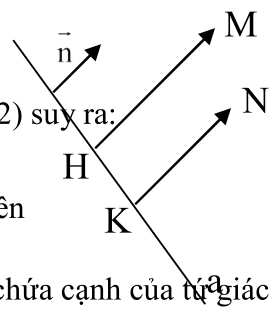
Chứng minh tính chất: tam giác, tứ giác, đường tròn.

Câu 1. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ (Vòng 2)- năm học 2001-2002]

Trong mặt phẳng, cho tứ giác (lồi) có: tổng khoảng cách từ mỗi đỉnh đến các cạnh là một số không đổi đối với tất cả các đỉnh. Chứng minh rằng tứ giác đó là hình bình hành.

Lời giải

Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến đơn vị của đường thẳng a, $\vec{n}$ có gốc trên a. M và N là hai điểm ở về một nữa mặt phẳng có bờ a chứa vectơ $\vec{n}$.



Khi đó ta có: $\overrightarrow{HM}.\vec{n} = t_M.\vec{n}^2$ (1) $\overrightarrow{KN}.\vec{n} = t_N.\vec{n}^2$ (2)

Từ giả thiết ta được: $t_M = d(M,a)$ và $t_N = d(N,a)$ và từ (1) và (2) suy ra:

$\overrightarrow{MN}.\vec{n} = d(N,a) - d(M,a)$ (3).

Gọi $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$, $\overrightarrow{n_3}$, $\overrightarrow{n_4}$ là các vectơ pháp tuyến đơn vị có gốc trên các cạnh AB,BC,CD,DA và ở miền trong tứ giác ABCD.

Gọi k là tổng khoảng cách từ một đỉnh đến các đường thẳng chứa cạnh của tứ giác.

Khi đó ta có:

$\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{n_1}+\overrightarrow{n_2}+\overrightarrow{n_3}+\overrightarrow{n_4})$

= [d(B,AB) – d(A,AB)] + [d(B,BC) – d(A,BC)] + [d(B,CD) – d(A,CD)] + [d(B,DA) – d(A,DA)]

Do đó: $\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{n_1}+\overrightarrow{n_2}+\overrightarrow{n_3}+\overrightarrow{n_4}) = k - k = 0$ (4). Tương tự ta có: $\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{n_1}+\overrightarrow{n_2}+\overrightarrow{n_3}+\overrightarrow{n_4}) = 0$ (5).

Vì A,B,C không thẳng hàng nên từ (4) và (5) ta suy ra: $\overrightarrow{n_1}+\overrightarrow{n_2}+\overrightarrow{n_3}+\overrightarrow{n_4} = \vec{0}$ (6).

Từ (6) suy ra: $\overrightarrow{n_1}^2+\overrightarrow{n_2}^2+2\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{n_3}^2+\overrightarrow{n_4}^2+2\overrightarrow{n_3}.\overrightarrow{n_4}$ nên: $(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}) = (\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{n_4})$ (7).

Từ (6) suy ra: $\overrightarrow{n_2}^2+\overrightarrow{n_3}^2+2\overrightarrow{n_2}.\overrightarrow{n_3} = \overrightarrow{n_1}^2+\overrightarrow{n_4}^2+2\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_4}$ nên: $(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_3}) = (\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_4})$ (8).

Do: $(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}) + (\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_3}) + (\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{n_4}) + (\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_4}) = 360^0$ nên:

$(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})+(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_3}) = (\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{n_4})+(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_4}) = 180^0$, suy ra:$(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_3}) = 180^0$, tương tự: $(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_4}) = 180^0$. (9)

Từ (9) suy ra các cạnh đối của tứ giác song song nhau: AB // CD, BC // AD. Vậy ABCD là hình bình hành.

Cách khác: Sau khi chứng minh được (6). Gọi 0 là một điểm tùy ý.

Đặt: $\overrightarrow{ON_1} = \overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{ON_2} = \overrightarrow{n_2}$, $\overrightarrow{ON_3} = \overrightarrow{n_3}$, $\overrightarrow{ON_4} = \overrightarrow{n_4}$ suy ra N_i thuộc đường tròn tâm O, bán kính 1. Do (6) suy ra O là trọng tâm của tứ giác $N_1N_2N_3N_4$ suy ra O là trung điểm của đoạn nối hai trung điểm của hai cạnh N_1N_2, N_3N_4 và từ đó suy ra: N_1N_2 // N_3N_4, suy ra $N_1N_2N_3N_4$ là hình chữ nhật, suy ra:

$\overrightarrow{n_2} = -\overrightarrow{n_4}$, $\overrightarrow{n_1} = -\overrightarrow{n_3}$ nên AB // CD,BC // AD. Vậy ABCD là hình bình hành.

Câu 2. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ (Bảng B-Vòng 2)- năm học 2000-2001]

Cho đường thẳng cố định a và một điểm A cố định trên a. Gọi (C) là đường tròn lưu động ở trong một nữa mặt phẳng (α) có bờ a. (C) có bán kính không đổi R và luôn tiếp xúc với a, gọi M là tiếp điểm. Gọi I là tâm của đường tròn (C).

Chứng minh rằng trong mặt phẳng chứa đường tròn (C), có một parabol (P) cố định sao cho trục đẳng phương của (C) và đường tròn đường kính AI luôn luôn tiếp xúc (P) khi M thay đổi trên a.

Trong mặt phẳng chọn hệ trục tọa độ Đề-các vuông góc Oxy, với Ox trùng với a, nữa mặt phẳng α là nữa mặt phẳng y > 0, O trùng A. Đặt M(m;0) có tâm I(m;R).

Phương trình của (C) là:

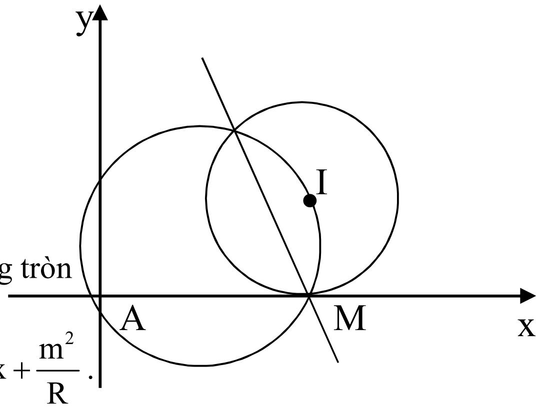
(C): $(x - m)^2 + (y - R)^2 = R^2$ hay

(C): $x^2 + y^2 – 2mx – 2Ry + m^2 = 0$.

Phương trình đường tròn đường kính AI là:

(C’): $(x – m/2)^2 + (y – R/2)^2 = \dfrac{m^2 + R^2}{4}$ hay

(C’): $x^2 + y^2 – mx – Ry = 0$.



Phương trình trục đẳng phương của hai đường tròn (C) và (C’) là:

(d): $mx + Ry – m^2 = 0 \Leftrightarrow$ (d): $y = f(x) = -\dfrac{m}{R}x + \dfrac{m^2}{R}$.

Xét hàm số $y = g(x) = -\dfrac{1}{4R}x^2$.

Hệ $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{m}{R}x + \dfrac{m^2}{R} = -\dfrac{1}{4R}x^2 \\ -\dfrac{m}{R} = -\dfrac{x}{2R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2m)^2 = 0 \\ x = 2m \end{cases} \Leftrightarrow x = 2m$.

Vậy Parabol $y = f(x) = -\dfrac{1}{4R}x^2$ luôn tiếp xúc với trục đẳng phương (d).

Loại 2: Chứng minh các tính chất:tam giác, tứ giác đường tròn.

Câu 3. [ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ IX TRƯỜNG THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ-2013]

Cho ΔABC cân tại A. Gọi D là trung điểm AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD giao với phân giác góc $\widehat{BAC}$ tại E nằm trong ΔABC. Đường tròn ngoại tiếp ΔABE giao với BD tại F (khác B), AF giao với BE tại I. CI giao với BD tại K. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABK.

Câu 4. [ĐỀ DUYÊN HẢI LỚP 11 MÔN TOÁN – Trường THPT Nguyễn Trãi, tỉnh Hải Dương]

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O và có trực tâm H. P là một điểm bất kì trên (O). Gọi Q, R, S là các điểm đối xứng với P lần lượt qua trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng bốn điểm H, Q, R, S nằm trên một đường tròn.

Hướng dẫn giải

- Gọi M, N, K, I lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB, PH.

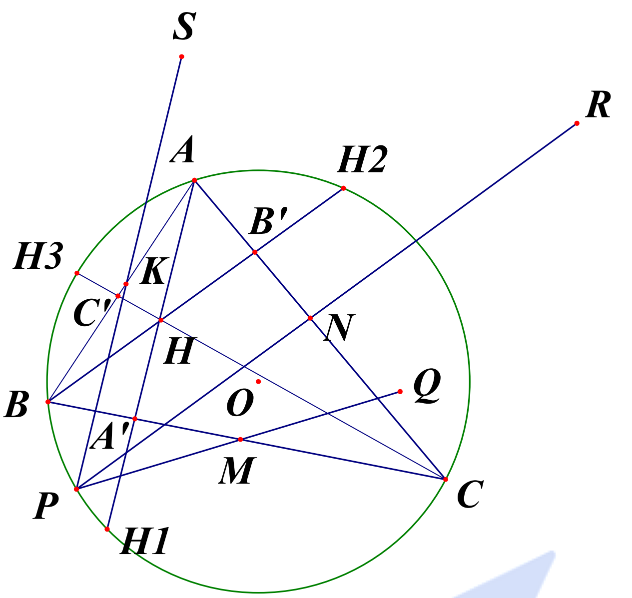
Xét phép vị tự

V_P^2: $M \mapsto Q$, $N \mapsto R$, $K \mapsto S$, $I \mapsto H$

Suy ra phép vị tự này biến đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP hay đường tròn Ơle của tam giác ABC thành đường tròn ngoại tiếp tam giác QRS.

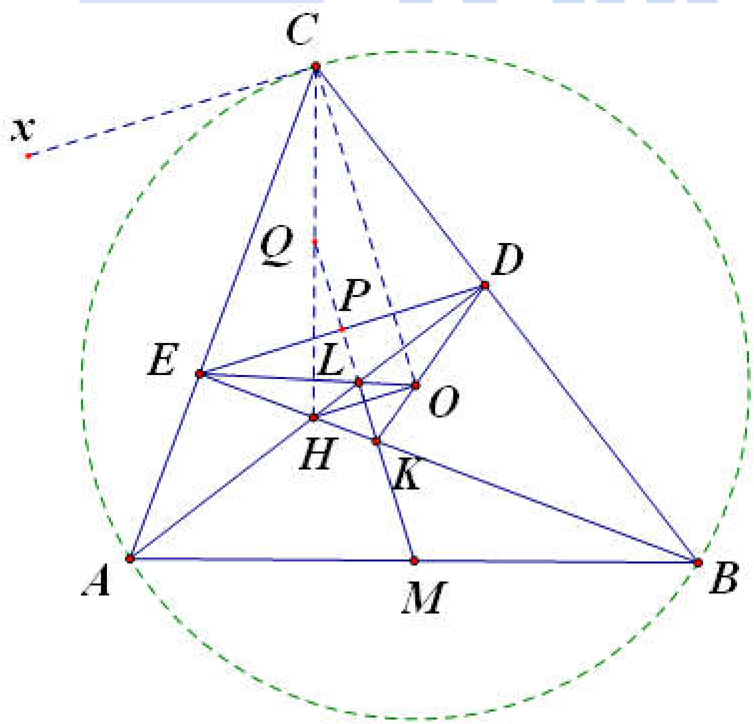
Từ đó để chứng minh H thuộc đường tròn (QRS) ta chứng minh I thuộc đường tròn Ơle của tam giác ABC.

- Xét phép vị tự $V_H^2 : A' \mapsto H_1$, $B' \mapsto H_2$, $C' \mapsto H_3$, suy ra phép vị tự này biến đường tròn Ơle của tam giác ABC thành đường tròn (O), mà $V_H^2 : I \mapsto P$; $P \in (O) \Rightarrow I$ nằm trên đường tròn Ơle của tam giác ABC (đpcm).



Câu 5. [TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÀO CAI TỔ TOÁN – TIN HỌC ĐỀ THI ĐỀ XUẤT KỲ THI HSG VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ VII. MÔN TOÁN: KHỐI 11.Năm học: 2013-2014]

Cho tam giác nhọn ABC không cân. Gọi H,O lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; D,E lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh A,B của tam giác ABC. Các đường thẳng OD và BE cắt nhau tại K, các đường thẳng OE và AD cắt nhau tại L. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Chứng minh rằng ba điểm K,L,M thẳng hàng khi và chỉ khi bốn điểm C,D,O,H cùng nằm trên một đường tròn.



Áp dụng đinh lý Mê-nê-la-uýt cho tam giác HAB và ba điểm K,L,M ta có:

K,L,M thẳng hàng khi và chỉ khi $\dfrac{\overline{KB}}{\overline{KH}}.\dfrac{\overline{LH}}{\overline{LA}}.\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = 1$ Û $\dfrac{\overline{KB}}{\overline{KH}} = -\dfrac{\overline{LA}}{\overline{LH}}$ (1)

Ta lại có $\dfrac{KB}{KH} = \dfrac{S_{BOD}}{S_{HOD}}$ (cùng cạnh đáy OD), $\dfrac{LA}{LH} = \dfrac{S_{AOE}}{S_{HOE}}$ (cùng cạnh đáy OE) và

$S_{AOE} = S_{BOD}$.(Bởi vì $S_{AOE} = \dfrac{1}{2}AE.d(O,AE) = \dfrac{1}{2}c.\cos A.R.\cos B = \dfrac{1}{2}R.c.\cos A.\cos B$,

ở đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $c = AB$. Tương tự

$S_{BOD} = \dfrac{1}{2}R.c.coA.\cos B$).

Từ các kết quả trên ta có (1) Û $S_{HOD} = S_{HOE}$ khi và chỉ khi $OH//DE$ hoặc OH đi qua trung điểm DE.

Bằng cách vẽ tiếp tuyến Cx của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại C, dễ dàng suy ra $DE//Cx$, suy ra CO vuông góc với DE.

Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của DE,HC. Dễ thấy tứ giác $CEHD$ nội tiếp, suy ra QP vuông góc với DE. Suy ra $CO//QP$.

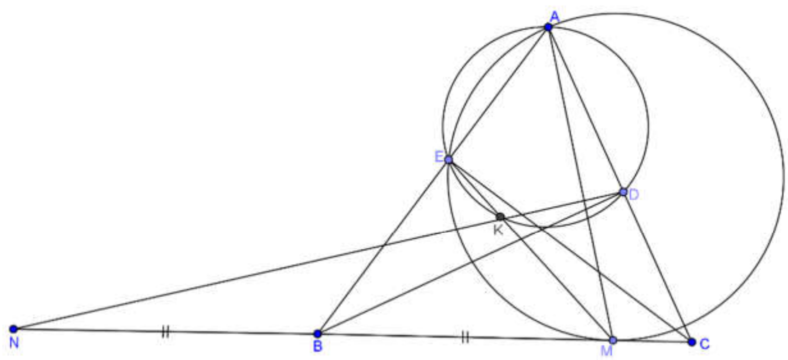
Nếu OH đi qua trung điểm DE suy ra P là trung điểm OH, suy ra $EHDO$ là hình bình hành, suy ra $OD // EH$ và $EO // HD$. Điều này trái với giả thiết OD cắt BE và OE cắt AD.

Vậy (1) xảy ra khi và chỉ khi $OH//DE$ khi và chỉ khi CO vuông góc với OH khi và chỉ khi E, H, O, D cùng nằm trên một đường tròn (vì ta luôn có tứ giác $CEHD$ nội tiếp đường tròn đường kính CH).

Câu 6. [TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XI TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN TỈNH ĐIỆN BIÊN ĐỀ THI MÔN TOÁN LỚP 11]

Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BD,CE. Một đường tròn (O) đi qua hai điểm A và E tiếp xúc với cạnh BC tại điểm M. Đường thẳng ME cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AED tại điểm thứ hai K. Hai đường thẳng DK và BC cắt nhau tại N. Chứng minh rằng đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEN.

Hướng dẫn giải



Ta có $\widehat{NME}=\widehat{EAM}$ (cùng bằng một nửa số đo cung EM);

mà $\widehat{MAC}=\widehat{EAC}-\widehat{EAM}$ nên suy ra

$\widehat{MAC}=(180^0-\widehat{EKD})-\widehat{NME}=180^0-\widehat{MKN}-\widehat{NMK}=\widehat{MNK}=\widehat{CND}$

suy ra ΔCAM và ΔCND đồng dạng (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{CM}{CD}=\dfrac{CA}{CN}\Rightarrow CM.CN=CA.CD$ (1)

Nhận xét:

Trong tam giác nhọn ABC tùy ý ta có: $BC^2=BE.BA+CD.CA$.

Thậy vậy

$BC^2=BD^2+DC^2=AB^2-AD^2+DC^2$

$=BE.AB+AE.AB-AD^2+DC^2$

$=BE.AB+AD.AC-AD^2+DC^2$

$=BE.AB+AD.CD+DC^2=BE.AB+CD.CA$

Kết hợp nhận xét trên với (1) suy ra $CM.CN=BC^2-BE.BA$.

Lại có $BE.BA=BM^2$ (cùng bằng phương tích của điểm B đối với (O)), nên suy ra:

$CM.CN=BC^2-BM^2=(BC+BM)(BC-BM)=(BC+BM)CM$

$\Rightarrow CN=BC+BM\Rightarrow BN=BM\Rightarrow BN^2=BM^2=BE.BA$

suy ra đường thẳng BN tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔAEN tại điểm N.

Vậy đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔAEN.

Câu 7. [Ngân hàng đề Hùng Vương-Trường CHUYÊN BẮC GIANG – năm-Tỉnh BẮC GIANG]

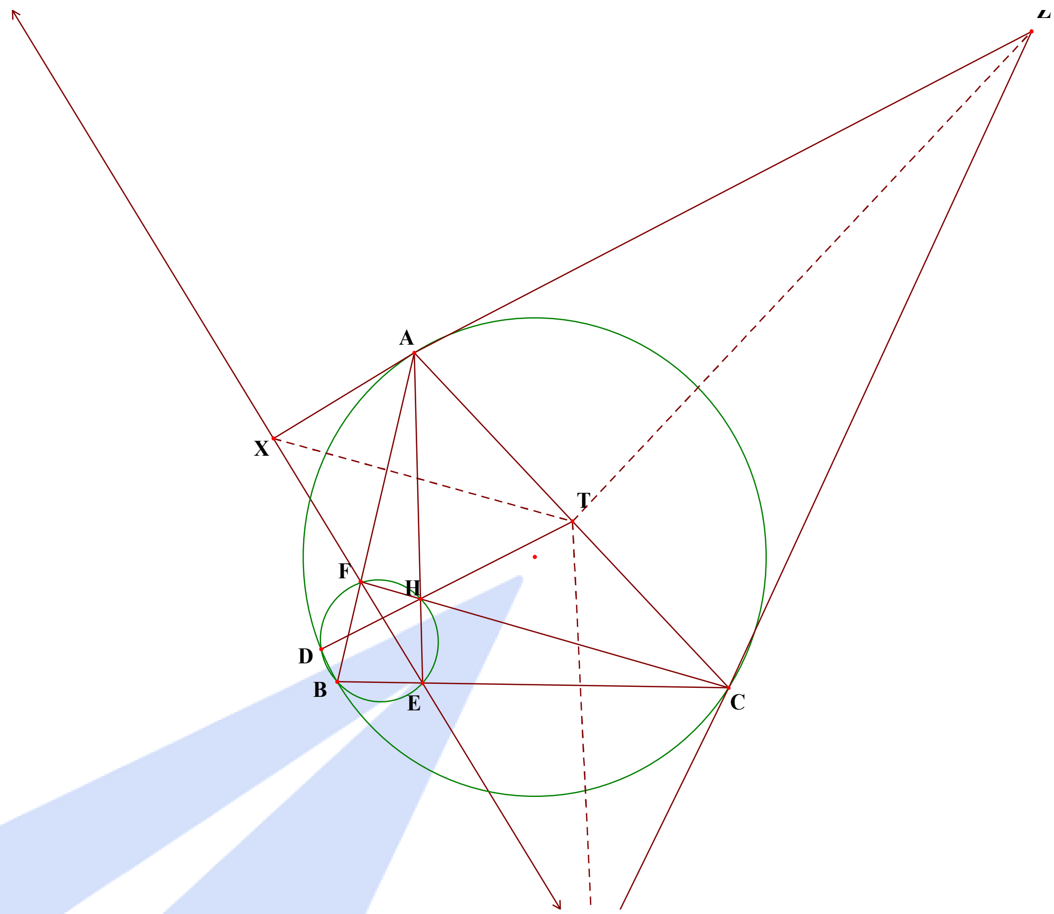
Cho tam giác nhọn ABC không cân tại B, T là trung điểm cạnh AC, E và F tương ứng là chân đường cao hạ từ A, C của tam giác. Z là giao điểm của hai tiếp tuyến tại A, C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, X là giao điểm của ZA và EF, Y là giao điểm của ZC và EF

a) Chứng minh rằng T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và EBF cắt nhau tại điểm thứ hai D. Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên DT.

c) Chứng minh rằng D nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ.

Hướng dẫn giải



a) ZT là phân giác góc $\widehat{AZC}$.

Do $\widehat{XAB} = \widehat{ACB} = \widehat{BFE} = \widehat{AFX}$ và $TA = TF$, từ đó X và T nằm trên trung trực của AF , do đó T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ

b)Giả sử $AB < BC$, khi đó D nằm trên cung nhỏ AB . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và L là trung điểm của BH . Ta có được BD và LO vuông góc.

Từ BD và DH vuông góc, ta được LO và DH song song. $OLHT$ là hình bình hành nên LO song song với HT , do đó D , H , T thẳng hàng.

c) Chứng minh được góc $\widehat{ADT} = \widehat{AXT}$ và TY là đường trung trực của DC .

Chứng minh được góc $\widehat{CDT} = \widehat{CYT}$ nên $CTDY$ là tứ giác nội tiếp.

Do đó góc $\widehat{XDY} + \widehat{XZY} = \widehat{XDT} + \widehat{TDY} + \widehat{XZY} = \widehat{ZAT} + \widehat{ZCT} + \widehat{XZY} = 180^\circ$, do đó $DXZY$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 8. [THI HSG LỚP 11 THPT NĂM HỌC 2010-2011-THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC]

Cho tam giác ABC. Phân giác trong của các góc A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt tại các điểm A_1, B_1, C_1. Đường thẳng AA_1 cắt đường thẳng CC_1 tại điểm I ; đường thẳng AA_1 cắt đường thẳng BC tại điểm N ; đường thẳng BB_1 cắt đường thẳng A_1C_1 tại điểm P . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IPC_1 . Đường thẳng OP cắt đường thẳng BC tại điểm M. Biết rằng $BM = MN$ và $\widehat{BAC} = 2\widehat{ABC}$. Tính các góc của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

* Dễ thấy $\widehat{IPC_1} = 90^0$, do đó O là trung điểm của IC_1 .

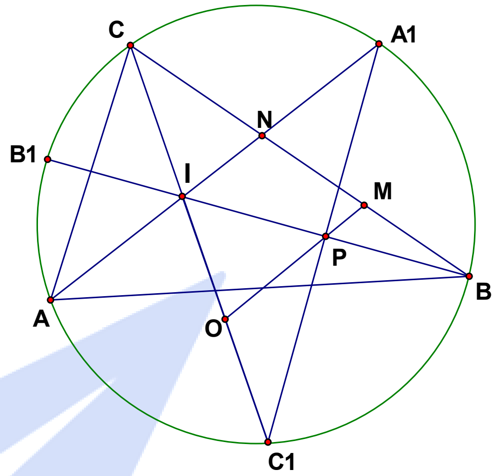
* $\widehat{IOP} = 2\widehat{IC_1P} = \widehat{CAB} = \widehat{CC_1B} \Rightarrow BC_1 // OP$

* Do BM=MN; $OI = OC_1 \Rightarrow IN // C_1B$

Do đó $\widehat{CIA_1} = \widehat{BAC}$, mà $\widehat{CIA_1} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ACB}\right)$

Vậy $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ACB}\right) \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{ACB}$

Cùng với $\widehat{BAC} = 2\widehat{ABC}$ ta được $\widehat{BAC} = \widehat{ACB} = 72^0; \widehat{ABC} = 36^0$



$$\Leftrightarrow \widehat{LM} = \widehat{CK}$$

Trường hợp $AC > BC$ ta cũng chỉ ra được $\widehat{LM} = \widehat{CK}$

$\Rightarrow \widehat{DE} = \widehat{FQ}$ (tính chất phép vị tự).

$\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{QFC}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn hai cung bằng nhau) và DE = QF.

Lại có CE = CF theo tính chất của hai tiếp tuyến kẻ từ một điểm.

Suy ra $\Delta CED = \Delta CFQ$, dẫn đến $\widehat{ECD} = \widehat{FCQ}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Câu 9. [§Ò thi hsg 11 tØnh nghÖ an - N¨m häc 2002-2003]

Trong tam gi¸c ABC, D lµ trung ®iÓm cña c¹nh BC. Gi¶ sö gãc $\widehat{BAD} = 15^0; \widehat{CAD} = 30^0$. H·y tÝnh tanC.

Hướng dẫn giải

§Æt BD =CD = a vµ AC =b. ¸p dông ®Þnh lý sin trong ΔACD vµ ΔABC ta cã:

$$2a = \frac{b}{\sin(C + 30^0)}; \; 2a\sqrt{2} = \frac{b}{\sin(C + 45^0)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{\sin(C + 30^0)}{\sin(C + 45^0)} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{\sin C.\cos 30^0 + \cos C.\sin 30^0}{\sin C \cos 45^0 + \cos C.\sin 45^0}$$

$$\Leftrightarrow \cos C = (\sqrt{3} - 2)\sin C \Leftrightarrow \text{tg}C = \frac{1}{\sqrt{3} - 2} = -(2 + \sqrt{3})$$

Câu 10. [TRƯỜNG THPT NGUYỄN HỮU THẬN QUẢNG TRỊ Năm học: 2011 – 2012]

Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho đường tròn (C_1) có tâm $I_1(2;3)$, bán kính $R_1=1$ và đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1;0)$ và bán kính $R_2=2$. Xác định phép vị tự tâm I, tỉ số k biến (C_1) thành (C_2) biết I nằm giữa hai điểm I_1, I_2.

Hướng dẫn giải

Theo giải thiết suy ra $|k|=\dfrac{R_2}{R_1}=\dfrac{2}{1}=2 \Leftrightarrow k=\pm 2$. Mặt khác I_1, I_2 nằm khác phía đối với I nên suy ra $k=-2$.

Gọi $I(x;y)$, ta có $\overrightarrow{II_2}=-2\overrightarrow{II_1} \Leftrightarrow \begin{cases}-1-x=-2(2-x)\\0-y=-2(3-y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x=3\\3y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ Vậy I(1;2)

Câu 11. [KỲ THI OLYMPIC 30-4 Lần 16 (3-4-2010) Toán Khối 11]

Hãy tìm bên trong một tứ giác lồi một điểm sao cho các đoạn thẳng nối điểm đó và trung điểm các cạnh đối diện chia tứ giác thành 4 phần có diện tích bằng nhau bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Câu 12. [Ngân hàng đề Hùng Vương-Trường CHUYÊN BẮC GIANG – năm-Tỉnh BẮC GIANG]

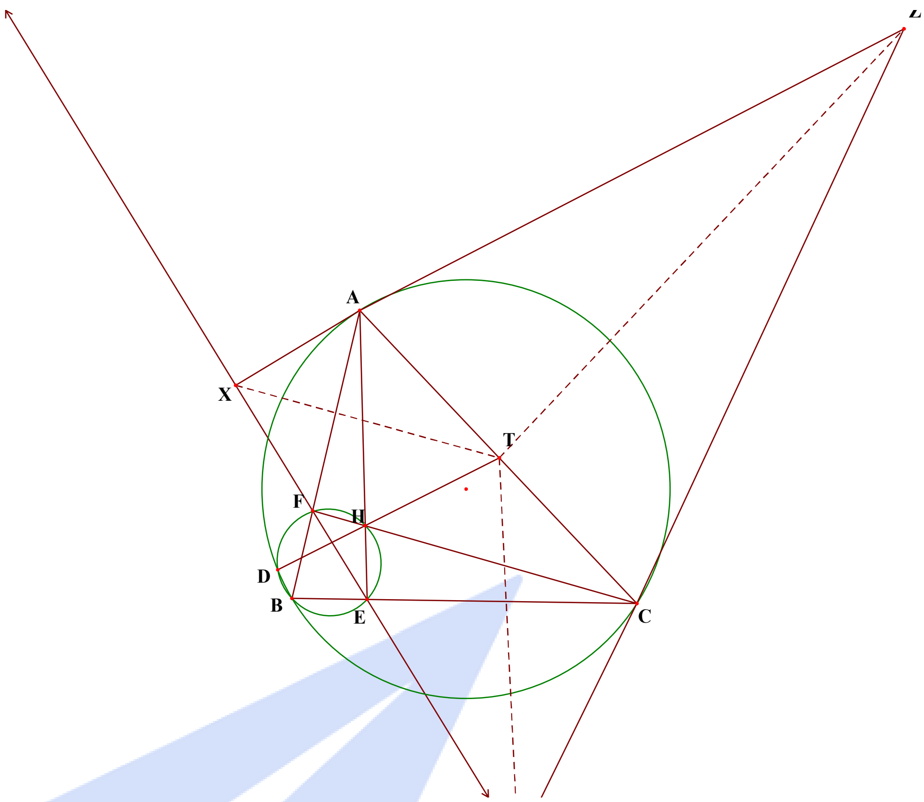
Cho tam giác nhọn ABC không cân tại B, T là trung điểm cạnh AC, E và F tương ứng là chân đường cao hạ từ A, C của tam giác. Z là giao điểm của hai tiếp tuyến tại A, C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, X là giao điểm của ZA và EF, Y là giao điểm của ZC và EF

a) Chứng minh rằng T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và EBF cắt nhau tại điểm thứ hai D. Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên DT.

c) Chứng minh rằng D nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ.

Hướng dẫn giải



a) ZT là phân giác góc $\widehat{AZC}$.

Do $\widehat{XAB} = \widehat{ACB} = \widehat{BFE} = \widehat{AFX}$ và $TA = TF$, từ đó X và T nằm trên trung trực của AF , do đó T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ

b)Giả sử $AB < BC$, khi đó D nằm trên cung nhỏ AB . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và L là trung điểm của BH . Ta có được BD và LO vuông góc.

Từ BD và DH vuông góc, ta được LO và DH song song. $OLHT$ là hình bình hành nên LO song song với HT , do đó D , H , T thẳng hàng.

c) Chứng minh được góc $\widehat{ADT} = \widehat{AXT}$ và TY là đường trung trực của DC .

Chứng minh được góc $\widehat{CDT} = \widehat{CYT}$ nên $CTDY$ là tứ giác nội tiếp.

Do đó góc $\widehat{XDY} + \widehat{XZY} = \widehat{XDT} + \widehat{TDY} + \widehat{XZY} = \widehat{ZAT} + \widehat{ZCT} + \widehat{XZY} = 180^\circ$, do đó $DXZY$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 13. [Ngân hàng đề Trêng T.H.P.T Chuyªn Th¸i B×nh- ĐỀ ĐỀ NGHỊ THI CHỌN HSG VÙNG DUYÊN HẢI BẮC BỘ LỚP 11
N¨m häc 2013-2014]

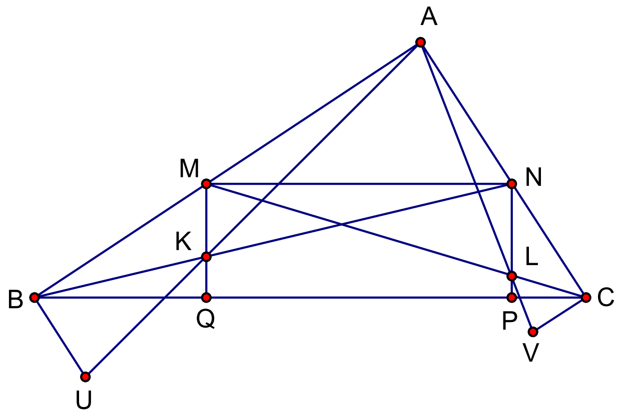
Cho tam giác ABC vuông tại A. Hình chữ nhật MNPQ thay đổi sao cho M thuộc AB, N thuộc AC và P, Q thuộc BC. K = BN ∩ MQ; L = CM ∩ NP;X =MP ∩ NQ;Y =KP ∩ LQ Chứng minh rằng.

1) $\widehat{KAB} = \widehat{LAC}$.

2) XY luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

1) Lấy U, V theo thứ tự thuộc AK, AL sao cho $\widehat{ABU} = \widehat{ACV} = 90^\circ$ (h.1).



(h.2.1)

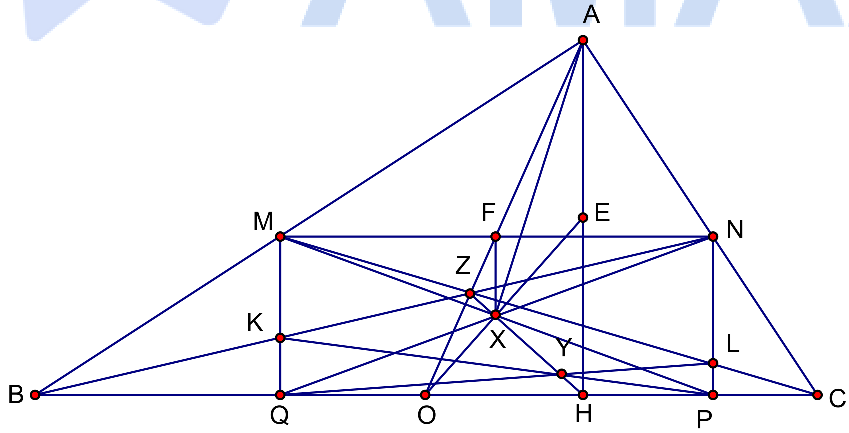
$$\text{Ta có}\ \frac{BU}{CV}=\frac{BU}{NA}.\frac{NA}{MA}.\frac{MA}{CV}=\frac{BK}{NK}.\frac{BA}{CA}.\frac{ML}{CL}=\frac{BQ}{NM}.\frac{BA}{CA}.\frac{MN}{CP}$$
$$=\frac{BQ}{MQ}.\frac{CA}{BA}.\frac{NP}{CP}=\frac{BA}{CA}.\frac{CA}{BA}.\frac{BA}{CA}=\frac{BA}{CA}.$$

Do đó các tam giác ABU, ACV đồng dạng.

Vậy $\widehat{KAB}=\widehat{LAC}$.

2)Đặt $Z = ML \cap NK$ (h.2.2).

Theo định lí Pappus, X, Y, Z thẳng hàng (1).
Gọi H là hình chiếu của A trên BC; O, F, E theo thứ tự là trung điểm của BC, MN,AH.
Dễ thấy A, Z, O, F thẳng hàng; E, X, O thẳng hàng; FX // AH.
Vậy $X(AHEF) = -1 = X(AZOF) = X(AZEF)$.
Do đó X, H, Z thẳng hàng (2).
Từ (1) và (2) suy ra XY đi qua H (đpcm).



(h.2.2)

Câu 14. Cho đường tròn (O, R) và một điểm S ở trong đường tròn. Xét tất cả các góc vuông đỉnh S: gọi giao điểm của hai cạnh góc vuông với đường tròn là A, B. Tìm tập hợp trung điểm M của AB.

Hướng dẫn giải