lấy đến 5 chữ số sau dấu phảy).

Câu 6. **[ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN TỈNH NAM ĐỊNH -2004]**

Trên mặt phẳng cho tứ giác lồi $ABCD$ có: $AB=BC=CD=a$

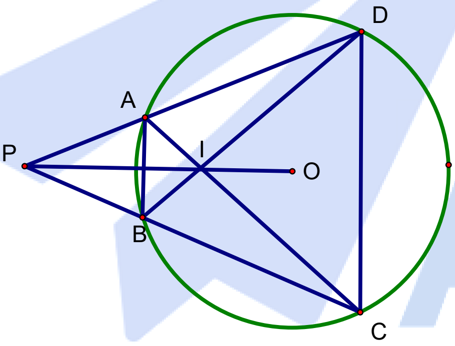
1) Nếu biết $\angle ABC=\angle BCD=120^\circ$ Hãy tính diện tích tứ giác $ABCD$ theo a.

2) Giả sử tứ giác $ABCD$ thay đổi, mà $AB=BC=CD=a$ không đổi. Hãy tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$

Câu 7. **[THI HỌC SINH GIỎI KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM HỌC 2013-2014]**

Cho (O) và một điểm P nằm ngoài (O). Chứng minh rằng các đường chéo của bất kì hình thang nào nội tiếp (O) mà hai cạnh bên kéo dài gặp nhau tại P đều cắt nhau tại một điểm cố định

Hướng dẫn giải



Gọi I là giao điểm của AC và BD $\Rightarrow I\in OP$

Ta có $\widehat{IOD}=\widehat{PBI}$

Do $\widehat{IPB}=\widehat{IDO}=90^0-\widehat{BCD}$

$\Rightarrow \Delta PDO \backsim \Delta PIB \Rightarrow \dfrac{PD}{PI}=\dfrac{PO}{PB}\Rightarrow PD.PB=PI.PO$

$\Rightarrow P_{P/(O)}=PI.PO$ hay I cố định.

Câu 8. **[TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ X TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN]**

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. H là một điểm di động trên đoạn OA (H khác A). Đường thẳng đi qua H và vuông góc với OA cắt cung nhỏ AB tại M. Gọi K là hình chiếu của M trên OB.

a) Các tiếp tuyến của $(O;R)$ tại A và B cắt tiếp tuyến tại M của $(O;R)$ lần lượt tại D,E. OD,OE cắt AB lần lượt tại F và G. Chứng minh $OD.GF=OG.DE$.

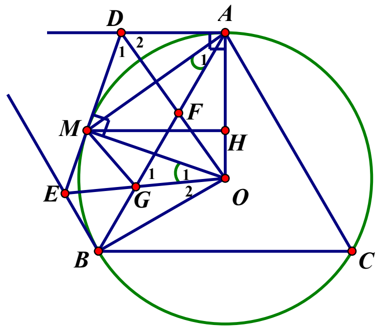
b) Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB theo R

Lời giải

Có tứ giác $AOMD$ nội tiếp (1)

$\widehat{A}_1 = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BM}$; $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BM}$

$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{O}_1 \Rightarrow$ tứ giác $AMGO$ nội tiếp (2)



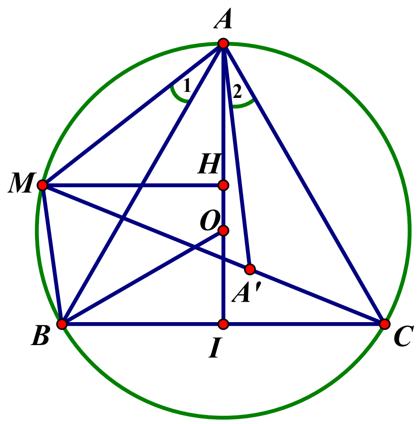
Từ (1) và (2) ta có năm điểm A, D, G, M, O cùng nằm trên một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{G}_1 = \widehat{D}_2 = \widehat{D}_1$

$\Rightarrow \Delta OGF$ và ΔODE đồng dạng

$\Rightarrow \frac{OG}{OD} = \frac{GF}{DE}$ hay $OD.GF = OG.DE$

Trên đoạn MC lấy điểm A' sao cho $MA' = MA \Rightarrow \Delta AMA'$ đều



$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \left(= 60^0 - \widehat{BAA'}\right)$

$\Rightarrow \Delta MAB = \Delta A'AC \Rightarrow MB = A'C$

$\Rightarrow MA + MB = MC$

Chu vi tam giác MAB là

$MA + MB + AB = MC + AB \le 2R + AB$

Đẳng thức xảy ra khi MC là đường kính của (O) => M là điểm chính giữa cung AM => H là trung điểm đoạn AO

Vậy giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB là $2R + AB$

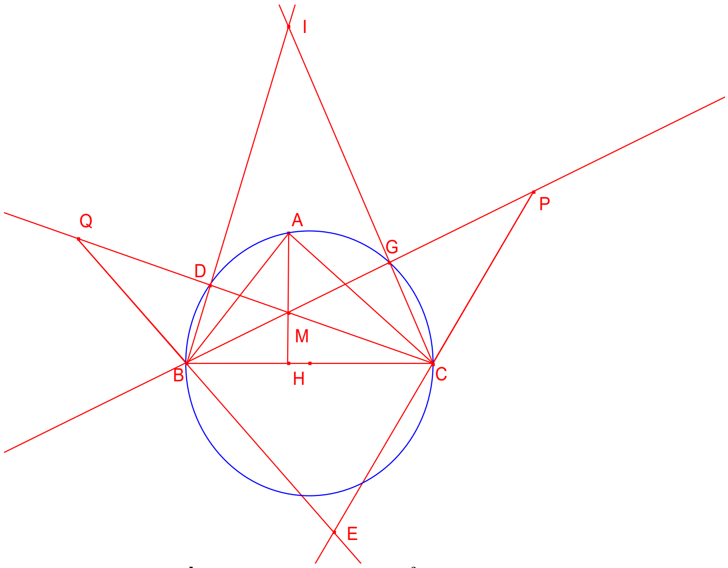
Gọi I là giao điểm của AO và BC $\Rightarrow AI = \frac{3}{2}R = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = R\sqrt{3}$

Giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB là $2R + AB = (2+\sqrt{3})R$.

Câu 9. [TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XI TRƯỜNG THPT CHUYÊN TỈNH SƠN LA]

Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. M là điểm tùy ý thuộc đoạn AH (M khác A và H); gọi P P là điểm thuộc BM kéo dài sao cho $CP = CA$ và Q là điểm thuộc tia CM kéo dài sao cho $BQ = BA$; CP cắt BQ tại E . Chứng minh rằng $EP = EQ$

Hướng dẫn giải.



Gọi G và D lần lượt là giao điểm của BM, CM với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; I I là giao điểm của BD và CG.

BC là đường kính của (ABC) nên CD, BG là hai đường cao của tam giác IBC, do đó M là trực tâm của tam giác IBC $\Rightarrow IM \perp BC \Rightarrow I, A, M, H$ thẳng hàng.

$$BQ^2 = BA^2 = BH.BC \Rightarrow \frac{BQ}{BH} = \frac{BC}{BQ}$$

Suy ra hai tam giác BQH, BCQ đồng dạng

Suy ra góc $\angle BQH = \angle BCQ = \angle BCD = \angle BIH$ suy ra tứ giác $BQIH$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra góc $\angle BQI = 90^\circ$ và $QI^2 = ID.IB$ (1)

Tương tự ta có: góc $\angle CPI = 90^\circ$ và $PI^2 = IG.IC$. (2)

Từ (1) và (2) và $IB.ID = IG.IC$ (do tứ giác $BDGC$ nội tiếp) nên $QI = IP$.

Câu 10. **[THI HỌC SINH GIỎI KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM HỌC 2013 - 2014]**

Gọi AD, BE, CF là ba đường phân giác trong của tam giác ABC vuông ở A. Đoạn thẳng AD cắt EF tại K. Đường thẳng qua K song song với BC cắt AB, AC lần lượt ở M, N.

Chứng minh rằng: $MN \geq \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}(AB + AC)$.

Câu 11. **[~~THI HỌ~~C SINH GIỎI TỈNH THÁI NGUYÊN GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CASIO LỚP 11NĂM HỌC 2011-2012]**

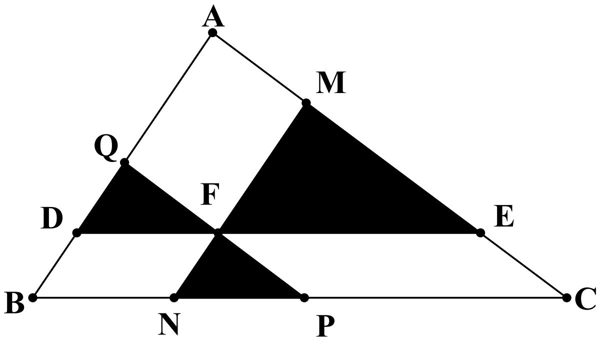
Qua một điểm nằm trong tam giác kẻ 3 đường thẳng song song với các cạnh của tam giác. Các đường thẳng này chia tam giác thành 6 phần, trong đó có 3 tam giác với các diện tích là $S_1 = 15,7845\,cm^2$, $S_2 = 16,7214\,cm^2$; $S_3 = 21,5642\,cm^2$ Tính diện tích của tam giác đã cho theo S_1, S_2, S_3.

Hướng dẫn giải.

$$\frac{S_1}{S_{ABC}} = \left(\frac{NP}{BC}\right)^2 \text{ hay } \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \frac{NP}{BC}$$

Tương tự, $\dfrac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \dfrac{FE}{BC} = \dfrac{PC}{BC}; \dfrac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \dfrac{DF}{BC} = \dfrac{BN}{BC}$

Từ đó $\dfrac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S_{ABC}}}=\dfrac{BN+NP+PC}{BC}=1$



Suy ra $\sqrt{S_{ABC}}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}$

Hay $S_{ABC}=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$

Thay số ta có: $S_{ABC}=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2=161,4394\,cm^2$

Câu 12. **[THI HSG TRƯỜNG THPT TRƯNG VƯƠNG- BÌNH ĐỊNH 2006-2007]**

T ìm điểm M trong tam giác nhọn ABC cho trước để $3MA+4MB+5MC$ bé nhất

Lời giải.

Dựng tam giác XYZ ngoại tiếp tam giác ABC có các cạnh tỷ lệ $3:4:5$

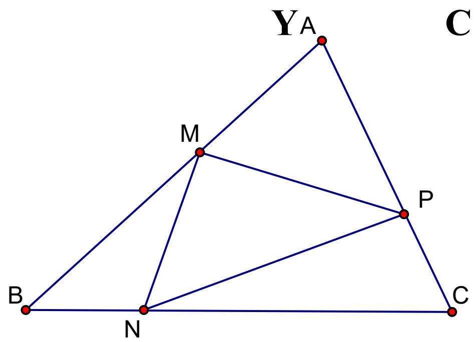
M nhìn các đoạn BC,CA các góc bù góc X,Y

Sử dụng giao các cung chứa góc tìm được M trong tam giác ABC

Câu 13. **[ĐỀ THI HSG VÒNG 1TRƯỜNG THPT TRƯNG VƯƠNG- BÌNH ĐỊNH]**

Cho các điểm M,N,P nằm trên các cạnh AB,BC,CA của tam giác ABC. Chứng minh rằng trong ba tam giác APM,BMN,CNP có ít nhất một tam giác có diện tích nhỏ hơn hoặc bằng một phần tư diện tích tam giác ABC.

Lời giải



$S_{\Delta APM}=\dfrac{AM.AP}{AB.AC}S_{\Delta ABC}$.Tương tự có

$S_{\Delta APM}S_{\Delta BMN}S_{\Delta CNP}=\dfrac{AM.BM}{AB^2}\dfrac{BN.CN}{BC^2}\dfrac{CP.AP}{CA^2}S^3{}_{\Delta ABC}\le\dfrac{1}{4}S^3{}_{\Delta ABC}$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh

Câu 14. **[HỘI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN VÙNG DUYÊN HẢI & ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ.TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT – QUẢNG NGÃI NĂM 2016]**

Cho tam giác ABC thay đổi nhưng luôn là tam giác nhọn có tổng các bình phương các độ dài các cạnh là không đổi. Gọi AD là đường phân giác trong, E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên AB,AC, K là giao điểm của BF,CE, H là giao điểm của AK và đường cao kẻ từ B của tam giác ABC. Tìm giá trị lớn nhất của tổng $AH+BH+CH$ khi tam giác ABC thay đổi.

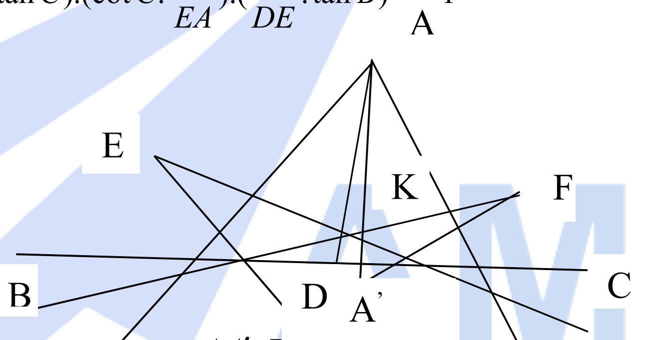
Lời giải

Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Ta chứng minh A,K,A' thẳng hàng bằng cách chứng minh AA',BF,CE đồng quy.

Vì A',F,E lần lượt thuộc các đoạn BC,CA,AB nên

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{FC}}{\overline{FA}}.\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}=-\frac{A'B}{A'C}.\frac{FC}{FA}.\frac{EA}{EB}=-(\frac{A'B}{A'A}.\frac{A'A}{A'C}).(\frac{FC}{DF}.\frac{DF}{FA}).(\frac{EA}{DE}.\frac{DE}{EB})$$

$$=-(\cot B.\tan C).(\cot C.\frac{DE}{EA}).(\frac{EA}{DE}.\tan B)=-1$$



Do đó theo định lý Ceva, AA',BF,CE đồng quy hoặc song song. Mà ba đường thẳng này không thể song song nên chúng đồng quy hay K nằm trên đường cao AA' của tam giác ABC, do đó, H là trực tâm của tam giác ABC.

Gọi BB',CC' là hai đường cao còn lại của tam giác ABC và a,b,c lần lượt là độ dài các cạnh BC,CA,AB thì theo tính chất tứ giác nội tiếp ta có

$$AH.AA'=AC'.AB=(b\cos C).c=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}.$$

Tương tự, có $AH.AA'=BH.BB'=CH.CC'=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}.$

Lại có $\dfrac{A'H}{AA'}+\dfrac{B'H}{BB'}+\dfrac{C'H}{CC'}=1\ hay\ \dfrac{AH}{AA'}+\dfrac{BH}{BB'}+\dfrac{CH}{CC'}=2$

nên

$$(AH+BH+CH)^2\le(AH,AA'+BH.BB'+CH.CC')(\frac{AH}{AA'}+\frac{BH}{BB'}+\frac{CH}{CC'})$$

$=a^2+b^2+c^2.$

Dấu "=" chỉ xảy ra khi $AA'=BB'=CC'$, tức là tam giác ABC đều

Vậy giá trị lớn nhất của tổng $AH+BH+CH$ là $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.