Loại 1: Chứng minh tính chất: thẳng hàng, đồng quy, song song, vuông góc.

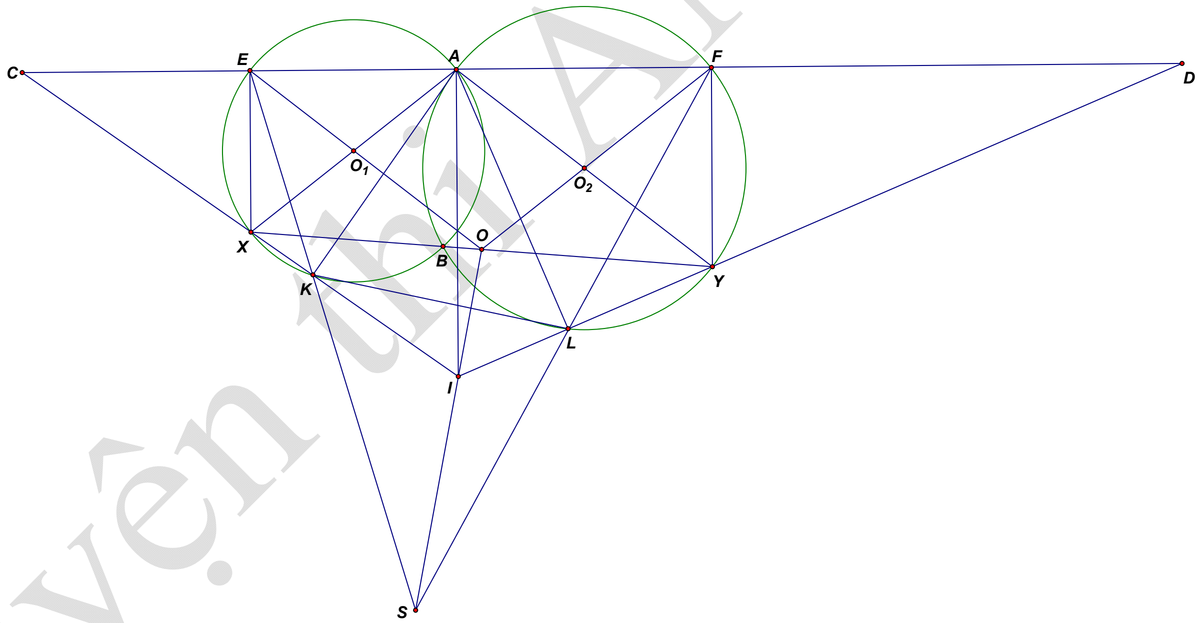
Câu 1. [Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định- năm 2015- Tỉnh Nam Định]

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A, B. AX, AY lần lượt là các đường kính của (O_1) và (O_2). Gọi O là trung điểm của XY; I là điểm thuộc đường phân giác của góc $\widehat{XAY}$ sao cho OI không vuông góc với XY và I không thuộc hai đường tròn. Đường thẳng đi qua A vuông góc với AI lần lượt cắt các đường tròn (O_1), (O_2) tại các điểm E, F khác A. IX cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai K, IY cắt đường tròn (O_2) tại điểm thứ hai L .

1. Gọi C là giao điểm của EF với IX. Chứng minh rằng OE là tiếp tuyến của đường tròn (CEK).

2. Chứng minh rằng 3 đường thẳng EK, FL, OI đồng quy.

Lời giải



1. Không mất tính tổng quát giả sử I là điểm thuộc đường phân giác trong của góc $\widehat{XAY}$.

Ta có tứ giác AO_1OO_2 là hình bình hành nên suy ra $OO_1 \parallel HY$

Lại có $(EA, EO_1) = (AO_1, AE) = (AF, AO_2) \pmod{\pi} \Rightarrow EO_1 \parallel HY$

Do đó O, O_1, E thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta có O, O_2, F thẳng hàng Mặt khác

$$(CE, CK) = (AC, AK) + (AK, CK) = (AC, AK) + \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{O_1E}, \overrightarrow{O_1K}\right) = (EO_1, EK) \pmod{\pi}$$

Do đó OE là tiếp tuyến của đường tròn (CEK)

2. Ta có $\widehat{AKI} = \widehat{ALI} = 90^0$ nên 4 điểm A, I, K, L cùng thuộc đường tròn đường kính AI.

Mà $EF \perp AI$ nên suy ra EF là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI.

Do đó $(AE, AK) = (LA, LK)\ (\text{mod } \pi)$ (1)

Mặt khác

$$(KE, KA) = (XE, XA) = (XE, EA) + (AE, AX) = \frac{\pi}{2} + (AE, AX)\ (\text{mod } \pi)$$

$$= \frac{\pi}{2} + (AY, AF) = (AF, FY) + (AY, AF) = (AY, FY) = (LA, LF)(\text{mod } \pi) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$(EF, EK) = (EA, AK) + (AK, EK) = (LA, LK) + (LF, LA) = (LF, LK)\ (\text{mod } \pi)$$

Vậy 4 điểm E, F, L, K cùng thuộc một đường tròn.

Gọi S là giao điểm của EK và FL

Vì 4 điểm E, F, L, K cùng thuộc một đường tròn nên ta có

$$\overline{SE}.\overline{SK} = \overline{SF}.\overline{SL} \Rightarrow P_{S/(CEK)} = P_{S/(DFL)} \quad (3)$$

Ta có $\overline{IC}.\overline{IK} = \overline{ID}.\overline{IL} = IA^2 \Rightarrow P_{I/(CEK)} = P_{I/(DFL)}$ (4)

Gọi D là giao điểm của EF với IY

Chứng minh tương tự câu 1) ta có OF là tiếp tuyến của đường tròn (DFL)

Mặt khác tứ giác $EFYX$ là hình thang vuông tại E, F và O là trung điểm của XY nên suy ra $OE = OF$. Do đó $P_{O/(CEK)} = OE^2 = OF^2 = P_{O/(DFL)}$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra S, O, I cùng thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn $(CEK), (DFL)$ nên S, O, I thẳng hàng. Vậy 3 đường thẳng EK, FL, OI đồng quy tại S.

***) Chú ý: Nếu HS không sử dụng góc định hướng thì phải xét các trường hợp vị trí của điểm I (I nằm ngoài các đoạn XK, YL và I nằm trong các đoạn XK, YL)**

Câu 2. [Trường THPT Lương Văn Tụy- Ninh Bình- Vòng 2]

Cho tam giác ABC nhọn có trực tâm H. M, N là trung điểm của AH, BC. Các đường phân giác của góc ABH, ACH cắt nhau tại P. Chứng minh:

a, Góc BPC là góc vuông

b, M, N, P thẳng hàng.

Câu 3. [SỞ Bình Định- năm học 2012-2013]

Trong tam giác ABC, M là chân đường vuông góc hạ từ A xuống đường phân giác trong của góc $\widehat{BCA}$. N, L lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ các đỉnh A, C xuống đường phân giác trong của góc ABC. Gọi F là giao điểm của các đường thẳng MN và AC, E là giao điểm của các đường thẳng BF và CL, D là giao điểm của các đường thẳng BL và AC. Chứng minh rằng $DE \parallel MN$.

Câu 4. [Trường THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ - năm 2015- Tỉnh Hòa Bình]

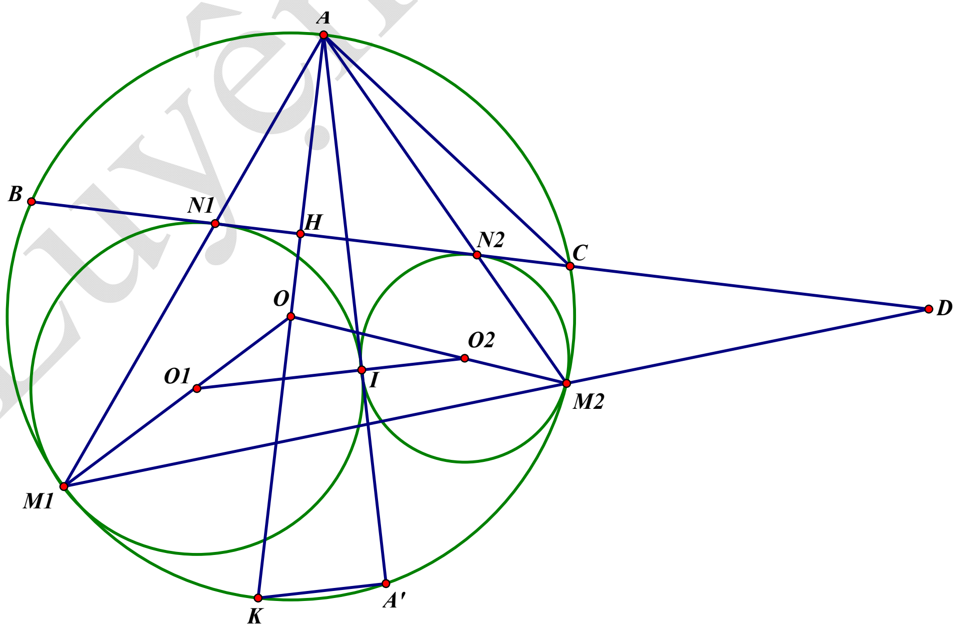
Cho (O) và hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ tiếp xúc ngoài với nhau và tiếp xúc trong với (O). Gọi I là tiếp điểm của (O_1) và (O_2); M_1, M_2 là tiếp điểm của (O) với $(O_1),(O_2)$. Tiếp tuyến chung tại I của $(O_1),(O_2)$ cắt (O) tại **A.** AM_1 cắt (O_1) tại N_1; AM_2 cắt (O_2) tại N_2.

Chứng minh rằng $OA \perp N_1N_2$.

N_1N_2 cắt (O) ở B, C; AI cắt (O) tại A'. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $A'BC$.

Chứng minh rằng N_1N_2, O_1O_2, M_1M_2 đồng quy.

Lời giải



a) A thuộc trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) nên $\overline{AN_1}.\overline{AM_1} = \overline{AN_2}.\overline{AM_2}$ suy ra $N_1N_2M_2M_1$ là tứ giác nội tiếp dẫn đến

$$\widehat{AN_1N_2} = \widehat{AM_2M_1} \Rightarrow \frac{Sđ\overset{\frown}{BM_1} + Sđ\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{Sđ\overset{\frown}{BM_1} + Sđ\overset{\frown}{AB}}{2}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} \Rightarrow OA \perp N_1N_2$$

b) Gọi H, K là giao điểm của AO với $BC, (O)$.

Tam giác ABK vuông tại B có BH là đường cao $\Rightarrow AB^2 = \overline{AH}.\overline{AK}$

$\widehat{AM_1K} = 90^o \Rightarrow HN_1M_1K$ là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow AB^2 = \overline{AH}.\overline{AK} = \overline{AN_1}.\overline{AM_1} = P_{A/(O_1)} = AI^2$$

$$\Rightarrow AB = AC = AI$$

Suy ra A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC

Dẫn đến $\widehat{IBC} = \frac{1}{2}\widehat{IAC} = \frac{1}{2}\widehat{A'AC} = \frac{1}{2}\widehat{A'BC}$

Suy ra BI là phân giác của $\widehat{A'BC}$

Rõ ràng $A'I$ là phân giác của $\widehat{BA'C}$ (do $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$)

Vì thế I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'BC$

c)Giả sử O_1O_2 cắt N_1N_2 tại D, gọi R, R_1, R_2 là bán kính của (O), $(O_1),(O_2)$.

Rõ ràng D là tâm vị tự ngoài của (O_1) và $(O_2) \Rightarrow \frac{DO_1}{DO_2} = \frac{R_1}{R_2}$,lại có $\frac{M_2O_2}{M_1O_1} = \frac{R_2}{R_1}$

Suy ra $\frac{DO_1}{DO_2}.\frac{M_2O_2}{M_2O}.\frac{M_1O}{M_1O_1} = 1$

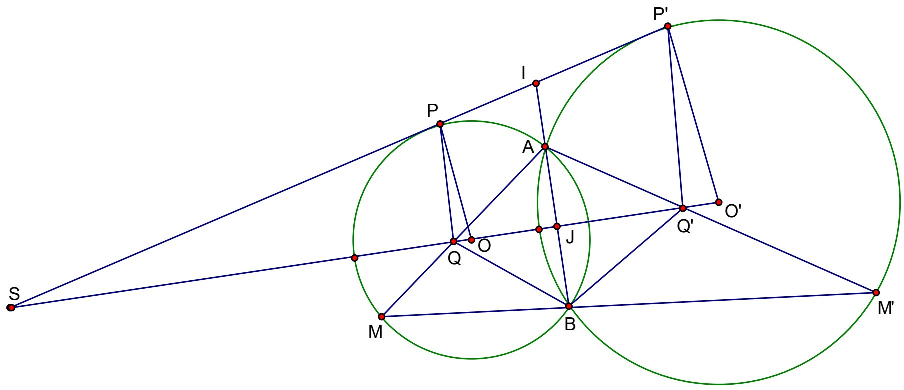
Dẫn đến D, M_1, M_2 thẳng hàng (Menelauyt đảo)

Vậy N_1N_2, O_1O_2, M_1M_2 đồng quy.

Câu 5. **[ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XI- CHUYÊN HẠ LONG]**

Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ với $R \neq R'$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Một đường thẳng d d tiếp xúc với đường tròn (O) và (O') lần lượt tại P và P'. Gọi Q và Q' lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ P và P' xuống OO′ .Các đường thẳng AQ và AQ' cắt các đường tròn (O) tại M và M' .Chứng minh rằng M, M', B thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



Gọi S là giao điểm của d và OO', khi đó S là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn (O) và (O'). Đặt $k=\dfrac{R'}{R}$, khi đó ta có: $V(S,k):(O)\to(O'),P\to P',Q\to Q'$

Gọi I,J là giao điểm của AB với PP' và OO'. Khi đó ta có:

$IP^2=\overline{IA}.\overline{IB}=\overline{IP'}^2\Rightarrow IP=IP'$

Mà $PQ\,//\,IJ\,//\,P'Q'$ nên $JQ=JQ'$

Suy ra AB là trung trực của QQ'.

Mà OO' là trung trực của AB. Vậy tứ giác $AQBQ'$ là hình thoi

Do đó $Q'B\,//\,AQ$ hay $Q'M'\,//\,QM$.

Giả sử $V(S,k)$ biến M thành B' khi đó $QM\,//\,Q'B'$

Mà M thuộc (O) suy ra B' thuộc (O') do đó $B'\equiv B$.

Vậy $V(S,k)$ biến M thành B.

Tương tự ta có $V(S,k)$ biến M' thành B. Suy ra M,B,M' thẳng hàng.

Câu 6. Cho ΔABC đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC,CA,AB tương ứng tại D,E,F. Đường thẳng EF cắt BC tại G. Đường tròn đường kính GD cắt (I) tại R ($R\neq D$). Gọi P,Q ($P\neq R,Q\neq R$) tương ứng là giao của (I) với BR,CR. Hai đường thẳng BQ và CP cắt nhau tại X. Đường tròn (CDE) cắt QR tại M và đường tròn (BDF) cắt PR tại N. Chứng minh rằng PM,QN,RX đồng quy.

Hướng dẫn giải

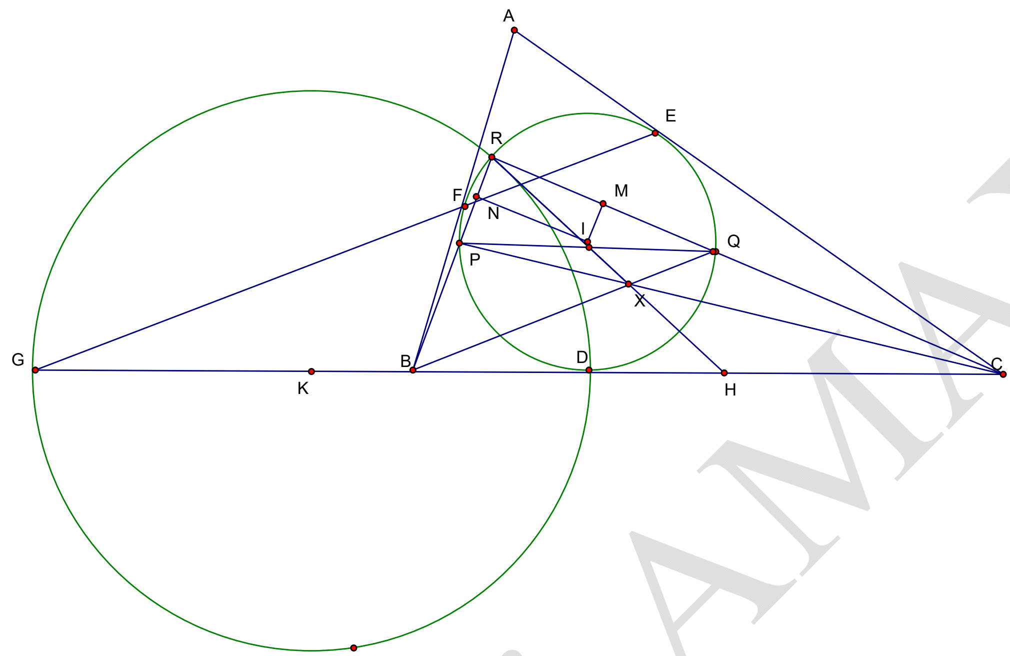
Gọi K là trung điểm đoạn GD. Ta có $(GDBC)=-1$, do đó $KD^2=KR^2=KB.KC$, điều này suy ra KR là tiếp tuyến (RPC). Do đó $\angle KRB=\angle RCB$.

Mặt khác KD là tiếp tuyến của (I), do đó KR cũng là tiếp tuyến của (I).

Vì vậy $\angle KRB = \angle RQP \Rightarrow \angle RQP = \angle RCB \Rightarrow RQ \parallel BC$.

Suy ra RX đi qua trung điểm của đoạn PQ (bổ đề quen thuộc trong hình thang).

Từ đây suy ra PM, QN, RX là 3 đường trung tuyến của ΔRQP, suy ra ĐPCM.



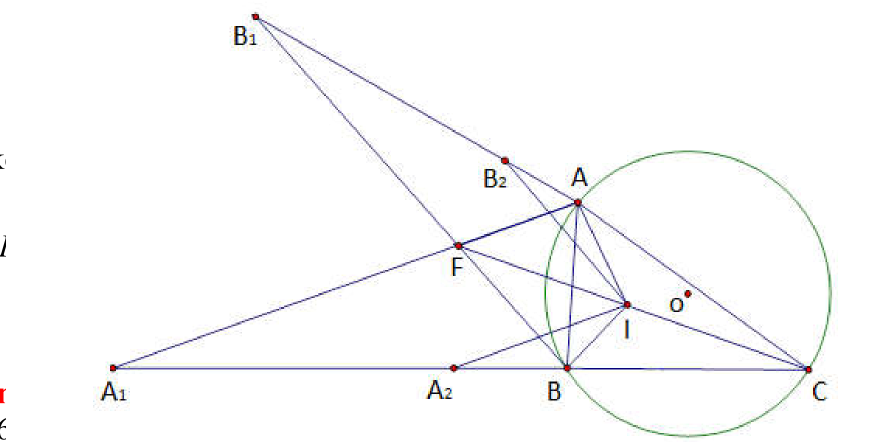
Câu 7. **[KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM HỌC 2016 - 2017]**

Cho tam giác ΔABC có $AB < AC$. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC và CA tại D, E tương ứng. Gọi M là trung điểm của BC và N là điểm đối xứng với D qua IM. Đường thẳng vuông góc với EN tại N cắt AI tại P, Q là giao điểm thứ hai của AN với (I). Chứng minh rằng $DP \perp EQ$.

Câu 8. **[ĐỀ XUẤT ĐỀ THI DUYÊN HẢI BẮC BỘ.Trường THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ - Tỉnh Hòa Bình. Năm học 2012-2013]**

Cho tam giác ΔABC. Các phân giác ngoài của các góc $\hat{A}; \hat{B}; \hat{C}$ lần lượt cắt cạnh đối diện tại của tam giác ΔABC tại A_1, B_1, C_1. CMR A_1, B_1, C_1 thẳng hàng và thuộc đường thẳng vuông góc với OI ở đây O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ΔABC

Hướng dẫn giải



Qua I k ... $, B_2, C_2$.

Có $A_2 I$ ...

$\widehat{IA_2B}$ chung

$\Rightarrow \Delta A_2BI \backsim \Delta A_2IC$

$$\Rightarrow \frac{A_2B}{A_2I} = \frac{A_2I}{A_2C} \Rightarrow A_2B.A_2C$$

$$\Leftrightarrow P_{A_2/(I;O)} = P_{A_2/(O)}$$

$CMT^2 : P_{B_2/(I;O)} = P_{B_2/(O)}$

$P_{C_2/(I;O)} = P_{C_2/(O)}$

$\Rightarrow A_2, B_2, C_2 \in$ trục đt của $(I;O)$ và $(O) \Rightarrow (A_2B_2C_2) \perp OI$ (1)

$AA_1 \bigcap BB_1 = \{F\}$

$\Rightarrow F$ là tâm đường tròn bàng tiếp $\widehat{C}$ của $\Delta ABC \Rightarrow C, I, F$ thẳng hàng.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AA_1 \perp AI \\ A_2I \perp AI \end{array}\right\} \Rightarrow A_2I // AA_1 \Rightarrow \dfrac{CA_2}{CA_1} = \dfrac{CI}{CF} \\ CMT^2 : IB_2 // FB_2 \Rightarrow \dfrac{CI}{CF} = \dfrac{CB_2}{CB_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{CA_2}{CA_1} = \frac{CB_2}{CB_1}$$

C

$\Rightarrow A_2B_2 // A_1B_1$ (2)

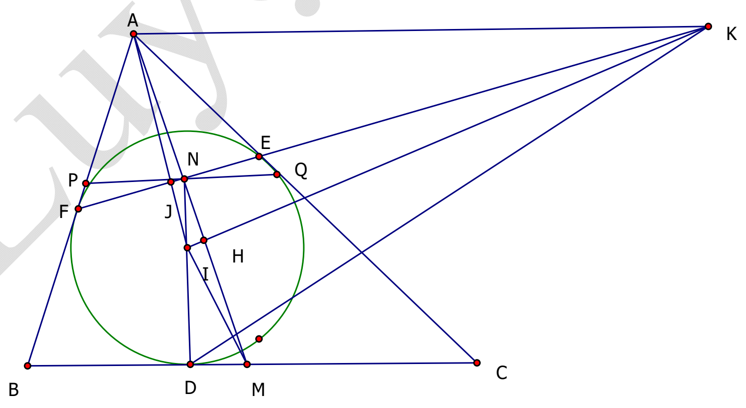
$CMT^2 :$ $\Rightarrow B_2C_2 // B_1C_1$ (3)

$(1)(2)(3) \Rightarrow A_1, B_1, C_1$ thẳng hàng và $(A_1B_1C_1) \perp OI$

Câu 9. **[Đề xuất lớp 11 Sở GD- ĐT Quảng Ninh- Trường THPT Chuyên Hạ Long]** Giả sử đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự D, E, F. Đường thẳng qua A và song song với BC cắt EF tại K. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng: $IM \perp DK$.

Hướng dẫn giải

Gọi N là giao điểm của ID và EF. Qua N N kẻ đường thẳng // BC cắt AB, AC theo thứ tự từ P, Q. Vì hai tứ giác $IFPN$ và $IQEN$ nội tiếp nên $\widehat{IFN} = \widehat{IPN}$



$\widehat{IEN} = \widehat{IQN}$

Mặt khác $\widehat{IEN}=\widehat{IFN}\Rightarrow\widehat{IPN}=\widehat{IQN}$. Do đó ΔIPQ cân tại I. Vậy N là trung điểm của $PQ \Rightarrow A,\ N,\ M$ thẳng hàng.

Lại có $IN\perp AK, KN\perp AI\Rightarrow N$ là trực tâm $\Delta AIK\Rightarrow AM\perp IK$

Gọi H là giao điểm của AM và IK

J là giao điểm của IA và EF

$\Rightarrow \overline{IH}.\overline{IK}=\overline{IJ}.\overline{IA}=IE^2=ID^2\Rightarrow \Delta IHD \backsim \Delta IDK(c-g-c)\rightarrow \widehat{IDH}=\widehat{IKD}$

Mà $\square IHMD$ nội tiếp nên $\widehat{IDH}=\widehat{IMH}\Rightarrow\widehat{IKD}=\widehat{IMH}\Rightarrow IM\perp DK$ (Đpcm).

Câu 10. [ĐỀ NGHỊ THI CHỌN HSG VÙNG DUYÊN HẢI BẮC BỘ LỚP 11 - Tr-êng T.H.P.T Chuyªn Th¸i B×nh.N¨m häc 2013-2014]

Cho tam giác ABC vuông tại A. Hình chữ nhật $MNPQ$ thay đổi sao cho M thuộc AB, N thuộc AC và $P,\ Q$ thuộc BC.

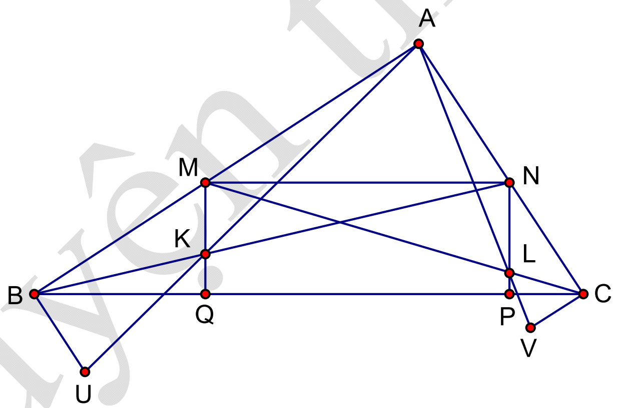
$K=BN\cap MQ;\ L=CM\cap NP;\ X=MP\cap NQ;\ Y=KP\cap LQ$.Chứng minh rằng.

1) $\widehat{KAB}=\widehat{LAC}$.

2) XY luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

1) Lấy U,V theo thứ tự thuộc AK,AL sao cho $\widehat{ABU}=\widehat{ACV}=90^\circ$ (h.1).



(h.2.1)

Ta có: $\dfrac{BU}{CV}=\dfrac{BU}{NA}.\dfrac{NA}{MA}.\dfrac{MA}{CV}=\dfrac{BK}{NK}.\dfrac{BA}{CA}.\dfrac{ML}{CL}=\dfrac{BQ}{NM}.\dfrac{BA}{CA}.\dfrac{MN}{CP}$

$$=\frac{BQ}{MQ}.\frac{CA}{BA}.\frac{NP}{CP}=\frac{BA}{CA}.\frac{CA}{BA}.\frac{BA}{CA}=\frac{BA}{CA}.$$

Do đó các tam giác $ABU,\ ACV$ đồng dạng.

Vậy $\widehat{KAB}=\widehat{LAC}$.

2) Đặt $Z = ML \cap NK$ (h.2.2).

Theo định lí Pappus: X, Y, Z thẳng hàng (1).

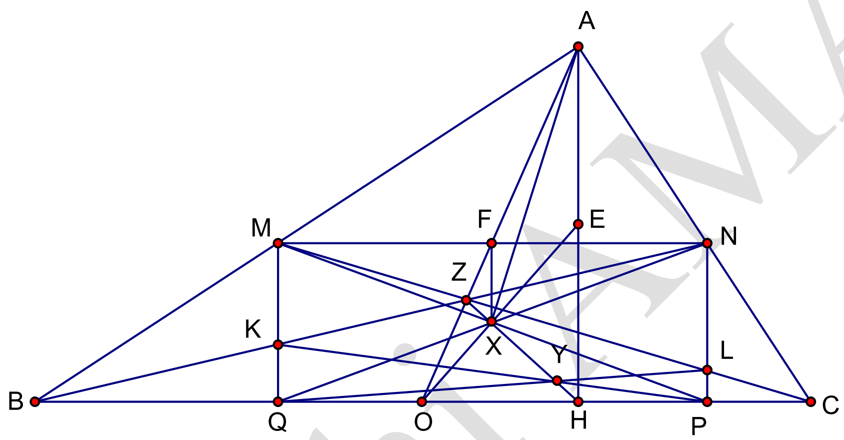
Gọi H là hình chiếu của A trên BC; O, F, E theo thứ tự là trung điểm của BC, MN, AH.

Dễ thấy A, Z, O, F thẳng hàng; E, X, O thẳng hàng; $FX \,//\, AH$.

Vậy $X(AHEF) = -1 = X(AZOF) = X(AZEF)$.

Do đó X, H, Z thẳng hàng (2).

Từ (1) và (2) suy ra XY đi qua H (đpcm).

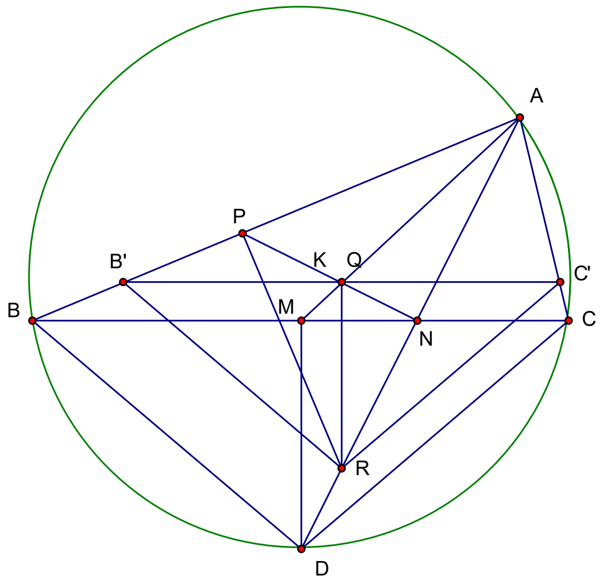


(h.2.2)

Câu 11. **[ĐỀ THI ĐỀ XUẤT TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XI-TRƯỜNG THPT CHUYÊN TUYÊN QUANG]**

Cho tam giác ABC với $AB > AC$. Các đường trung tuyến và phân giác trong góc A cắt BC tại M và N tương ứng. Đường thẳng qua N vuông góc với AN cắt AB, AM lần lượt tại P và Q; đường thẳng qua P vuông góc với AB cắt đường thẳng AN tại R. Chứng minh QR vuông góc với BC.

Hướng dẫn giải



Gọi D là giao điểm thứ hai của AN với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, dễ thấy $DB = DC$ suy ra DM vuông góc với BC. Đặt $k = \dfrac{AR}{AD}$ và xét phép vị tự $V_A^k : B \mapsto B', C \mapsto C', D \mapsto R$. Khi đó B′ thuộc AB, C′ thuộc AC và hai tam giác BCD và B'C'R có các cạnh tương ứng song song.

Gọi K là giao điểm của PN với B′C′, ta có

$\widehat{C'B'R} = \widehat{CBD} = \widehat{BAD} = 90^O - \widehat{ARP} = \widehat{RPN}$

suy ra tứ giác RKPB′ nội tiếp. Từ đó $\widehat{B'KR} = \widehat{B'PR} = 90^0$.

Như vậy $V_A^k : M \mapsto K$ nên K là trung điểm B′C′, hay K thuộc AM, suy ra K trùng Q. Do B′C′ song song với BC mà QR vuông góc với B′C′ nên QR vuông góc với BC.

Câu 12. **[TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG-ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** năm 2015.**LẦN THỨ XI]**

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE, CF cắt nhau tại H $(E \in AC, F \in AB)$. Đường thẳng EF cắt BC tại G. Lấy điểm T trên (O) sao cho $\widehat{ATH} = 90^\circ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác GTO cắt EF tại K $(K \neq G)$. Chứng minh rằng

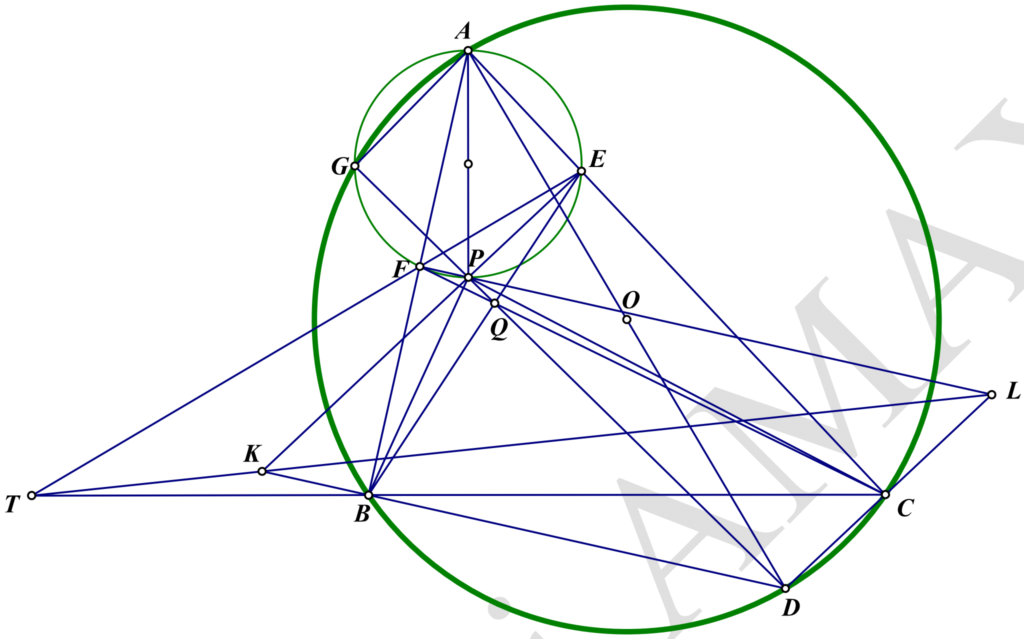
a) Ba điểm G, T, A thẳng hàng.

b) Đường thẳng OK vuông góc với đường thẳng AT.

Câu 13. **[Đề 59- TRƯỜNG THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC-ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ VIII- NĂM 2015.MÔN TOÁN - LỚP 11]**

Cho tam giác ABC nhọn không cân, nội tiếp đường tròn (O). P là điểm nằm trong tam giác sao cho $AP \perp BC$. Đường tròn đường kính AP cắt các cạnh AC, AB lần lượt tại E, F và cắt đường tròn (O) tại điểm G khác A. Chứng minh rằng GP, BE, CF đồng quy.

Hướng dẫn giải



Gọi AD là đường kính của (O), dễ thấy G, P, D thẳng hàng và $PE \parallel CD; PF \parallel BD$. Giả sử PE, PF cắt DB, DC tại K, L; EF cắt BC tại T.

Theo định lý Desargues để chứng minh BE, CF, GP (hay PD) đồng quy ta chỉ cần chứng minh T, K, L thẳng hàng. Áp dụng định lý Menelaus ta được:

$$\frac{TB}{TC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB} = 1 \Rightarrow \frac{TB}{TC} = \frac{FB}{EC}.\frac{AE}{AF}(1)$$

Dễ thấy tứ giác EFBC nội tiếp nên $\frac{AE}{AF} = \frac{BE}{CF}(2)$

Cũng từ $EFBC$ nội tiếp suy ra

$$\angle FCL = \angle FCA + \angle ACL = \angle EBA + 90^0 = \angle EBA + \angle ABK = \angle KBE$$

Tứ giác $PKDL$ là hình bình hành suy ra $\angle PKB = \angle PLC$.

Suy ra $\Delta EBK \backsim \Delta FCL \Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{KB}{CL}(3)$.

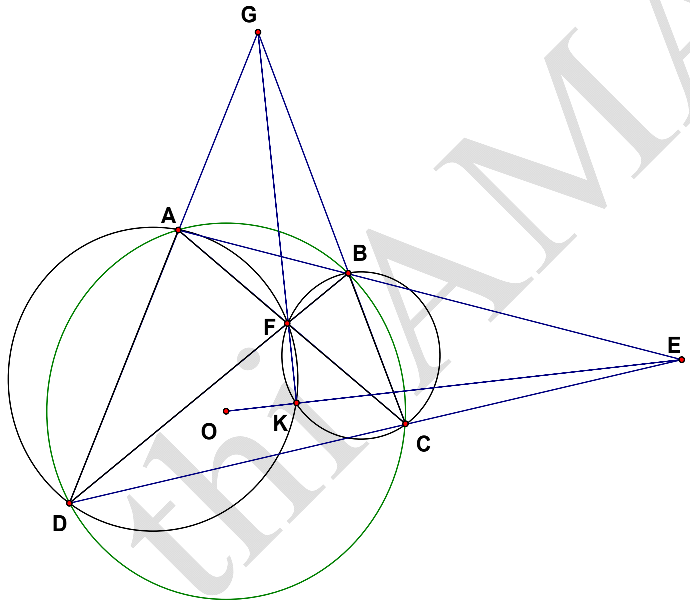
Ta có $BF.PL = CE.PK = S_{PKDL} \Rightarrow \frac{BF}{CE} = \frac{PK}{PL} = \frac{DL}{DK}(4)$

Thay $(2),(3),(4)$ vào (1) ta được $\frac{TB}{TC}=\frac{DL}{DK}.\frac{KB}{CL}\Rightarrow\frac{TB}{TC}.\frac{LC}{LD}.\frac{KD}{KB}=1$. Từ đó áp dụng định lý menelaus cho tam giác DBC ta suy ra T,K,L thẳng hàng. Bài toán được chứng minh.

Câu 14. **[SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LÂM ĐỒNG- Trường THPT Chuyên BảoLộc-KỲ THI HSG KHU VỰC DH VÀ ĐBBB LẦN THỨ 9ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN: TOÁN; LỚP: 11]**

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp có các cặp cạnh đối không song song. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại điểm E và các đường chéo AC và BD cắt nhau tại F. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác AFD và BFC cắt nhau tại điểm thứ hai K. Chứng minh rằng hai đường thẳng EK và FK vuông góc.

Hướng dẫn giải



▪ Gọi G là giao điểm của AD và BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

Ta dùng kí hiệu (ABC), $(ABCD)$ tương ứng để chỉ đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, tứ giác $ABCD$.

Ta có AD, BC, FK lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn $(ABCD)$ và (ADF), $(ABCD)$ và (BCF), (ADF) và (BCF) nên AD, BC, FK đồng quy tại G hay F, K, G thẳng hàng.

▪ Không mất tổng quát ta giả sử F nằm giữa K và G.

Ta có $\widehat{DKC}=(180^0-\widehat{DKF})+(180^0-\widehat{CKF})=\widehat{DAF}+\widehat{CBF}=\frac{1}{2}\widehat{DOC}+\frac{1}{2}\widehat{DOC}=\widehat{DOC}$

(ta có thể dùng góc định hướng cho mọi trường hợp).

Suy ra các điểm D, C, K, O cùng thuộc một đường tròn ta gọi là $(C1)$.

▪ Tương tự, các điểm $A,\ B,\ K,\ O$ cùng thuộc một đường tròn ta gọi là $(C2)$.

Ta có $AB,\ CD,\ OK$ lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn $(ABCD)$ và $(C2)$, $(ABCD)$ *và* $(C1)$,$(C1)$ và $(C2)$ nên $AB,\ CD,\ OK$ đồng quy tại E hay $O,\ K,\ E$ thẳng hàng.

▪ Xét cực và đối cực đối với đường tròn (O), ta có GF là đối cực của E nên GF vuông góc với OE

Mà $G,\ K,\ F$ thẳng hàng; $O,\ K,\ E$ thẳng hàng nên EK và FK vuông góc (điều phải chứng minh).

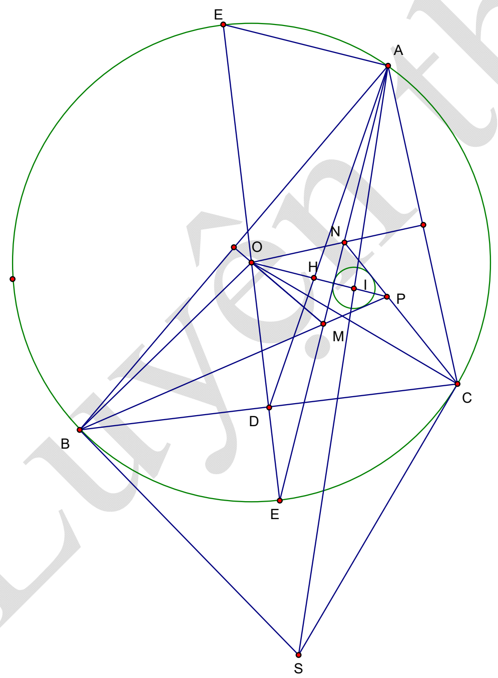
Câu 15. [KỲ THI HỌC SINH GIỎI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ IX, NĂM HỌC 2015 –2016. ĐỀ THI MÔN TOÁN – KHỐI 11]

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến của (O) tại B,C cắt nhau tại S. Gọi d là đường thẳng chứa phân giác trong góc A của tam giác ABC. Các đường trung trực của các đoạn thẳng $AB,\ AC$ cắt d lần lượt tại M và N. Gọi P là giao điểm của BM và CN, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP, H là trực tâm của tam giác OMN.

a. Chứng minh H ,I đối xứng với nhau qua d.

b. Chứng minh $A,\ I,\ S$ thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



a) Chứng minh OP là trung trực của MN

Không mất tính tổng quát ta giả sử bài toán có vị trí tương đối như hình vẽ.

Gọi D là trung điểm của BC, E là giao điểm (khác A) của d với (O), F là trung điểm của MN.

Vì hai tam giác MAB *và* NAC cân nên dễ thấy:

$\widehat{PMN}=\widehat{PNM}$, $\widehat{OMN}=\widehat{ONM}$

Suy ra, tam giác PMN cân tại P và tam giác OMN cân tại O. Vậy OP là trung trực của MN .

+) Chứng minh H , I đối xứng với nhau qua d

Ta có: $\widehat{\text{IMF}}=\frac{1}{2}\widehat{BME}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}, \widehat{HMF}=\widehat{HON}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}\Rightarrow \widehat{\text{IMF}}=\widehat{HMF}$.

Vậy hai điểm I và H đối xứng với nhau qua d .

b) Chứng minh AD, AS đối xứng với nhau qua AE

Gọi EK là đường kính của (O).

Ta có $(DSEK) = -1$ nên A $(DSEK) = -1$ mà AE và AK vuông góc với nhau suy ra AE là phân giác góc $\widehat{SAD}$.

Vậy AD, AS đối xứng với nhau qua AE .

+) Dựa vào tính chất của phép đối xứng trục d ta thấy A, I, S thẳng hàng khi và chỉ khi A, H, D thẳng hàng. Ta dùng Melenauyt với tam giác OEF để chứng minh điều này.

$$\frac{HO}{HF}=\frac{\text{FO}}{FH}-1=\frac{MF\cot\frac{A}{2}}{MF\tan\frac{A}{2}}-1=\frac{\cos A}{\sin^2\frac{A}{2}};\quad \frac{DE}{DO}=\frac{R(1-\cos A)}{R\cos A}=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{\cos A}\Rightarrow\frac{HO}{HF}.\frac{DE}{DO}.\frac{\text{AF}}{\text{AE}}=1.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Câu 16. **[HỘI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ- TRƯỜNG THPT CHUYÊN BIÊN HÒA-2006]**

Cho tam giác ΔABC với H là trực tâm tam giác, O là tâm đường tròn ngoại tiếp và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC, E là điểm đối xứng của B qua CA, F là điểm đối xứng của C qua AB. Chứng minh rằng D,E,F thẳng hàng khi và chỉ khi $OH=2R$.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ΔABC. A',B',C' lần lượt là trung điểm BC,CA,AB. Gọi I,J,K là tam giác nhận A,B,C là trung điểm các cạnh JK,KI,IJ. Do đó G là trọng tâm tam giác IJK .

Từ cách dựng suy ra HA,HB,HC lần lượt là đường trung trực của JK,KI,IJ. Do đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *IJK có bán kinh 2R*.