

CHỦ ĐỀ 2. CỰC TRỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$.

+ Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 .

+ Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 .

2. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, với $h > 0$.

+ Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

+ Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Minh họa bằng bảng biến thiên

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$	x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$		+	-	$f'(x)$		-	+
$f(x)$		↗ f_{CD} ↘		$f(x)$		↘ f ↗	

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

1. Quy tắc tìm cực trị của hàm số

Quy tắc 1:

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 3. Lập bảng biến thiên.

Bước 4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

Quy tắc 2:

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x)$ và ký hiệu x_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) là các nghiệm.

Bước 3. Tính $f'(x)$ và $f'(x_i)$.

Bước 4. Dựa vào dấu của $f'(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i .

2. Kỹ năng giải nhanh các bài toán cực trị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Delta = b^2 - 3ac > 0$.

Khi đó đường thẳng qua hai điểm cực trị liên quan tới: $y = -\frac{y_1 y_2}{18a}$ (CASIO hỗ trợ).

3. Kỹ năng giải nhanh các bài toán cực trị hàm trùng phương.

Cho hàm số: $y = ax^3 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị là (C).

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$

(C) có ba điểm cực trị $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Delta = \frac{b^2}{4a^2} > 0$

Hàm số có 3 cực trị là: $A(0; c), B\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right), C\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$.

Độ dài các đoạn thẳng: $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}$, $BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

CÔNG THỨC TÍNH NHANH

Ba điểm cực trị tạo thành tam giác ABC thỏa mãn đủ kiện

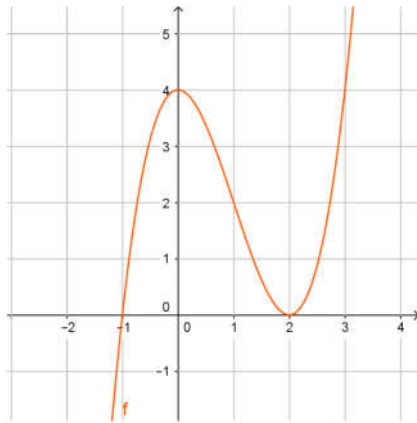
STT	Dữ kiện	Công thức thỏa $ab < 0$
1	Tam giác ABC vuông cân tại A	$8a + b^3 = 0$
2	Tam giác ABC đều	$24a + b^3 = 0$
3	Tam giác ABC có góc $\widehat{BAC} = \alpha$	$\tan \frac{\alpha}{2} = -\frac{8a}{b^3}$
4	Tam giác ABC có diện tích $S_{DABC} = S_0$	$32a^3(S_0)^2 + b^5 = 0$
5	Tam giác ABC có diện tích $\max(S_0)$	$S_0 = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$
6	Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{DABC} = r_0$	$r_0 = \frac{b^2}{\left a\right \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{a}}}}$
7	Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC = m_0$	$a.m_0^2 + 2b = 0$
8	Tam giác ABC có độ dài $AB = AC = n_0$	$16a^2 n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$
9	Tam giác ABC có cực trị B, C $\hat{=} O_x$	$b^2 - 4ac = 0$
10	Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b(8a + b^3) > 0$
11	Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2 - 6ac = 0$
12	Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3 + 8a - 4ac = 0$
13	Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{DABC} = R_0$	$R = \left \frac{b^3 - 8a}{8ab} \right $
14	Tam giác ABC cùng điểm O tạo hình thoi	$b^2 - 2ac = 0$

15	Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0$
16	Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3 - 8a - 8abc = 0$
17	Tam giác ABC có cạnh $BC = k.AB = k.AC$	$b^3.k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$
18	Trục hoành chia ΔABC thành hai phần có diện tích bằng nhau	$b^2 = 4\sqrt{2} ac $
19	Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục hoành	$b^2 - 8ac = 0$
20	Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là:	
	$x^2 + y^2 - \frac{a^2}{b} - \frac{D}{4a} + c\frac{y}{b} + c\frac{a^2}{b} - \frac{D}{4a} = 0$	



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?

- A.** 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	3	-2	$+\infty$	

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$. **B.** Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$. **D.** Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$.
B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và đạt cực đại $x = 0$.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và cực tiểu tại $x = 0$.
D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và cực tiểu tại $x = -2$.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** Hàm số có ba điểm cực trị. **B.** Hàm số chỉ có đúng 2 điểm cực trị.
C. Hàm số không có cực trị. **D.** Hàm số chỉ có đúng một điểm cực trị.

Câu 5. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A, B . Khi đó phương trình đường

thẳng AB là:

- A.** $y = x - 2$. **B.** $y = 2x - 1$.
C. $y = -2x + 1$. **D.** $y = -x + 2$.

Câu 6. Gọi M, n lần lượt là giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$.

Khi đó giá trị của biểu thức $M^2 - 2n$ bằng:

- A. Nếu đạo hàm đổi dấu khi x chạy qua x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .
- B. Nếu $f'(x_0) = 0$ thì hàm số đạt cực trị tại x_0 .
- C. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì đạo hàm đổi dấu khi x chạy qua x_0 .
- D. Nếu $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ thì hàm số không đạt cực trị tại x_0 .

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.
- B. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì hàm số không có đạo hàm tại x_0 hoặc $f'(x_0) = 0$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0 .
- D. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f''(x_0) > 0$ hoặc $f''(x_0) < 0$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[a, b]$ và x_0 thuộc đoạn $[a, b]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f''(x_0) < 0$ hoặc $f''(x_0) > 0$.
- B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0 .
- D. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì hàm số không có đạo hàm tại x_0 hoặc $f'(x_0) = 0$.

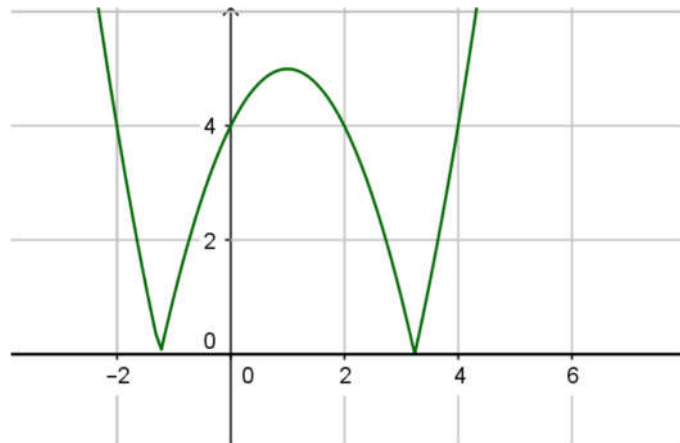
Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Nếu hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực đại là M , giá trị cực tiểu là m thì $M > m$.
- B. Nếu hàm số $y = f(x)$ không có cực trị thì phương trình $f'(x_0) = 0$ vô nghiệm.
- C. Hàm số $y = f(x)$ có đúng hai điểm cực trị thì hàm số đó là hàm bậc ba.
- D. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với $a \neq 0$ luôn có cực trị.

Câu 21. Hàm số bậc ba có thể có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 0 hoặc 1 hoặc 2. B. 1 hoặc 2. C. 0 hoặc 2. D. 0 hoặc 1.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x) = |x^2 - 2x - 4|$ có đồ thị như hình vẽ:



Hàm số $y = f(x)$ có mấy cực trị?

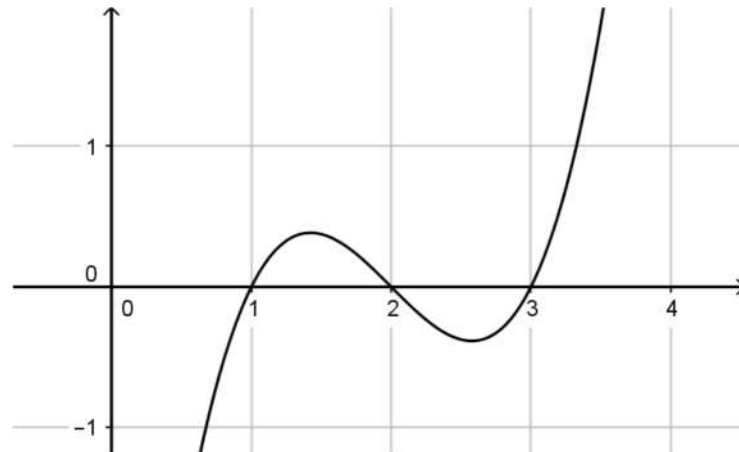
A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

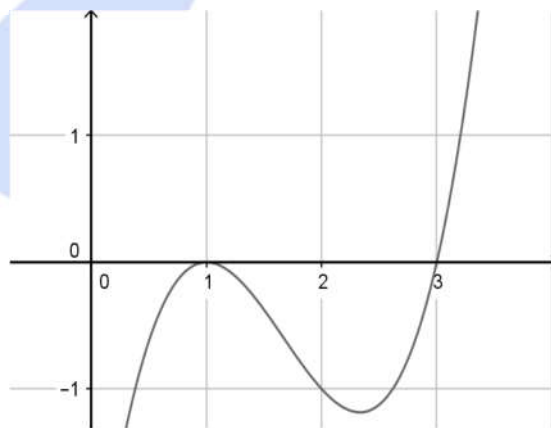
A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.

D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm có một điểm cực trị.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

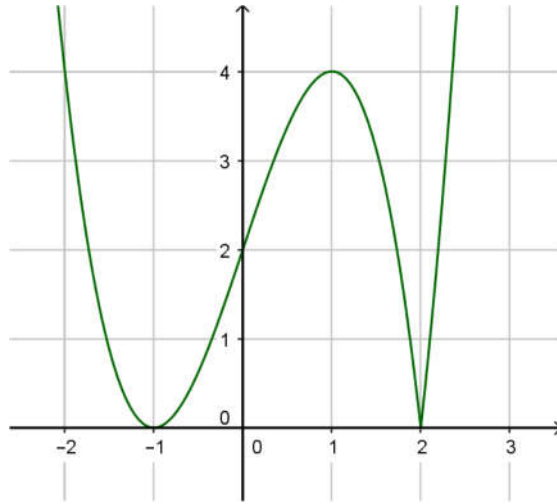
A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực tiểu.

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$.

D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 25. Cho hàm số $y = |x^3 - 3x - 2|$ có đồ thị như hình vẽ:



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ chỉ có điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực tiểu và một điểm cực đại.
- C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bốn điểm cực trị.
- D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.

Câu 26. Hàm số nào sau đây có đúng hai điểm cực trị?

- A. $y = x + \frac{1}{x+1}$.
- B. $y = x^3 + 3x^2 + 7x - 2$.
- C. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$.
- D. $y = x - \frac{2}{x+1}$.

Câu 27. Hàm số nào sau đây không có cực trị?

- A. $y = 2x + \frac{2}{x+1}$.
- B. $y = x^3 + 3x^2$.
- C. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.
- D. $y = \frac{x+1}{x-2}$.

Câu 28. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào là khẳng định sai?

- A. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ luôn có cực trị.
- B. Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ luôn có ít nhất một điểm cực trị.
- C. Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}, (ad - bc \neq 0)$ luôn không có cực trị.
- D. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ có nhiều nhất hai điểm cực trị.

Câu 29. Điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 4$ là:

- A. $x = -1$.
- B. $x = 1$.
- C. $x = -3$.
- D. $x = 3$.

Câu 30. Hàm số nào sau đây đạt cực đại tại $x = 1$?

- A. $y = x^5 - 5x^2 + 5x - 13$.
- B. $y = x^4 - 4x + 3$.
- C. $y = x + \frac{1}{x}$.
- D. $y = 2\sqrt{x} - x$.

Câu 31. Hàm số nào sau đây có cực trị?

- A. $y = x^3 + 1$.
- B. $y = x^4 + 3x^2 + 2$.
- C. $y = 3x + 4$.
- D. $y = \frac{2x-1}{3x+2}$.

Câu 32. Đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 5$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 1.
- B. 0.
- C. 2.
- D. 3.

- Câu 33.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 3$ đạt cực đại tại $x=1$.
- A. $m = 3$. B. $m > 3$. C. $m \leq 3$. D. $m < 3$.
- Câu 34.** Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{4x+7}$ có bao nhiêu điểm cực trị?
- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.
- Câu 35.** Đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ có tọa độ điểm cực tiểu là:
- A. (3;1). B. (-1;-1). C. $(\frac{1}{3}; \frac{85}{27})$. D. (1;3).
- Câu 36.** Hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 2m + 3$ có đúng 1 điểm cực trị thì giá trị của m là:
- A. $m \geq 2$. B. $m < 2$. C. $m > 2$. D. $m = 2$.
- Câu 37.** Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 5x - 17$. Gọi hoành độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là x_1, x_2 . Khi đó, tích số x_1x_2 có giá trị là:
- A. 5. B. -5. C. -4. D. 4.
- Câu 38.** Cho hàm số $y = 3x^4 - 4x^3 + 2$. Khẳng định nào sau đây là đúng:
- A. Hàm số không có cực trị.
 B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.
 C. Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.
 D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.
- Câu 39.** Hàm số $y = a \sin 2x + b \cos 3x - 2x$ ($0 < x < 2\pi$) đạt cực trị tại $x = \frac{\pi}{2}; x = \pi$. Khi đó, giá trị của biểu thức $P = a + 3b - 3ab$ là:
- A. 3. B. -1. C. 1. D. -3.
- Câu 40.** Hàm số $y = -4x^3 - 6x^2 - 3x + 2$ có mấy điểm cực trị?
- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.
- Câu 41.** Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi?
- A. $m > 0$. B. $m \neq 0$. C. $m = 0$. D. $m < 0$.
- Câu 42.** Đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ có tọa độ điểm cực đại là:
- A. (3;0). B. (1;3). C. (1;4). D. (3;1).
- Câu 43.** Cho hàm số $y = (m-1)x^3 - 3x^2 - (m+1)x + 3m^2 - m + 2$. Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì:
- A. $m = 1$. B. $m \neq 1$. C. $m > 1$. D. m tùy ý.
- Câu 44.** Khẳng định nào là đúng trong các khẳng định sau:
- A. Hàm số trùng phương có thể có 2 điểm cực trị.
 B. Hàm số bậc 3 có thể có 3 cực trị.
 C. Hàm số trùng phương luôn có cực trị.
 D. Hàm phân thức không thể có cực trị.
- Câu 45.** Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 5$ là: