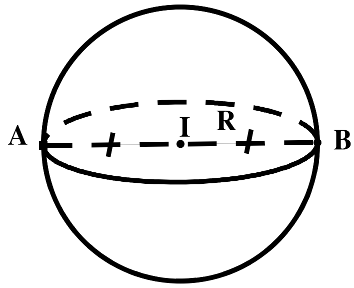
CHỦ ĐỀ 2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Định nghĩa:

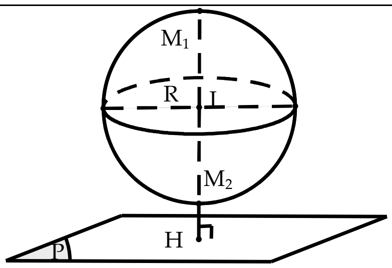
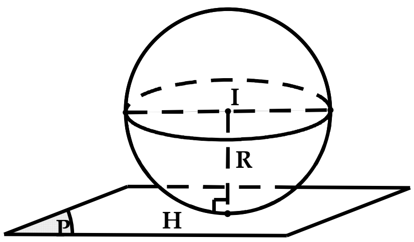
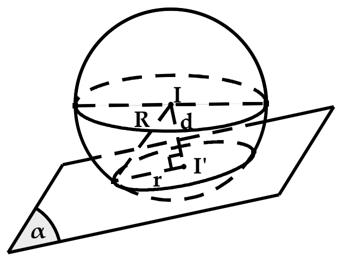
Cho điểm I cố định và một số thực dương R. Tập hợp tất cả những điểm M trong không gian cách I một khoảng R được gọi là mặt cầu tâm I, bán kính R.



Kí hiệu: $S(I;R) \Rightarrow S(I;R)=\{M / IM=R\}$

Dạng 1 : **Phương trình chính tắc** Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R>0$. $\boxed{(S):\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$	***Dạng 2 :*** **Phương trình tổng quát** $\boxed{(S):\ x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0}$ (2) $\Rightarrow$ *Điều kiện để phương trình (2) là phương trình mặt cầu:* $\boxed{a^2+b^2+c^2-d>0}$ • (S) có tâm $I(a;b;c)$. • (S) có bán kính: $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

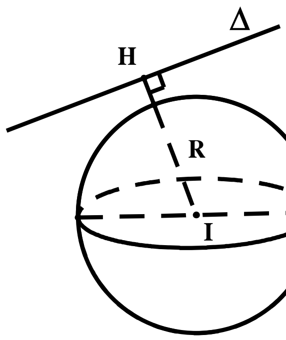
3/ Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng :

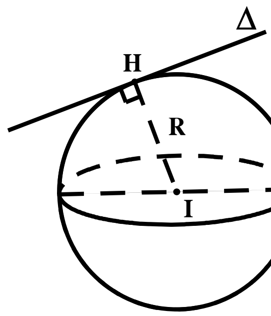
Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) $\Rightarrow$ $d=IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P). Khi đó :		
+ Nếu $d>R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.	+ Nếu $d=R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. Lúc đó: (P) là mặt phẳng *tiếp diện* của mặt cầu và H là *tiếp điểm.*	+ Nếu $d<R$: Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là *đường tròn* có tâm I' và bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$
		

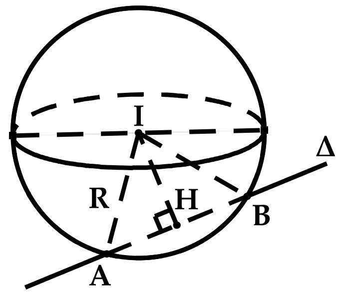
Lưu ý: Khi mặt phẳng (P) đi qua tâm I thì mặt phẳng (P) được gọi là *mặt phẳng kính* và thiết diện lúc đó được gọi là *đường tròn lớn.*

4/ Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng :

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của I lên Δ. Khi đó :		
+ $IH>R$: Δ không cắt mặt cầu.	+ $IH=R$: Δ tiếp xúc với mặt cầu. Δ là *tiếp tuyến* của (S) và H là *tiếp điểm.*	+ $IH<R$: Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.







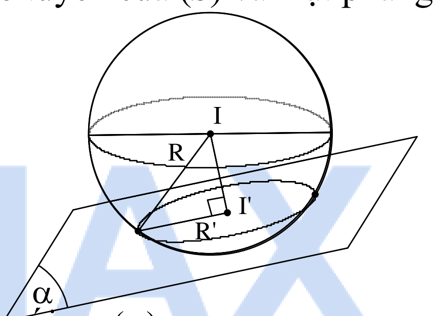
* **Lưu ý:** Trong trường hợp Δ cắt (S) tại 2 điểm A, B thì bán kính R của (S) được tính như sau:

+ Xác định: $\boxed{d\left(I;\Delta\right)=IH.}$

+ Lúc đó: $\boxed{R=\sqrt{IH^2+AH^2}=\sqrt{IH^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}}$

ĐƯỜNG TRÒN TRONG KHÔNG GIAN OXYZ

* Đường tròn (C) trong không gian $Oxyz$, được xem là giao tuyến của (S) và mặt phẳng (α).



$\left(S\right):\ x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

$\left(\alpha\right):\ Ax+By+Cz+D=0$

* <u>Xác định tâm I' và bán kính R' của (C).</u>

+ Tâm $I'=d\cap\left(\alpha\right)$.

Trong đó d *là đường thẳng đi qua* I *và vuông góc với mp*(α)

+ Bán kính $\boxed{R'=\sqrt{R^2-\left(II'\right)^2}=\sqrt{R^2-\left[d\left(I;\left(\alpha\right)\right)\right]^2}}$

5/ Điều kiện tiếp xúc : Cho mặt cầu (S) tâm I, bán kính R.

+ Đường thẳng Δ là *tiếp tuyến* của (S) $\Leftrightarrow$ $\boxed{d\left(I;\Delta\right)=R.}$

+ Mặt phẳng (α) là *tiếp diện* của (S) $\Leftrightarrow$ $\boxed{d\left(I;\left(\alpha\right)\right)=R.}$

* **Lưu ý:** Tìm <u>*tiếp điểm*</u> $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$.

Sử dụng tính chất : $\left[\begin{array}{l} IM_0\perp d \\ IM_0\perp\left(\alpha\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{IM_0}\perp\vec{a}_d \\ \overrightarrow{IM_0}\perp\vec{n}_\alpha\end{array}\right.$

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

Dạng 1: **VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU**

Phương pháp:

* **Thuật toán 1**: Bước 1: Xác định tâm $I(a;b;c)$.

Bước 2: Xác định bán kính R của (S).

Bước 3: Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R.

$$\boxed{(S):\quad (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$$

* **Thuật toán 2:** Gọi phương trình $\boxed{(S):\ x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0}$

Phương trình (S) *hoàn toàn xác định* nếu biết được $a,\ b,\ c,\ d.$ $(a^2+b^2+c^2-d>0)$

Bài tập 1 : Viết phương trình mặt cầu (S), trong các trường hợp sau:

a) (S) có tâm $I(2;2;-3)$ và bán kính $R=3$.

b) (S) có tâm $I(1;2;0)$ và (S) qua $P(2;-2;1)$.

c) (S) có đường kính AB với $A(1;3;1)$, $B(-2;0;1)$.

Bài giải:

a) Mặt cầu tâm $I(2;2;-3)$ và bán kính $R=3$, có phương trình:

(S): $(x-2)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$

b) Ta có: $\overrightarrow{IP}=(1;-4;1)\Rightarrow IP=3\sqrt{2}$.

Mặt cầu tâm $I(1;2;0)$ và bán kính $R=IP=3\sqrt{2}$, có phương trình:

(S): $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=18$

c) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;0)\Rightarrow AB=3\sqrt{2}$.

Gọi I là trung điểm $AB\Rightarrow I\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2};1\right)$.

Mặt cầu tâm $I\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2};1\right)$ và bán kính $R=\frac{AB}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, có phương trình:

(S): $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(z-1)^2=\frac{9}{2}$.

Bài tập 2 : Viết phương trình mặt cầu (S) , trong các trường hợp sau:

a) (S) qua $A(3;1;0)$, $B(5;5;0)$ và tâm I thuộc trục Ox.

b) (S) có tâm O và tiếp xúc mặt phẳng (α): $16x-15y-12z+75=0$.

c) (S) có tâm $I(-1;2;0)$ và có một tiếp tuyến là đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-3}$.

Bài giải:

a) Gọi $I(a;0;0)\in Ox$. Ta có : $\overrightarrow{IA}=(3-a;1;0)$, $\overrightarrow{IB}=(5-a;5;0)$.

Do (*S*) đi qua *A, B* $\Leftrightarrow IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{(3-a)^2+1} = \sqrt{(5-a)^2+25} \Leftrightarrow 4a = 40 \Leftrightarrow a = 10$

$\Rightarrow I(10;0;0)$ và $IA = 5\sqrt{2}$.

Mặt cầu tâm $I(10;0;0)$ và bán kính $R = 5\sqrt{2}$, có phương trình (*S*) : $(x-10)^2 + y^2 + z^2 = 50$

b) Do (*S*) tiếp xúc với $(\alpha) \Leftrightarrow \mathrm{d}(O,(\alpha)) = R \Leftrightarrow R = \frac{75}{25} = 3$.

Mặt cầu tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 3$, có phương trình (*S*) : $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

c) Chọn $A(-1;1;0) \in \Delta \Rightarrow \overrightarrow{IA} = (0;-1;0)$.

Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = (-1;1;-3)$. Ta có: $\left[\overrightarrow{IA}, \vec{u}_\Delta\right] = (3;0;-1)$.

Do (*S*) tiếp xúc với $\Delta \Leftrightarrow \mathrm{d}(I,\Delta) = R \Leftrightarrow R = \frac{\left|\left[\overrightarrow{IA}, \vec{u}_\Delta\right]\right|}{\left|\vec{u}_\Delta\right|} = \frac{\sqrt{10}}{11}$.

Mặt cầu tâm $I(-1;2;0)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{10}}{11}$, có phương trình (*S*) :

$(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = \frac{10}{121}$.

Bài tập 3 : Viết phương trình mặt cầu (*S*) biết :

a) (*S*) qua bốn điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$, $D(1;0;4)$.

b) (*S*) qua $A(0;8;0)$, $B(4;6;2)$, $C(0;12;4)$ và có tâm *I* thuộc mặt phẳng (*Oyz*).

Bài giải:

a) **Cách 1:** Gọi $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu (*S*) cần tìm.

Theo giả thiết: $\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y+z = -1 \\ x+7z = -2 \\ y-4z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

Do đó: $I(-2;1;0)$ và $R = IA = \sqrt{26}$. Vậy (*S*) : $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 26$.

Cách 2: Gọi phương trình mặt cầu (*S*) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$,

$\left(a^2 + b^2 + c^2 - d > 0\right)$.

Do $A(1;2;-4) \in (S) \Leftrightarrow \quad -2a - 4b + 8c + d = -21 \quad (1)$

Tương tự: $B(1;-3;1) \in (S) \Leftrightarrow -2a + 6b - 2c + d = -11 \quad (2)$

$C(2;2;3) \in (S) \Leftrightarrow -4a - 4b - 6c + d = -17 \quad (3)$

$D(1;0;4) \in (S) \Leftrightarrow -2a - 8c + d = -17 \quad (4)$

Giải hệ (1), (2), (3), (4) ta có $a,\ b,\ c,\ d$, suy ra phương trình mặt cầu (*S*) :

$(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 26$.

b) Do tâm *I* của mặt cầu nằm trên mặt phẳng (*Oyz*) $\Rightarrow I(0;b;c)$.

Ta có: $IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ c = 5 \end{cases}$.

Vậy $I(0;7;5)$ và $R = \sqrt{26}$. Vậy (*S*): $x^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 26$.

Bài tập 4: Viết phương trình mặt cầu (*S*) có tâm *I* thuộc đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$ và (*S*) tiếp xúc với hai mặt phẳng (α): $x + 2y + 2z + 3 = 0$ và (β): $x + 2y + 2z + 7 = 0$.

Bài giải:

Gọi $I(t;-1;-t) \in \Delta$ là tâm mặt cầu (*S*) cần tìm.

Theo giả thiết: $d(I,(\alpha)) = d(I,(\beta)) \Leftrightarrow \frac{|1-t|}{3} = \frac{|5-t|}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-t = 5-t \\ 1-t = t-5 \end{array} \right. \Rightarrow t = 3$.

Suy ra: $I(3;-1;-3)$ và $R = \mathrm{d}(I,(\alpha)) = \frac{2}{3}$. Vậy (*S*) : $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$.

Bài tập 5: Lập phương trình mặt cầu (*S*) qua 2 điểm $A(2;6;0)$, $B(4;0;8)$ và có tâm thuộc *d*: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{1}$.

Bài giải:

Ta có $d : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = -5+t \end{cases}$. Gọi $I(1-t;2t;-5+t) \in d$ là tâm của mặt cầu (*S*) cần tìm.

Ta có: $\overrightarrow{IA} = (1+t;6-2t;5-t)$, $\overrightarrow{IB} = (3+t;-2t;13-t)$.

Theo giả thiết, do (*S*) đi qua *A*, *B* $\Leftrightarrow AI = BI$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1+t)^2 + (6-2t)^2 + (5-t)^2} = \sqrt{(3+t)^2 + 4t^2 + (13-t)^2}$

$\Leftrightarrow 62 - 32t = 178 - 20t \Leftrightarrow 12t = -116 \Leftrightarrow t = -\frac{29}{3}$

$\Rightarrow I\left(\frac{32}{3};-\frac{58}{3};-\frac{44}{3}\right)$ và $R = IA = 2\sqrt{233}$. Vậy (S): $\left(x - \frac{32}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{58}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{44}{3}\right)^2 = 932$.

Bài tập 6: Viết phương trình mặt cầu (*S*) có tâm $I(2;3;-1)$ và cắt đường thẳng $\Delta : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$ tại hai điểm *A*, *B* với $AB = 16$.

Bài giải:

Chọn $M(-1;1;0) \in \Delta \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (-3;-2;1)$. Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = (1;-4;1)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}_\Delta\right]=(2;4;14)\Rightarrow \mathrm{d}(I,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}_\Delta\right]\right|}{\left|\vec{u}_\Delta\right|}=2\sqrt{3}$.

Gọi R là bán kính mặt cầu (S). Theo giả thiết : $R=\sqrt{\left[\mathrm{d}(I,\Delta)\right]^2+\dfrac{AB^2}{4}}=2\sqrt{19}$.

Vậy (S): $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=76$.

Bài tập 7: Cho hai mặt phẳng (P): $5x-4y+z-6=0$, (Q): $2x-y+z+7=0$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I là giao điểm của (P) và Δ sao cho (Q) cắt (S) theo một hình tròn có diện tích là 20π .

Bài giải:

Ta có $\Delta:\begin{cases}x=1+7t\\y=3t\\z=1-2t\end{cases}$. Tọa độ I là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x=1+7t & (1)\\y=3t & (2)\\z=1-2t & (3)\\5x-4y+z-6=0 & (4)\end{cases}$

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta có: $5(1+7t)-4(3t)+(1-2t)-6=0\Leftrightarrow t=0\Rightarrow I(1;0;1)$.

Ta có : $d(I,(Q))=\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$.

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến của (S) và mặt phẳng (Q). Ta có:
$20\pi=\pi r^2\Leftrightarrow r=2\sqrt{5}.$

R là bán kính mặt cầu (S) cần tìm.

Theo giả thiết: $R=\sqrt{\left[d(I,(Q))\right]^2+r^2}=\dfrac{\sqrt{330}}{3}$. Vậy ($S$) : $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=\dfrac{110}{3}$.

Bài tập 8: Cho mặt phẳng $(P):2x-y-2z-2=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-t\\y=2t-1\\z=t+2\end{cases}$.

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc d và I cách (P) một khoảng bằng 2 và (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3.

Bài giải:

Gọi $I(-t;2t-1;t+2)\in d$: là tâm của mặt cầu (S) và R là bán kính của (S).

Theo giả thiết : $R=\sqrt{\left[d(I;(P))\right]^2+r^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

Mặt khác: $d(I;(P))=2\Leftrightarrow\dfrac{|-2t-2t+1-2t-4-2|}{\sqrt{4+1+4}}=2\Leftrightarrow|6t+5|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1}{6}\\t=-\dfrac{11}{6}\end{array}\right.$

* Với $t=\frac{1}{6}$: Tâm $I_1\left(-\frac{1}{6};-\frac{2}{3};\frac{13}{6}\right)$, suy ra (S_1): $\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2+\left(z-\frac{13}{6}\right)^2=13$.

* Với $t=-\frac{11}{6}$: Tâm $I_2\left(\frac{11}{6};-\frac{2}{3};\frac{1}{6}\right)$, suy ra (S_2): $\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2+\left(z-\frac{1}{6}\right)^2=13$.

Bài tập 9: Cho điểm $I(1;0;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{2}$. Viết phương trình mặt cầu (*S*) tâm *I* và cắt d tại hai điểm *A, B* sao cho ΔIAB vuông tại *I*.

Bài giải :

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;2)$ và $P(1;-1;1)\in d$.

Ta có: $\overrightarrow{IP}=(0;-1;-2)\Rightarrow\left[\vec{u},\overrightarrow{IP}\right]=(0;-4;-2)$. Suy ra: $\mathrm{d}(I;d)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{IP}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{20}}{3}$.

Gọi *R* là bán kính của (*S*). Theo giả thiết, ΔIAB vuông tại *I*

$$\Rightarrow\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IB^2}=\frac{2}{R^2}\Leftrightarrow R=\sqrt{2}IH=\sqrt{2}\mathrm{d}(I,d)=\frac{\sqrt{40}}{3}$$

Vậy (*S*) : $(x-1)^2+y^2+(z-3)^2=\frac{40}{9}$.

Bài tập 10: (Khối A- 2011) Cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z=0$ và điểm $A(4;4;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (*OAB*), biết điểm *B* thuộc (*S*) và tam giác *OAB* đều.

Bài giải :

(S) có tâm $I(2;2;2)$, bán kính $R=2\sqrt{3}$. *Nhận xét:* điểm *O* và *A* cùng thuộc (*S*).

Tam giác *OAB* đều, có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R'=\frac{OA}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Khoảng cách : $d(I;(P))=\sqrt{R^2-(R')^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Mặt phẳng (*P*) đi qua *O* có phương trình dạng : $ax+by+cz=0$ $\left(a^2+b^2+c^2>0\right)$ (*)

Do (*P*) đi qua *A*, suy ra: $4a+4b=0\Leftrightarrow b=-a$.

Lúc đó: $\mathrm{d}(I;(P))=\frac{|2(a+b+c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2c|}{\sqrt{2a^2+c^2}}\Rightarrow\frac{|2c|}{\sqrt{2a^2+c^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow 2a^2+c^2=3c^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}c=a\\c=-1\end{array}\right.$. Theo (*), suy ra $(P):x-y+z=0$ hoặc $x-y-z=0$.

Chú ý: ***Kỹ năng xác định tâm và bán kính của đường tròn trong không gian.***

Cho mặt cầu (S) tâm I bán kính R. Mặt phẳng (P) cắt (S) theo một đường tròn (C).

<u>Bước 1:</u> Lập phương trình đường thẳng *d* qua *I* và vuông góc với mặt phẳng (*P*).

<u>Bước 2:</u> Tâm *I’* của đường tròn (*C*) là giao điểm của *d* và mặt phẳng (*P*).

Bước 3: Gọi r là bán kính của (*C*): $\boxed{r=\sqrt{R^2-\left[d\left(I;(P)\right)\right]^2}}$

Bài tập 11: Chứng minh rằng: Mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-3=0$ cắt mặt phẳng (*P*): $x-2=0$ theo giao tuyến là một đường tròn (*C*). Xác định tâm và bán kính của (*C*).

Bài giải :

* Mặt cầu (*S*) có tâm $I(1;0;0)$ và bán kính $R=2$.

Ta có : $d\left(I,(P)\right)=1<2=R \Leftrightarrow$ mặt phẳng (*P*) cắt (*S*) theo giao tuyến là 1 đường tròn. (đ.p.c.m)

* Đường thẳng *d* qua $I(1;0;0)$ và vuông góc với (P) nên nhận $\vec{n}_P=(1;0;0)$ làm 1 vectơ chỉ phương, có phương trình $d:\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=0\end{cases}$.

+ Tọa độ tâm I' đường tròn là nghiệm của hệ : $\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=0\\x-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=0\\z=0\end{cases} \Rightarrow I'(2;0;0)$.

+ Ta có: $d\left(I,(P)\right)=1$. Gọi *r* là bán kính của (*C*), ta có : $r=\sqrt{R^2-\left[d\left(I,(P)\right)\right]^2}=\sqrt{3}$.

Dạng 2 : SỰ TƯƠNG GIAO VÀ SỰ TIẾP XÚC

Phương pháp: * **Các điều kiện tiếp xúc**:

+ Đường thẳng Δ là *tiếp tuyến* của (*S*) $\Leftrightarrow$ $d(I;\Delta)=R$.

+ Mặt phẳng (α) là *tiếp diện* của (*S*) $\Leftrightarrow$ $d\left(I;(\alpha)\right)=R$.

* *Lưu ý các dạng toán liên quan như tìm tiếp điểm, tương giao.*

Bài tập 1: Cho đường thẳng $(\Delta):\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và và mặt cầu (S) : $x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$. Số điểm chung của (Δ) và (S) là :

A. 0.B.1.C.2.D.3.

Bài giải:

Đường thẳng (Δ) đi qua $M(0;1;2)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R=2$.

Ta có $\overrightarrow{MI}=(1;-1;-4)$ và $\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]=(-5;7;-3) \Rightarrow d(I,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\dfrac{\sqrt{498}}{6}$

Vì $d(I,\Delta)>R$ nên (Δ) không cắt mặt cầu (S).

Lựa chọn đáp án **A**.

Bài tập 2: Cho điểm $I(1;-2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục *Oy* là:

A. $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=\sqrt{10}$. B. $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=10$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2(z+3)^2=10$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=9$.

Bài giải:

Gọi M là hình chiếu của $I(1;-2;3)$ lên *Oy,* ta có : $M(0;-2;0)$.

$\overrightarrow{IM}=(-1;0;-3)\Rightarrow R=d(I,Oy)=IM=\sqrt{10}$ là bán kính mặt cầu cần tìm.

Phương trình mặt cầu là : $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=10$.

Lựa chọn đáp án **B**.

Bài tập 3: Cho điểm $I(1;-2;3)$ và đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$.

Phương trình mặt cầu tâm *I*, tiếp xúc với *d* là:

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=50$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=5\sqrt{2}$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=5\sqrt{2}$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=50$.

Bài giải:

Đường thẳng (d) đi qua $I(-1;2;-3)$ và có VTCP $\vec{u}=(2;1;-1)$

$$\Rightarrow d(A,d)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=5\sqrt{2}$$

Phương trình mặt cầu là : $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=50$.

Lựa chọn đáp án **D**.

Bài tập 4: Mặt cầu (S) tâm I**(**$2;3;-\ 1$**)** cắt đường thẳng $d:\dfrac{x-11}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+25}{-2}$ tại 2 điểm

A, B sao cho $AB=16$ có phương trình là:

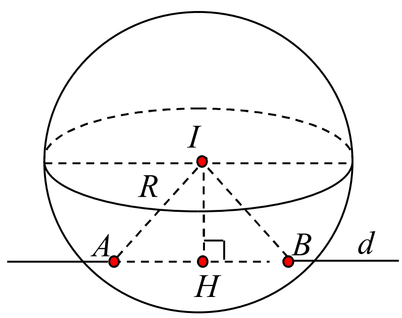
A. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=17$. **B.** $(x+2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=289$.

C. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$. **D.** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=280$.

Bài giải:

Đường thẳng (d) đi qua $M(11;\ 0;-25)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;-2)$.

Gọi H là hình chiếu của I trên (d). Ta có:



$$IH = d(I, AB) = \frac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{MI}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = 15$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 17.$$

Vậy (S) : $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 289.$

Lựa chọn đáp án **C**.

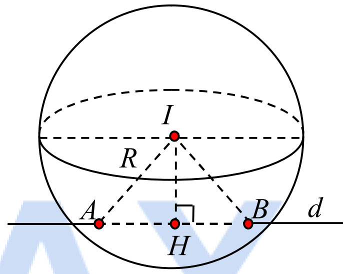
Bài tập 5: Cho đường thẳng $d: \frac{x+5}{2} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z}{1}$ và điểm $I(4;1;6)$. Đường thẳng *d* cắt mặt cầu (S) có tâm *I*, tại hai điểm *A, B* sao cho $AB = 6$. Phương trình của mặt cầu (S) là:

A. $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 18.$ B. $(x+4)^2 + (y+1)^2 + (z+6)^2 = 18.$

C. $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 9.$ D. $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 16.$

Bài giải :

Đường thẳng d đi qua $M(-5;7;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;-2;1)$. Gọi *H* là hình chiếu của *I* trên (*d*). Ta có :



$$IH = d(I, AB) = \frac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{MI}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = 3 \Rightarrow R = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 18$$

Vậy (S): $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 18.$

Lựa chọn đáp án **A**.

Bài tập 8: Cho điểm $I(1;0;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm *I* và cắt đường thẳng *d* tại hai điểm *A, B* sao cho tam giác *IAB* đều là:

A. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{3}.$ B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{3}.$

C. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{16}{4}.$ D. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{3}.$

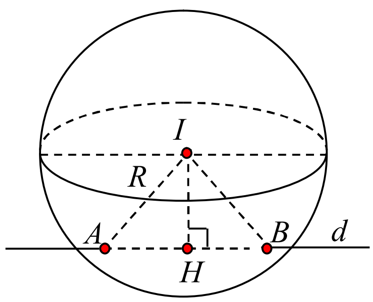
Bài giải:

Đường thẳng (Δ) đi qua $M = (1;1;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;2;1)$

Ta có $\overrightarrow{MI} = (0;-1;2)$ và $\left[\vec{u}, \overrightarrow{MI}\right] = (5;-2;-1)$

Gọi H là hình chiếu của I trên (d). Ta có :

$$IH = d(I, AB) = \frac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{MI}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \sqrt{5}.$$



Xét tam giác IAB, có $IH = R.\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = \frac{2IH}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{3}$.

Lựa chọn đáp án **A**.

Bài tập 9: Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 5 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của mặt cầu (S) qua $A(0;0;5)$ biết:

a) Tiếp tuyến có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;2;2)$.

b) Vuông góc với mặt phẳng (P) : $3x - 2y + 2z + 3 = 0$.

Bài giải:

a) Đường thẳng d qua $A(0;0;5)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;2;2)$, có phương trình

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 5 + 2t \end{cases}.$$

b) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P = (3;-2;2)$.

Đường thẳng d qua $A(0;0;5)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) nên có một vectơ chỉ phương $\vec{n}_P = (3;-2;2)$, có phương trình $d: \begin{cases} x = 3t \\ y = -2t \\ z = 2t + 5 \end{cases}$.

Bài tập 10: Cho $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y + 2z + 3 = 0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{2}$;

$\Delta_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với Δ_1 và Δ_2 đồng thời tiếp xúc với (S).

Bài giải:

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;3;-1)$, $R = 4$.

Ta có: Δ_1 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (3;2;2)$.

Δ_2 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (2;2;1)$.

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp của mặt phẳng (P).

Do: $\begin{cases} (P)//\Delta_1 \\ (P)//\Delta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{n} \perp \vec{u}_2 \end{cases} \Rightarrow$ chọn $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-2;-1;2)$

Lúc đó, mặt phẳng (P) có dạng : $-2x - y + 2z + m = 0$.

Để mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) $\Leftrightarrow d(I;(P)) = R \Leftrightarrow \frac{|5+m|}{3} = 4$

$\Leftrightarrow |5+m|=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=7 \\ m=-17 \end{array}\right.$.

Kết luận: Vậy tồn tại 2 mặt phẳng là : $-2x-y+2z+7=0,\quad -2x-y+2z-17=0$.

Bài tập 11: Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0$, biết tiếp diện:

a) qua $M(1;1;1)$.

b) song song với mặt phẳng (*P*) : $x+2y-2z-1=0$.

b) vuông góc với đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$.

Bài giải:

Mặt cầu (*S*) có tâm $I(-1;2;3)$, bán kính $R=3$.

a) Để ý rằng, $M \in (S)$. Tiếp diện tại *M* có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IM}=(2;-1;-2)$, có phương trình :

(α): $2(x-1)-(y-1)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x-y-2z+1=0.$

b) Do mặt phẳng $(\alpha)//(P)$ nên (α) có dạng : $x+2y-2z+m=0$.

Do (α) tiếp xúc với (*S*) $\Leftrightarrow \mathrm{d}(I,(\alpha))=R \Leftrightarrow \dfrac{|m-3|}{3}=3 \Leftrightarrow |m-3|=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-6 \\ m=12 \end{array}\right.$.

* Với $m=-6$ suy ra mặt phẳng có phương trình : $x+2y-2z-6=0.$

* Với $m=12$ suy ra mặt phẳng có phương trình : $x+2y-2z+12=0.$

c) Đường thẳng *d* có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(2;1;-2)$.

Do mặt phẳng $(\alpha)\perp d$ nên (α) nhận $\vec{u}_d=(2;1;-2)$ làm một vectơ pháp tuyến.

Suy ra mặt phẳng (α) có dạng : $2x+y-2z+m=0$.

Do (α) tiếp xúc với (*S*) $\Leftrightarrow d(I,(\alpha))=R \Leftrightarrow \dfrac{|m-6|}{3}=3 \Leftrightarrow |m-6|=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=15 \end{array}\right.$.

* Với $m=-3$ suy ra mặt phẳng có phương trình : $x+2y-2z-3=0.$

* Với $m=15$ suy ra mặt phẳng có phương trình : $x+2y-2z+15=0.$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu ?

A. $x^2+y^2+z^2-2x=0.$ **B.** $x^2+y^2-z^2+2x-y+1=0.$

C. $2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1.$ **D.** $(x+y)^2=2xy-z^2-1.$

Câu 2. Phương trình nào sau đây **không phải** là phương trình mặt cầu ?

A. $x^2+y^2+z^2-2x=0.$ **B.** $2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1.$

C. $x^2+y^2+z^2+2x-2y+1=0.$ **D.** $(x+y)^2=2xy-z^2+1-4x.$

Câu 3. Phương trình nào sau đây **không phải** là phương trình mặt cầu ?

A. $(x-1)^2+(2y-1)^2+(z-1)^2=6.$ **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6.$

C. $(2x-1)^2+(2y-1)^2+(2z+1)^2=6.$ **D.** $(x+y)^2=2xy-z^2+3-6x.$

Câu 4. Cho các phương trình sau: $(x-1)^2+y^2+z^2=1;\ x^2+(2y-1)^2+z^2=4;$

$$x^2+y^2+z^2+1=0;\ (2x+1)^2+(2y-1)^2+4z^2=16.$$

Số phương trình là phương trình mặt cầu là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 5. Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$ có tâm là:

A. $I(1;-2;0).$ **B.** $I(-1;2;0).$ **C.** $I(1;2;0).$ **D.** $I(-1;-2;0).$

Câu 6. Mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-8x+2y+1=0$ có tâm là:

A. $I(8;-2;0).$ **B.** $I(-4;1;0).$ **C.** $I(-8;2;0).$ **D.** $I(4;-1;0).$

Câu 7. Mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x+1=0$ có tọa độ tâm và bán kính R là:

A. $I(2;0;0),\ R=\sqrt{3}.$ **B.** $I(2;0;0),\ R=3.$

C. $I(0;2;0),\ R=\sqrt{3}.$ **D.** $I(-2;0;0),\ R=\sqrt{3}.$

Câu 8. Phương trình mặt cầu có tâm $I(-1;2;-3)$, bán kính $R=3$ là:

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9.$ **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=3.$

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9.$ **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9.$

Câu 9. Mặt cầu $(S):(x+y)^2=2xy-z^2+1-4x$ có tâm là:

A. $I(-2;0;0).$ **B.** $I(4;0;0).$ **C.** $I(-4;0;0).$ **D.** $I(2;0;0).$

Câu 10. Đường kính của mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-1)^2=4$ bằng:

A. 4. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 16.

Câu 11. Mặt cầu có phương trình nào sau đây có tâm là $I(-1;1;0)$?

A. $x^2+y^2+z^2-2x+2y=0.$ **B.** $x^2+y^2+z^2+2x-2y+1=0.$

C. $2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1-2xy.$ **D.** $(x+y)^2=2xy-z^2+1-4x.$

Câu 12. Mặt cầu (S): $3x^2+3y^2+3z^2-6x+12y+2=0$ có bán kính bằng:

A. $\frac{\sqrt{7}}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{7}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\sqrt{\frac{13}{3}}$.

Câu 13. Gọi I là tâm mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-2)^2=4$. Độ dài $\left|\overrightarrow{OI}\right|$ (O là gốc tọa độ) bằng:

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}$.`

Câu 14. Phương trình mặt cầu có bán kính bằng 3 và tâm là giao điểm của ba trục toạ độ?

A. $x^2+y^2+z^2-6z=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2-6y=0$.

C. $x^2+y^2+z^2=9$. **D.** $x^2+y^2+z^2-6x=0$.

Câu 15. Mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+10y+3z+1=0$ đi qua điểm có tọa độ nào sau đây?

A. $(2;1;9)$. **B.** $(3;-2;-4)$. **C.** $(4;-1;0)$. **D.** $(-1;3;-1)$.

Câu 16. Mặt cầu tâm $I(-1;2;-3)$ và đi qua điểm $A(2;0;0)$ có phương trình:

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=22$. **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=11$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=22$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=22$.

Câu 17. Cho hai điểm $A(1;0;-3)$ và $B(3;2;1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là:

A. $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-2x-y+z-6=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z+6=0$.

Câu 18. Nếu mặt cầu (S) đi qua bốn điểm $M(2;2;2)$, $N(4;0;2)$, $P(4;2;0)$ và $Q(4;2;2)$ thì tâm I của (S) có toạ độ là:

A. $(-1;-1;0)$. **B.** $(3;1;1)$. **C.** $(1;1;1)$. **D.** $(1;2;1)$.

Lựa chọn đáp án **A.**

Câu 19. Bán kính mặt cầu đi qua bốn điểm $M(1;0;1)$, $N(1;0;0)$, $P(2;1;0)$ và $Q(1;1;1)$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 20. Cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-4=0$ và 4 điểm $M(1;2;0)$, $N(0;1;0)$, $P(1;1;1)$, $Q(1;-1;2)$. Trong bốn điểm đó, có bao nhiêu điểm **không** nằm trên mặt cầu (S) ?

A. 2 điểm. **B.** 4 điểm. **C.** 1 điểm. **D.** 3 điểm.

Câu 21. Mặt cầu (S) tâm $I(-1;2;-3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x+2y+2z+1=0$ có phương trình:

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=\frac{4}{9}$. **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=\frac{4}{9}$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=\frac{4}{3}$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=\frac{16}{3}$.

Câu 22. Phương trình mặt cầu nào dưới đây có tâm $I(2;1;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x+2y+2z+2=0$?

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=16$. **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$.

C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$. **D.** $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9$.

Câu 23. Mặt cầu (S) tâm $I(3;-3;1)$ và đi qua $A(5;-2;1)$ có phương trình:

A. $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=5$. **B.** $(x-5)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=5$.

C. $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=\sqrt{5}$. **D.** $(x-5)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=\sqrt{5}$.

Câu 24. Phương trình mặt trình mặt cầu có đường kính AB với $A(1;3;2)$, $B(3;5;0)$ là:

A. $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=3$. B. $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=2$.

C. $(x+2)^2+(y+4)^2+(z+1)^2=2$. D. $(x+2)^2+(y+4)^2+(z+1)^2=3$.

Câu 25. Cho $I(1;2;4)$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y+z-1=0$. Mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P), có phương trình là:

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=4$. **B.** $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+4)^2=1$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=4$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=3$.

Câu 26. Cho đường thẳng $d: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1}$ và điểm $A(5;4;-2)$. Phương trình mặt cầu đi qua điểm A và có tâm là giao điểm của d với mặt phẳng (Oxy) là:

A. $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=64$. **B.** $(S): (x+1)^2+(y-1)^2+z^2=9$.

C. $(S): (x+1)^2+(y+1)^2+z^2=65$. **D.** $(S): (x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=65$.

Câu 27. Cho ba điểm $A(6;-2;3)$, $B(0;1;6)$, $C(2;0;-1)$, $D(4;1;0)$. Khi đó mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có phương trình là:

A. $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-3=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z-3=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-2x+y-3z-3=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2+2x-y+3z-3=0$.

Câu 28. Cho ba điểm $A(2;0;1), B(1;0;0), C(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-2=0$. Phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A,B,C và có tâm thuộc mặt phẳng (P) là:

A. $x^2+y^2+z^2-x+2z+1=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2-x-2y+1=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-2x+2y+1=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x-2z+1=0$.

Câu 29. Phương trình mặt cầu tâm $I(1;-2;3)$ và tiếp xúc với trục Oy là:

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=8$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=10$.