

CHỦ ĐỀ 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Định nghĩa:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K , với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc một đoạn.

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu " $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ".
- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên K nếu " $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ".

2. **Điều kiện cần để hàm số đơn điệu:** Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

- Nếu hàm số đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.
- Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

3. **Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu:** Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K .

👉 **Chú ý.**

- ♦ Nếu K là một đoạn hoặc nửa khoảng thì phải bổ sung giả thiết "Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó". Chẳng hạn: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0, \forall x \in K$ trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số đồng biến trên đoạn $[a; b]$.
- ♦ Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ (hoặc $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số điểm hữu hạn của K thì hàm số đồng biến trên khoảng K (hoặc nghịch biến trên khoảng K).

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

1. **Lập bảng xét dấu của một biểu thức $P(x)$**

Bước 1. Tìm nghiệm của biểu thức $P(x)$, hoặc giá trị của x làm biểu thức $P(x)$ không xác định.

Bước 2. Sắp xếp các giá trị của x tìm được theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.

Bước 3. Sử dụng máy tính tìm dấu của $P(x)$ trên từng khoảng của bảng xét dấu.

2. **Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định**

Bước 1. Tìm tập xác định D .

Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.

Bước 3. Tìm nghiệm của $f'(x)$ hoặc những giá trị x làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 4. Lập bảng biến thiên.

Bước 5. Kết luận.

3. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số $y = f(x)$ đồng biến, nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ cho trước.

Cho hàm số $y = f(x, m)$ có tập xác định D , khoảng $(a;b) \subset D$:

- Hàm số nghịch biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (a;b)$.
- Hàm số đồng biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (a;b)$.

☞ **Chú ý:** Riêng hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ thì :

- Hàm số nghịch biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (a;b)$.
- Hàm số đồng biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in (a;b)$.

* Nhắc lại một số kiến thức liên quan: Cho tam thức $g(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

a). $g(x) \geq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

b). $g(x) > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

c). $g(x) \leq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$

d). $g(x) < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

☞ **Chú ý:** Nếu gặp bài toán tìm m để hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$:

✓ **Bước 1:** Đưa bất phương trình $f(x) \geq 0$ (hoặc $f(x) \leq 0$), $\forall x \in (a;b)$ về dạng $g(x) \geq h(m)$ (hoặc $g(x) \leq h(m)$), $\forall x \in (a;b)$.

✓ **Bước 2:** Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $(a;b)$.

✓ **Bước 3:** Từ bảng biến thiên và các điều kiện ta suy ra các giá trị cần tìm của tham số m .

4. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình, hệ phương trình và bất phương trình:

Đưa phương trình, hoặc bất phương trình về dạng $f(x) = m$ hoặc $f(x) \geq g(m)$, lập bảng biến thiên của $f(x)$, dựa vào BBT suy ra kết luận.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1.** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{1-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- Câu 2.** Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
- A.** Hàm số luôn nghịch biến trên \mathbb{R} .
B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
D. Hàm số luôn đồng biến trên \mathbb{R} .
- Câu 3.** Cho hàm số $y = -x^4 + 4x^2 + 10$ và các khoảng sau:
(I): $(-\infty; -\sqrt{2})$; (II): $(-\sqrt{2}; 0)$; (III): $(0; \sqrt{2})$;
Hỏi hàm số đồng biến trên các khoảng nào?
- A. Chỉ (I). B. (I) và (II). C. (II) và (III). **D.** (I) và (III).
- Câu 4.** Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{-4+2x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
- A. Hàm số luôn nghịch biến trên \mathbb{R} .
B. Hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.
C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.
- Câu 5.** Hỏi hàm số nào sau đây luôn nghịch biến trên \mathbb{R} ?
- A. $h(x) = x^4 - 4x^2 + 4$. B. $g(x) = x^3 + 3x^2 + 10x + 1$.
C. $f(x) = -\frac{4}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - x$. D. $k(x) = x^3 + 10x - \cos^2 x$.
- Câu 6.** Hỏi hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}$ nghịch biến trên các khoảng nào ?
- A. $(-\infty; -4)$ và $(2; +\infty)$. B. $(-4; 2)$.
C. $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$. **D.** $(-4; -1)$ và $(-1; 2)$.
- Câu 7.** Hỏi hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x - 2$ nghịch biến trên khoảng nào?
- A. $(5; +\infty)$ B. $(2; 3)$ C. $(-\infty; 1)$ **D.** $(1; 5)$
- Câu 8.** Hỏi hàm số $y = \frac{3}{5}x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2$ đồng biến trên khoảng nào?
- A. $(-\infty; 0)$. **B.** \mathbb{R} . C. $(0; 2)$. D. $(2; +\infty)$.
- Câu 9.** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hỏi hàm số luôn đồng biến trên \mathbb{R} khi nào?

- A. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$
- C. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a = b = c = 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

Câu 10. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 15$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$.
 B. Hàm số đồng biến trên \mathbb{R} .
 C. Hàm số đồng biến trên $(-9; -5)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.

Câu 11. Cho hàm số $y = \sqrt{3x^2 - x^3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
 B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0); (2; 3)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0); (2; 3)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{x}{2} + \sin^2 x, x \in [0; \pi]$. Hỏi hàm số đồng biến trên các khoảng nào?

- A. $\left(0; \frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12}; \pi\right)$. B. $\left(\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right)$.
 C. $\left(0; \frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right)$. D. $\left(\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12}; \pi\right)$.

Câu 13. Cho hàm số $y = x + \cos^2 x$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

- A. Hàm số luôn đồng biến trên \mathbb{R} .
 B. Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi; +\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi; +\infty\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$.
 D. Hàm số luôn nghịch biến trên \mathbb{R} .

Câu 14. Cho các hàm số sau:

- (I): $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 4$; (II): $y = \frac{x-1}{x+1}$; (III): $y = \sqrt{x^2 + 4}$
 (IV): $y = x^3 + 4x - \sin x$; (V): $y = x^4 + x^2 + 2$.

Có bao nhiêu hàm số đồng biến trên những khoảng mà nó xác định?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Câu 15. Cho các hàm số sau:

$$(I): y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1;$$

$$(II): y = \sin x - 2x;$$

$$(III): y = -\sqrt{x^3 + 2};$$

$$(IV): y = \frac{x-2}{1-x}$$

Hỏi hàm số nào nghịch biến trên toàn trục số?

A. (I), (II).

B. (I), (II) và (III).

C. (I), (II) và (IV).

D. (II), (III).

Câu 16. Xét các mệnh đề sau:

(I). Hàm số $y = -(x-1)^3$ nghịch biến trên \mathbb{R} .

(II). Hàm số $y = \ln(x-1) - \frac{x}{x-1}$ đồng biến trên tập xác định của nó.

(III). Hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên \mathbb{R} .

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Câu 17. Cho hàm số $y = |x+1|(x-2)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 18. Cho hàm số $y = x + 3 + 2\sqrt{2-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 19. Cho hàm số $y = \cos 2x + \sin 2x \cdot \tan x, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn giảm trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

B. Hàm số luôn tăng trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số không đổi trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

D. Hàm số luôn giảm trên $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x-m+2}{x+1}$ giảm trên các khoảng mà nó xác định ?

A. $m < -3$. B. $m \leq -3$. C. $m \leq 1$. D. $m < 1$.

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số sau luôn nghịch biến trên \mathbb{R} ?

$$y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$$

A. $-3 \leq m \leq 1$. B. $m \leq 1$. C. $-3 < m < 1$. D. $m \leq -3; m \geq 1$.

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x^2 - (m+1)x + 2m-1}{x-m}$ tăng trên từng khoảng xác định của nó?

A. $m > 1$. B. $m \leq 1$. C. $m < 1$. D. $m \geq 1$.

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x) = x + m \cos x$ luôn đồng biến trên \mathbb{R} ?

A. $|m| \leq 1$. B. $m > \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $|m| \geq 1$. D. $m < \frac{1}{2}$.

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = (m-3)x - (2m+1)\cos x$ luôn nghịch biến trên \mathbb{R} ?

A. $-4 \leq m \leq \frac{2}{3}$. B. $m \geq 2$. C. $\begin{cases} m > 3 \\ m \neq 1 \end{cases}$. D. $m \leq 2$.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số sau luôn đồng biến trên \mathbb{R} ?

$$y = 2x^3 - 3(m+2)x^2 + 6(m+1)x - 3m + 5$$

A. 0. B. -1. C. 2. D. 1.

Câu 26. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + mx^2 - mx - m$ luôn đồng biến trên \mathbb{R} ?

A. $m = -5$. B. $m = 0$. C. $m = -1$. D. $m = -6$.

Câu 27. Tìm số nguyên m nhỏ nhất sao cho hàm số $y = \frac{(m+3)x-2}{x+m}$ luôn nghịch biến trên các khoảng xác định của nó?

A. $m = -1$. B. $m = -2$. C. $m = 0$. D. Không có m .

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ giảm trên khoảng $(-\infty; 1)$?

A. $-2 < m < 2$. B. $-2 \leq m \leq -1$. C. $-2 < m \leq -1$. D. $-2 \leq m \leq 2$.

- Câu 29.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?
- A.** $m \leq 0$. **B.** $m \leq 12$. **C.** $m \geq 0$. **D.** $m \geq 12$.
- Câu 30.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$?
- A.** $m \in [-5; 2)$. **B.** $m \in (-\infty; 2]$. **C.** $m \in (2, +\infty)$. **D.** $m \in (-\infty; -5)$.
- Câu 31.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3?
- A.** $m = -1; m = 9$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 9$. **D.** $m = 1; m = -9$.
- Câu 32.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$?
- A.** $1 \leq m < 2$. **B.** $m \leq 0; 1 \leq m < 2$. **C.** $m \geq 2$. **D.** $m \leq 0$.
- Câu 33.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x) = \frac{mx^3}{3} + 7mx^2 + 14x - m + 2$ giảm trên nửa khoảng $[1; +\infty)$?
- A.** $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right)$. **B.** $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right]$. **C.** $\left[-2; -\frac{14}{15}\right]$. **D.** $\left[-\frac{14}{15}; +\infty\right)$.
- Câu 34.** Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = -x^4 + (2m-3)x^2 + m$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ là $\left[-\infty; \frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\frac{p}{q}$ tối giản và $q > 0$. Hỏi tổng $p+q$ là?
- A.** 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.
- Câu 35.** Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m + 2}{x - m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?
- A.** Hai. **B.** Bốn. **C.** Vô số. **D.** Không có.
- Câu 36.** Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{2x^2 + (1-m)x + 1 + m}{x - m}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?
- A.** 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.
- Câu 37.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số α và β sao cho hàm số $y = f(x) = \frac{-x^3}{3} + \frac{1}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)x^2 - \frac{3}{2}x \sin \alpha \cos \alpha - \sqrt{\beta - 2}$ luôn giảm trên \mathbb{R} ?
- A.** $\frac{\pi}{12} + k\pi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ và $\beta \geq 2$.