CHỦ ĐỀ 1. TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

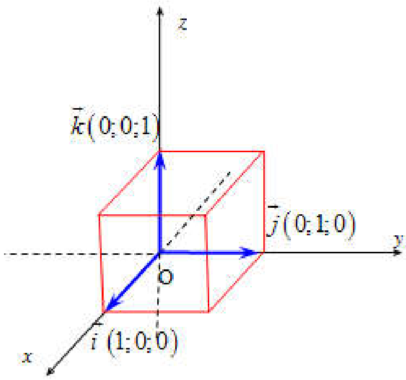
A. LÝ THUYẾT

1. Hệ trục tọa độ trong không gian

Trong không gian, xét ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một và chung một điểm gốc O. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị, tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz. Hệ ba trục như vậy gọi là ***hệ trục tọa độ vuông góc*** trong không gian.

Chú ý: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{j} = 0$.

2. Tọa độ của vectơ



a) Định nghĩa: $\vec{u} = (x;\ y;\ z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

b) Tính chất: Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3),\ \vec{b} = (b_1; b_2; b_3),\ k \in \mathbb{R}$

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2;\ a_3 \pm b_3)$
- $k\vec{a} = (ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
- $\vec{0} = (0;0;0),\ \vec{i} = (1;0;0),\ \vec{j} = (0;1;0),\ \vec{k} = (0;0;1)$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\,(\vec{b} \neq \vec{0})$ $\Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}\ (k \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3},\ (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$$

- $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
- $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_2^2}$
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ *(với $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$)*

3. Tọa độ của điểm

a) Định nghĩa: $M(x;\ y;\ z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ *(x : hoành độ, y : tung độ, z : cao độ)*

Chú ý:
- $M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0; M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0; M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$
- $M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0; M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0; M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0$.

b) Tính chất: Cho $A(x_A;\ y_A;\ z_A),\ B(x_B;\ y_B;\ z_B)$

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$
- Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

- Toạ độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4};\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4};\frac{z_A+z_B+z_C+z_C}{4}\right)$$

4. Tích có hướng của hai vectơ

a) Định nghĩa: Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, được xác định bởi

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$$

Chú ý: *Tích có hướng của hai vectơ là một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ là một số.*

b) Tính chất:

- $[\vec{a},\vec{b}]\perp\vec{a}$; $\quad [\vec{a},\vec{b}]\perp\vec{b}$
- $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$
- $\left[\vec{i},\vec{j}\right]=\vec{k}$; $\quad \left[\vec{j},\vec{k}\right]=\vec{i}$; $\quad \left[\vec{k},\vec{i}\right]=\vec{j}$
- $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ **(Chương trình nâng cao)**
- $\vec{a},\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ $[\vec{a},\vec{b}]=\vec{0}$ (chứng minh 3 điểm thẳng hàng)

c) Ứng dụng của tích có hướng: (Chương trình nâng cao)

- ***Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ:*** $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ $[\vec{a},\vec{b}].\vec{c}=0$
- ***Diện tích hình bình hành*** $ABCD$ **:** $\quad S_{\square ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$
- ***Diện tích tam giác*** ABC **:** $\quad S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$
- ***Thể tích khối hộp*** $ABCDA'B'C'D'$ **:** $\quad V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$
- ***Thể tích tứ diện*** $ABCD$ **:** $\quad V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$

Chú ý:

– ***Tích vô hướng*** của hai vectơ thường sử dụng để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, tính góc giữa hai đường thẳng.

– ***Tích có hướng*** của hai vectơ thường sử dụng để tính diện tích tam giác; tính thể tích khối tứ diện, thể tích hình hộp; chứng minh các vectơ đồng phẳng – không đồng phẳng, chứng minh các vectơ cùng phương.

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\\ \vec{a}\ \text{và}\ \vec{b}\ \textit{cùng phương}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}\\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}\ \textit{đồng phẳng}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0\end{array}}$$

5. Một vài thao tác sử dụng máy tính bỏ túi (Casio Fx570 Es Plus, Casio Fx570 Vn Plus, Vinacal 570 Es Plus)

Trong không gian $Oxyz$ cho bốn điểm $A(x_A;y_A;z_A),B(x_B;y_B;z_B),C(x_C;y_C;z_C)$, $D(x_D;y_D;z_D)$

w 8 1 1 (nhập vectơ $\overrightarrow{AB}$)

q 5 2 2 2 (nhập vectơ $\overrightarrow{AC}$)

q 5 2 3 1 (nhập vectơ $\overrightarrow{AD}$)

C q53q54= (tính $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$)

C q53q54q57q55= (tính $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}$)

Cqc(Abs) q53q54q57q55= (tính $\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$)

C1a6qc(Abs) q53q54q57q55=

(tính $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$, khi đó $\cos\varphi$ bằng

A. $\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$. **B.** $\dfrac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$. **C.** $\dfrac{-\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$. **D.** $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$.

Câu 2. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}=(1;2;0)$ và $\vec{b}=(2;0;-1)$, khi đó $\cos\varphi$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **D.** $-\dfrac{2}{5}$.

Câu 3. Cho vectơ $\vec{a}=(1;3;4)$, tìm vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$

A. $\vec{b}=(-2;-6;-8)$. **B.** $\vec{b}=(-2;-6;8)$. **C.** $\vec{b}=(-2;6;8)$. **D.** $\vec{b}=(2;-6;-8)$.

Câu 4. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}=(-2;2;5), \vec{b}=(0;1;2)$ trong không gian bằng

A. 10. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 14.

Câu 5. Trong không gian cho hai điểm $A(-1;2;3), B(0;1;1)$, độ dài đoạn AB bằng

A. $\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{8}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $\sqrt{12}$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, gọi $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ là các vectơ đơn vị, khi đó với $M(x;y;z)$ thì $\overrightarrow{OM}$ bằng

A. $-x\vec{i}-y\vec{j}-z\vec{k}$. **B.** $x\vec{i}-y\vec{j}-z\vec{k}$. **C.** $x\vec{j}+y\vec{i}+z\vec{k}$. **D.** $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

Câu 7. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3), \vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ là một vectơ, kí hiệu $[\vec{a},\vec{b}]$, được xác định bằng tọa độ

A. $(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$. **B.** $(a_2b_3+a_3b_2;a_3b_1+a_1b_3;a_1b_2+a_2b_1)$.

C. $(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1+a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$. **D.** $(a_2b_2-a_3b_3;a_3b_3-a_1b_1;a_1b_1-a_2b_2)$.

Câu 8. Cho các vectơ $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$ và $\vec{v}=(v_1;v_2;v_3)$, $\vec{u}.\vec{v}=0$ khi và chỉ khi

A. $u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=1$. **B.** $u_1+v_1+u_2+v_2+u_3+v_3=0$.

C. $u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0$. **D.** $u_1v_2+u_2v_3+u_3v_1=-1$.

Câu 9. Cho vectơ $\vec{a}=(1;-1;2)$, độ dài vectơ $\vec{a}$ là

A. $\sqrt{6}$. **B.** 2. **C.** $-\sqrt{6}$. **D.** 4.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M nằm trên trục Ox sao cho M không trùng với gốc tọa độ, khi đó tọa độ điểm M có dạng

A. $M(a;0;0), a\neq 0$. **B.** $M(0;b;0), b\neq 0$. **C.** $M(0;0;c), c\neq 0$. **D.** $M(a;1;1), a\neq 0$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho M không trùng với gốc tọa độ và không nằm trên hai trục Ox, Oy, khi đó tọa độ điểm M là $(a,b,c\neq 0)$

A. $(0;b;a)$. **B.** $(a;b;0)$. **C.** $(0;0;c)$. **D.** $(a;1;1)$

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(0;3;4)$ và $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$, khi đó tọa độ vectơ $\vec{b}$ có thể là

A. $(0;3;4)$. **B.** $(4;0;3)$. **C.** $(2;0;1)$. **D.** $(-8;0;-6)$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, khi đó $\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|$ bằng

A. $|\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right)$. **B.** $|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$. **C.** $\vec{u}.\vec{v}.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$. **D.** $\vec{u}.\vec{v}.\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a}=(1;-1;2),\vec{b}=(3;0;-1),\vec{c}=(-2;5;1)$, vectơ $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ có tọa độ là

A. $(6;0;-6)$. **B.** $(-6;6;0)$. **C.** $(6;-6;0)$. **D.** $(0;6;-6)$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;0;-3),B(2;4;-1),C(2;-2;0)$. Độ dài các cạnh AB,AC,BC của tam giác ABC lần lượt là

A. $\sqrt{21},\sqrt{13},\sqrt{37}$. **B.** $\sqrt{11},\sqrt{14},\sqrt{37}$. **C.** $\sqrt{21},\sqrt{14},\sqrt{37}$. **D.** $\sqrt{21},\sqrt{13},\sqrt{35}$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;0;-3),B(2;4;-1),C(2;-2;0)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

A. $\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};-\frac{4}{3}\right)$. **B.** $\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$. **C.** $(5;2;4)$. **D.** $\left(\frac{5}{2};1;-2\right)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;0),B(-1;1;3),C(0;-2;5)$. Để 4 điểm A,B,C,D đồng phẳng thì tọa độ điểm D là

A. $D(-2;5;0)$. **B.** $D(1;2;3)$. **C.** $D(1;-1;6)$. **D.** $D(0;0;2)$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vecto $\vec{a}=(1;2;3),\vec{b}=(-2;0;1),\vec{c}=(-1;0;1)$. Tìm tọa độ của vecto $\vec{n}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}-3\vec{i}$

A. $\vec{n}=(6;2;6)$. **B.** $\vec{n}=(6;2;-6)$. **C.** $\vec{n}=(0;2;6)$. **D.** $\vec{n}=(-6;2;6)$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;2),B(-2;1;3),C(3;2;4)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC

A. $G\left(\frac{2}{3};1;3\right)$. **B.** $G(2;3;9)$. **C.** $G(-6;0;24)$. **D.** $G\left(2;\frac{1}{3};3\right)$.

Câu 20. Cho 3 điểm $M(2;0;0),N(0;-3;0),P(0;0;4)$. Nếu $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ của điểm Q là

A. $Q(-2;-3;4)$ **B.** $Q(2;3;4)$ **C.** $Q(3;4;2)$ **D.** $Q(-2;-3;-4)$

Câu 21. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(1;1;1),N(2;3;4),P(7;7;5)$. Để tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ điểm Q là

A. $Q(-6;5;2)$. **B.** $Q(6;5;2)$. **C.** $Q(6;-5;2)$. **D.** $Q(-6;-5;-2)$.